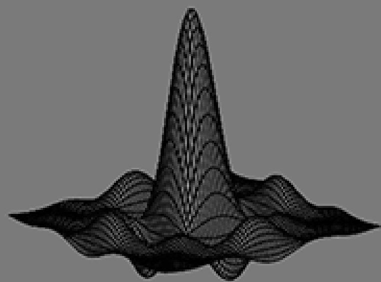
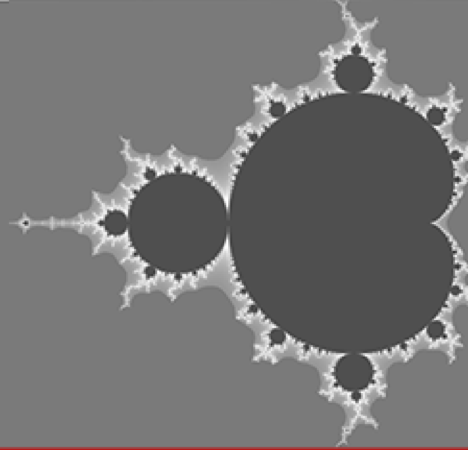
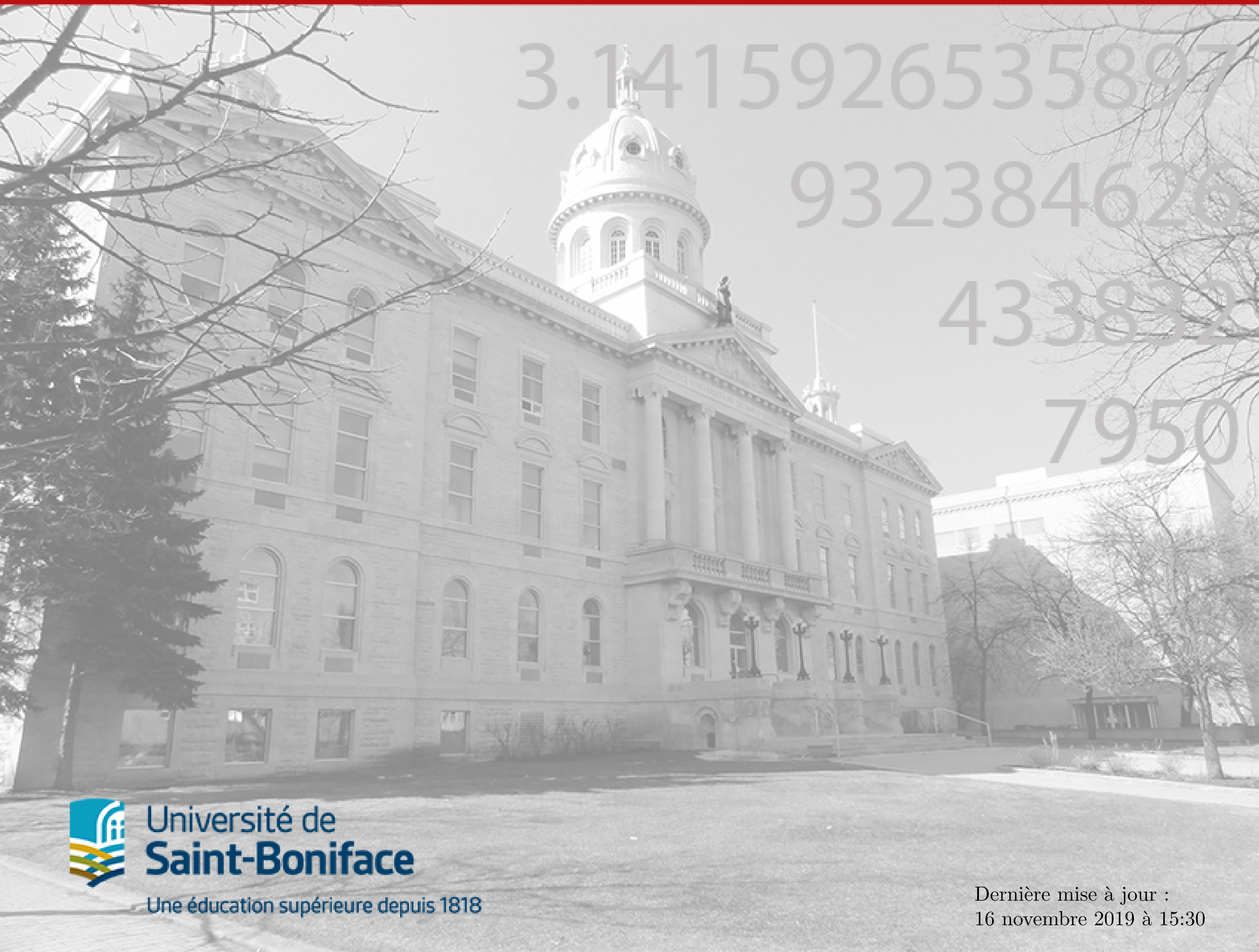
  

Géométrie

Nicolas Bouffard

Automne 2019



Université de Saint-Boniface

Une éducation supérieure depuis 1818

Dernière mise à jour :
16 novembre 2019 à 15:30

Table des matières

Chapitre 1

Axiomes et hypothèses

1.1 Introduction

La géométrie est une discipline très ancienne. Avec l'arithmétique, elle forme l'un des grands sujets d'études des mathématiques de l'antiquité. La géométrie euclidienne est l'une des géométries les plus anciennes et les plus connus de toutes. Elle a été formalisé en grande partie par le mathématicien grec Euclide dans un traité de 13 livres (Les éléments d'Euclide) écrit vers l'an 300 avant J.-C. Il comprend une collection de définitions, d'axiomes, de théorèmes ainsi que leur démonstrations. Il s'agit de l'une des premières axiomatisation rigoureuse d'un domaine mathématique, et il s'agit encore aujourd'hui de l'un des documents mathématiques les plus étudiés.

La grande majorité des résultats que l'on retrouvent dans les éléments n'ont pas été découvert par Euclide. Le génie de ce dernier réside plutôt dans la compilation de la plupart des résultats de géométrie connu à son époque, en fournissant des démonstrations complètes de chacun de ces résultats, et de les établir de manière rigoureuses à partir d'un ensemble de quelques résultats considéré comme évident que nous appelons axiomes ou postulats. Les éléments d'Euclide font partie des livres les plus célèbres et les plus étudié de l'histoire.

La géométrie euclidienne vient en différentes saveur dépendant de l'approche que nous choisissons pour son étude.

1. **La géométrie euclidienne synthétique :** Il s'agit de la géométrie tel qu'Euclide la présenté dans Les Éléments. Il s'agit dans un certain sens de la forme la plus pure. Elle ne fait appel à aucun système de coordonnés. Les outils de base repose directement sur les axiomes d'Euclide, en passant par la congruence et la similitude des triangles.
2. **La géométrie cartésienne :** Développé originalement par René Descartes au 17e siècle, elle permet d'étudier la géométrie Euclidienne à l'aide d'un système de coordonné et des équations. Bien qu'elle soit techniquement équivalente à la géométrie d'Euclide, les méthodes utilisé sont considérablement différentes.
3. **La trigonométrie plane :** Dans un sens strict, la trigonométrie peut être étudié de manière synthétique. Il s'agit d'une étude plus avancé des propriétés des triangles que ce qu'Euclide avait fait. Par contre, le calcul des différents rapports trigonométriques nécessite l'usage de méthodes numériques et de la théorie des séries entières qui sont des outils inexistant à l'époque d'Euclide.
4. **La géométrie vectorielle :** Il s'agit en fait d'une idée semblable à celle de la géométrie cartésienne, mais cette fois en utilisant des vecteurs (flèches) pour faire les calculs.

La géométrie Euclidienne synthétique ne fait appel à aucun système de coordonnée. Les constructions se font uniquement à l'aide d'un compas et d'une règle non gradué. Les systèmes de coordonnés (Géométrie cartésienne) ont fait leur apparitions au 17e siècle, bien après l'époque d'Euclide. La géométrie euclidienne repose sur les 5 axiomes suivants :

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.

3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents.
5. Si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est strictement inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

La géométrie euclidienne n'est bien entendu pas la seule géométrie d'intérêt en mathématiques, mais il s'agit de la première que nous allons étudier, et la seule que nous allons étudier en détail. D'autre géométrie seront cependant introduite vers la fin du cours. Il est cependant important de comprendre dès le départ que la géométrie euclidienne n'est pas la seule géométrie. D'autre exemples important sont les suivants :

1. La géométrie sphérique : La géométrie euclidienne est en bonne partie l'étude de la géométrie que l'on peut faire sur une feuille de papier. Elle n'est donc pas très approprié pour travailler à l'échelle de notre planète qui est une sphère. La géométrie sphérique s'intéresse donc à traduire les notions de géométrie euclidienne sur une sphère, et étudier de quel façon les principaux résultats doivent être modifié. On peut penser par exemple à des triangles que l'on dessine sur une sphère et pour lesquels la somme des angles n'est pas nécessairement 180 degrés.
2. Les géométrie non-euclidienne : Il s'agit d'un ensemble de géométrie basé sur les 4 premiers axiomes d'Euclide, et pour lesquels le 5e postulats est modifié. Les géométries elliptiques et hyperboliques en sont des exemples.
3. La géométrie projective : Avez-vous déjà remarqué que si vous vous placer au milieu d'un chemin de fer, nous avons l'impression que les deux rails, qui sont parallèle, se rencontre éventuellement ? C'est l'idée de base de la géométrie projective. Dans cette géométrie, toutes les droites ont un point d'intersection. Ceci est accomplie en particulier par la notion de point à l'infinie.

1.2 Définitions

Nous allons maintenant énoncé plusieurs définitions qui nous seront utiles pour notre étude de la géométrie euclidienne. Nous prenons premièrement pour acquis que le lecteur est familier avec les notions de points, segments, droites et cercles qui font d'ailleurs partie de axiomes d'Euclide. La notion d'angle est aussi prise pour acquise. Notez cependant qu'un segment, par définition, est le plus court trajet entre deux points, mais ne possède pas d'orientation. Le cercle, pour ca part, est le lieu des points qui ce trouve à une distance fixe (son rayon) d'un point que l'on appelle le centre du cercle.

Definition 1.2.1. Le mesure d'un angle ce calcul soit en degré ou en radian. Par définition, un angle plat (i.e. une droite) mesure 180^o ou π radian. Les autres mesures d'angle ce calcul de manière proportionnelle à partir de la mesure d'un angle plat. Voici quelques définitions supplémentaires concernant des angles.

1. **Angles complémentaires :** Deux angles sont dit complémentaire si la somme de leur mesure est 90 degrés
2. **Angles supplémentaires :** Deux angles sont dit supplémentaire si la somme de leur mesure est 180 degrés
3. **Angles adjacents :** Deux angles sont dit adjacent s'ils ont le même sommet et un coté en commun
4. **Angles opposés par le sommet :** Deux angles sont opposé par le sommet s'ils ont le même sommet et les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.
5. **Bissectrice :** Il s'agit de la droite qui coupe un angle en deux parties égales

Notez que l'idée de définir un angle plat comme étant 180^o peut sembler aujourd'hui étrange. Les raisons sont historiques et nous proviennent des mathématiques mésopotamiennes. Ces derniers utilisaient un système de nombre en base 60, ce qui était vraiment pratique pour les divisions, et permettait de calculer facilement sur les doigts à l'aide des phalanges. Le définition de la notion de degré était alors faites à partir d'un angle considérez comme parfait, c'est à dire celui donné par un triangle équilatéral. Il est cependant plus simple de définir la notion de degré à partir d'un angle plat, et nous démontrerons au prochain chapitre que tout les angle d'un triangle équilatéral sont bien de 60 degrés.

Definition 1.2.2. Un triangle est une figure géométrique former de trois sommets et d'un segment reliant chaque paire de sommet.

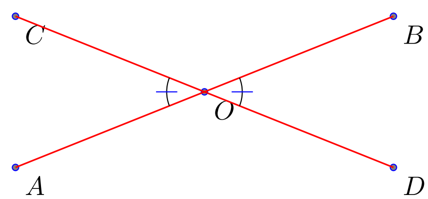
Deux segments sont dit congrus s'ils ont la même longueurs, et deux angles sont dit congrus s'ils ont la même mesure.

1.3 Quelques axiomes supplémentaires

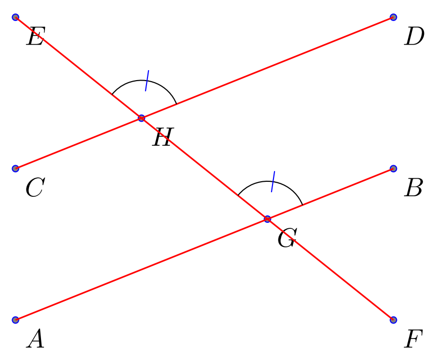
Le début d'un cours de géométrie euclidienne commence par l'étude des axiomes d'Euclide. Techniquement, nous sommes supposé être capable d'établir tous les résultats de géométrie euclidienne à partir de ces 5 axiomes. Ces 5 axiomes sont absolument fondamentaux. Questions de simplifier un peu les choses et nous permettre d'obtenir des résultats intéressant avant la fin de la session, nous allons cependant faire quelques hypothèses supplémentaires.

Congruence des angles : Deux angles sont dit congruent s'ils ont la même mesure, c'est à dire si le premier peut être déplacer de sorte qu'il se superpose parfaitement sur le second. Nous allons supposer vrai les quatres critères suivants établissant la congruence de deux angles. Notez que ces critères peuvent être démontré à partir des axiomes d'Euclide, mais nous ne le feront pas.

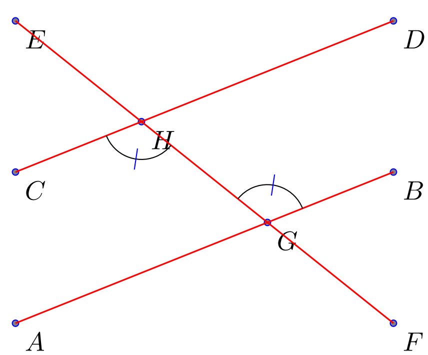
Deux **angles opposés par le sommet** sont congruent. Sur notre schéma, ceci signifie que les angles AOC et BOD sont congruent, ainsi que les angles AOD et COB.



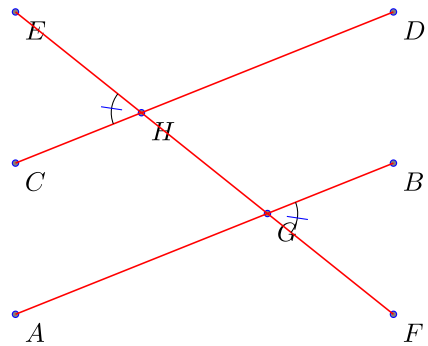
Si on a deux droites parallèles et une troisième droite sécante aux deux premières, alors les **angles correspondant** sont congruent. Sur notre figure, ceci signifie que les angles DHE et BGH sont congruent.



Si on a deux droites parallèles et une troisième droite sécante aux deux premières, alors les **angles alterne-interne** sont congruent. Sur notre figure, ceci signifie que les angles CHE et AGE, ainsi que les angles BGF et DHF sont congruent.

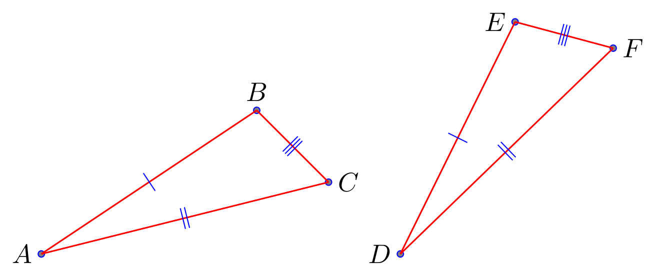


Si on a deux droites parallèles et une droite concourante, alors les **angles alterne-externe** sont congruent

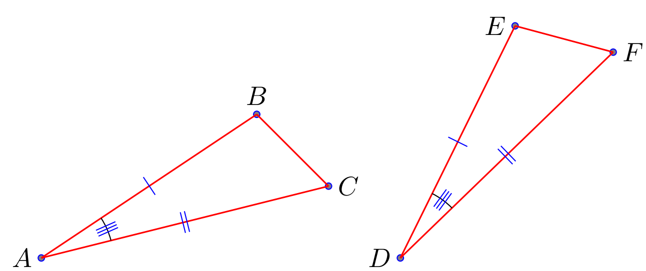


Congruences des triangles : Les trois critères suivants nous permettent de garantir la congruence de deux triangles

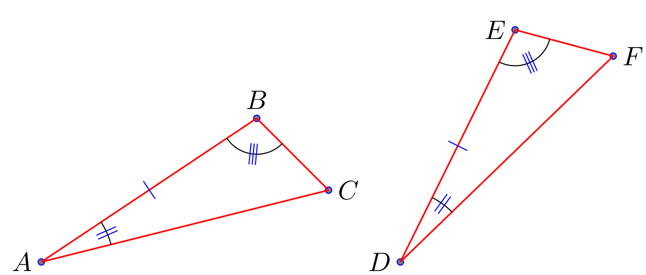
Si tous les côtés d'un triangle sont congruent à des côtés correspondant pour un second triangle, alors les deux triangles sont congruent. Ce critère de congruence est appelé **côté-côté-côté** et est habituellement dénoté tout simplement par CCC.



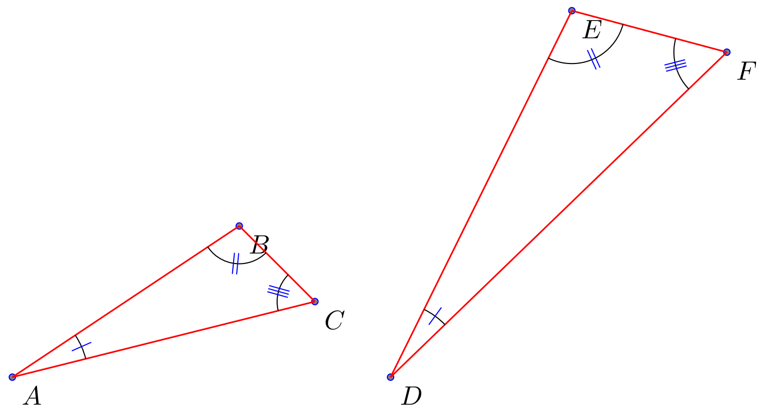
Si deux côtés d'un triangles sont congruent à des côtés correspondant pour un second triangle, et si l'angle entre les deux côtés du premier triangle est congrue à l'angle entre les deux côtés du second triangle, alors les deux triangles sont congruent. Ce critère pour le nom de **côté-angle-côté** et est habituellement dénoté par CAC.



Si deux angles d'un triangles sont congruent à deux angles correspondant pour un second triangle, et si le côté entre les deux angles pour le premier triangle est congrue au côté entre les deux angles pour le second triangle, alors les deux triangles sont congruent. Ce critère porte le nombre de **angle-côté-angle** , et est habituellement dénoté par ACA.



Similitudes des triangles : Deux triangles sont dit semblable s'ils sont en appararence identique, sauf pour leur grosseur. Ceci est le cas si les angles correspondant sont congruent ou de manière équivalente si les côtés correspondant sont proportionnelles. Lorsque les angles correspondant sont congruent, on parle alors tu critères de similitude angle-angle, ce que nous dénotons par AA. Notez que deux triangles congruent sont évidement semblable, et donc les critère CCC, CAC et ACA sont aussi des critères de similitude.



Inégalité triangulaire : Dans un triangle ABC, la longueur d'un côté est toujours strictement plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés. De plus, le plus grand angle est opposé au plus grand côté, et le plus petit angle est opposé au plus petit côté. Notez que pour que l'inégalité soit stricte, nous devons supposer que les points A,B et C ne sont pas aligné sur une même droite, ce qui revient à dire que le triangle est non-dégénéré.

Chapitre 2

Les triangles

2.1 Introduction

Un triangle est une figure géométrique former de trois sommets et d'un segment reliant chaque paire de sommet. Il s'agit de l'une des figures les plus importantes de la géométrie euclidienne, et sert de base à l'étude de plusieurs figures plus complexes. Les triangles possèdent un nombre très important de propriétés intéressantes, que nous allons étudier en détail dans ce chapitre. L'une des propriétés les plus fondamental des triangles concernent la somme de la mesure des angles internes qui en géométrie euclidienne est toujours 180 degré.

Ce résultat est tellement fondamental en géométrie euclidienne, qu'il est très souvent pris pour acquis par les étudiants ou les enseignants sans aucune démonstration. Il s'agit pourtant d'un théorème, et d'en omettre la démonstration est une erreur importante. Après tout, ce résultat est vrai en géométrie euclidienne, mais pas nécessairement dans d'autre géométrie. On peut prendre par exemple l'exemple de la géométrie sphérique, c'est à dire la géométrie que l'on retrouve par exemple à l'échelle de la planète, dans laquelle la somme des angles d'un triangle est toujours supérieures à 180 degré.

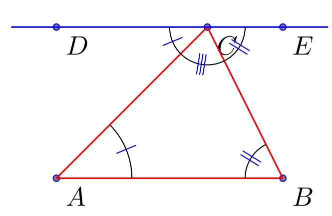
Pour notre première démonstration, nous allons donc regarder comment démontrer ce résultat fondamental à partir des 5 axiomes d'Euclide, et des hypothèses supplémentaires que nous avons fait au premier chapitre.

Definition 2.1.1. Deux triangles sont dit congrus s'ils sont en tout point identique, mais possiblement dans une position différente.

Théorème 2.1.1. La somme des angles internes d'un triangle est toujours 180^o.

Démonstration.

Prenons un triangle quelconque ABC, et dessinons une droite parallèle au segment AB et passant par le point C. Il est alors facile de remarquer que les angles BAC et ACD sont congru car ils sont alternes internes, ainsi que les angles ABC et BCE qui sont aussi alterne externe. La somme des mesures des trois angles est donc équivalente à la mesure de l'angle DCE, c'est à dire à la mesure d'un angle plat. On peut donc conclure que la somme des angles internes d'un triangle est 180^o.



□

2.2 Triangles isocèles et équilatérals

Nous allons maintenant regarder quelques propriétés des triangles ayant un certain nombre de côtés ou d'angles congrus, et nous allons voir qu'il y a un lien important entre le nombre de côtés congrus, et le nombre d'angles congrus. Pour nous aider dans notre travail, nous allons donc commencer par énoncé certaine définitions importantes.

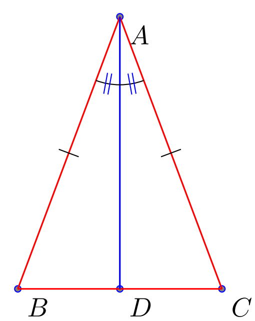
Definition 2.2.1. Définitions concernant le nombres de côtés ou d'angles congrus d'un triangle :

- **Triangle isocèle :** Il s'agit d'un triangle ayant deux côtés congrus.
- **Triangle équilatéral :** Il s'agit d'un triangle ayant trois côtés congrus.
- **Triangle scalène :** Un triangle qui n'a aucun côté congru.
- **Triangle isoangle :** Un triangle ayant deux angles congrus.
- **Triangle équiangle :** Un triangle ayant trois angles congrus.

Théorème 2.2.1. Dans un triangle isocèle, les deux angles opposé à l'angle formé par les deux côtés congrus sont congrus.

Démonstration.

1. Supposons que les cotés AB et AC sont congru.
2. On dessine une droite bissectrice à l'angle BAC, et on nomme le point d'intersection de cette droite avec le coté BC par la lettre D.
3. Les triangles ABD et ADC sont congru par CAC, car les coté AB et AC sont congrus, le coté AD est commun aux deux triangles, et les angles BAD et DAC sont congrus par construction.
4. Comme les deux triangles sont congrus, on en déduit que les angles DBA et DCA doivent être congrus, ce qui complète la preuve.

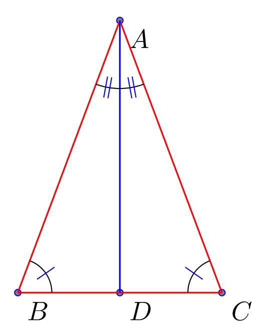


□

Théorème 2.2.2. Dans un triangle ABC, si les angles ABC et ACB sont congrus, alors les côtés AB et AC sont congrus.

Démonstration.

1. Supposons que les angles ABC et ACB sont congru.
2. On dessine une droite bissectrice à l'angle BAC, et on nomme le point d'intersection de cette droite avec le coté BC par la lettre D.
3. Les angles ABC et ACB sont congrus par hypothèse, et les angles BAD et DAC sont congrus par construction. Comme deux des trois angles sont congrus, alors les 3e angles sont aussi congrus car la somme des angles internes d'un triangle est toujours 180^o.
4. Les triangles ABD et ACD sont congrus par ACA, car le coté AD est commun aux deux triangles.
5. Les cotés AB et AC sont donc congrus.



□

Les deux théorèmes précédent nous permettent donc d'affirmer qu'un triangle est isocèle si et seulement s'il est isoangle. Le terme triangle isoangle est donc rarement utilisé, car il n'apporte en fait rien de plus que la notion de triangle isocèle. Le seule raison de parler de triangle isoangle sera donc pour mettre l'emphase sur le fait que ce sont les angles qui nous intéresse.

Corollaire 2.2.1. Un triangle est équilatéral si et seulement si il est équiangle. De plus, chacun des angles d'un triangle équilatéral est 60^o.

Démonstration. Exercice. □

2.3 Médianes, médiatrices, bissectrices et hauteurs

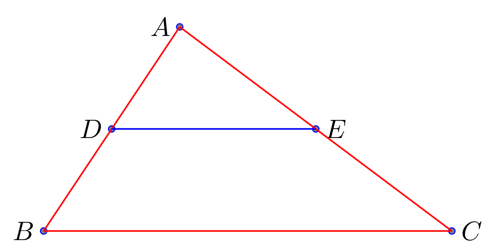
Nous allons maintenant étudier certaine droite remarquable d'un triangle. Il s'agit des médianes, des médiatrices, des bissectrices et des hauteurs. Nous allons donc commencer cette section par définir ces 4 concepts.

Definition 2.3.1. Voici la définition de quelques droites remarquables d'un triangle.

- **Bissectrice :** Lorsque l'on parle d'un angle, il s'agit de la droite divisant cet angle en deux angles congrus. Dans le cas d'un triangle, il s'agit d'une droite divisant l'un des trois angles en deux angles congrus.
- **Médiatrice :** Lorsque l'on parle d'un segment, il s'agit de la droite perpendiculaire qui divise un segment un deux parties égales. Dans le cas d'un triangle, il s'agit d'une droite qui coupe un coté d'un triangle en deux parties égales et à angle droit.
- **Médiane :** Il s'agit du segment qui relie le milieu d'un coté d'un triangle au sommet opposé.
- **Hauteur :** Il s'agit d'un segment qui relie un coté du triangle (ou son prolongement) au sommet opposé, et qui est perpendiculaire au coté.

Théorème 2.3.1. Le segment joignant les points milieux de deux côtés d'un triangle est toujours parallèle au troisième côté du triangle, et de la moitié de sa longueur.

Démonstration.



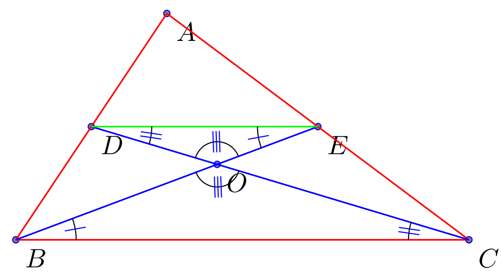
Prenons un triangle ABC quelconque, et supposons que D est le point milieu du segment AB. Dessinons une droite parallèle au segment BC et qui passe par le point D. Dénotons par la lettre E le point d'intersection de la droite que nous venons de dessiner avec le segment AC. On veut montrer que le point E est en fait le point milieu du segment AC. Pour ce faire, remarquons que par construction les segments BC et DE sont parallèle. On peut donc affirmer que les angles ADE et ABC sont des angles correspondant, et sont donc congru. De même pour les angles AED et ACB. Par AA, on peut donc affirmer que les triangles ADE et ABC sont des triangles semblable. Leur côté doivent donc être proportionnels. On a donc la relation : $2 = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$. Le point E est donc le point milieu du segment AC, et la longueur de DE est la moitié de la longueur de CB, ce qui complète la démonstration.

□

Théorème 2.3.2. Les trois médianes d'un triangle se rencontre dans un point que l'ont nomme le centre de gravité du triangle. Le centre de gravité découpe chacune des médiane dans un rapport $2:1$.

Démonstration.

Prenons un triangle ABC quelconque, et supposons que D est le point milieu du segment AB, et E est le point milieu du segment AC. On a donc les deux médianes CD et BE. On dénote le point d'intersection entre ces deux médianes par la lettre O. Par le théorème précédent, nous savons que les segments DE et BC sont parallèle, on peut donc affirmer que les angles EDO et OCB, ainsi que les angles DEO et OBC sont congrus car ils sont alterne-interne. De plus, les angles DOE et BOC sont congrus car ils



sont opposé par le sommet. Les triangles DEO et BOC sont donc semblable par AA. On peut donc affirmer que les côtés de ces deux triangles sont proportionnels. On a donc la relation :

$$2 = \frac{BC}{DE} = \frac{OC}{DO} = \frac{BO}{OE}$$

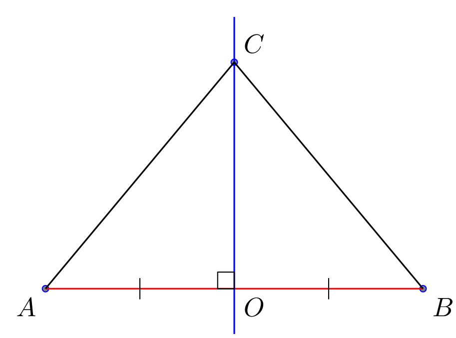
On obtient donc que le point O ce trouve dans un rapport 2 :1 sur le segment BE, ainsi que sur le segment CD. Maintenant, notons que la même démonstration s'applique si on considère n'importe quel deux médianes du triangle. Comme le rapport est toujours constant 2 :1, le point O est en fait commun aux trois médianes.

□

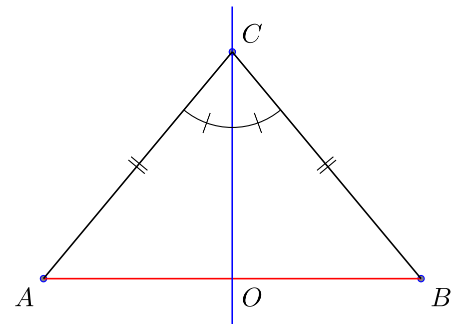
Théorème 2.3.3. La médiatrice d'un segment AB est le lieu des points qui sont à égal distance de A et de B.

Démonstration.

Prenons un segment AB et dessinons la médiatrice du segment. On choisit un point quelconque C sur la médiatrice, ce qui nous permet de dessiner le triangle ABC. Comme la médiatrice par définition coupe le segment AB en deux segment égal, les segment AO et OB sont congru. De plus, par définition de la médiatrice, on sait que l'angle AOC et BOC sont des angles droits, et donc sont aussi congru. Finalement, remarquons que le segment OC est commun aux triangles AOC et BOC. On peut donc affirmer que les triangles AOC et BOC sont congrus par CAC, ce qui nous permet d'obtenir que les segments AC et BC sont congrus. Le point C est donc à égal distance



des points A et B. Maintenant, pour l'autre direction, supposons que C est un point qui se trouve à égal distance des points A et B comme sur la figure ci-contre. Dans ce cas, on dessine la bissectrice de l'angle $\angle ACB$, et on dénote le point d'intersection de cette bissectrice avec le segment AB par la lettre O. Par construction, les angles $\angle ACO$ et $\angle OCB$ sont donc congru. De plus, par les hypothèses du problème, nous savons que les segments AC et CB sont congrus. Finalement, comme il s'agit de deux triangles isocèles, les angles $\angle CAB$ et $\angle ABC$ sont congrus. On a donc que les triangles ACO et OCB sont congrus, ce qui nous permet d'affirmer que $AO \cong OB$ et $\angle AOC \cong \angle BOC$. On en déduit donc que les angles $\angle AOC$ et $\angle BOC$ sont droits, et donc que OC est la médiatrice du segment AB.



Le point C ce trouve donc sur la médiatrice de ce segment. On peut donc affirmer que la médiatrice du segment AB est le lieu des points qui sont à égal distance des points A et B.

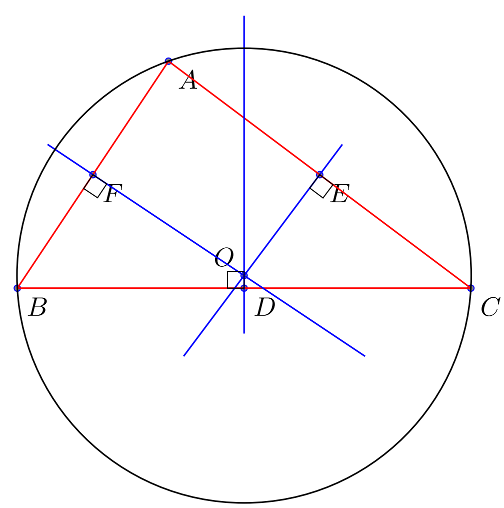
□

Definition 2.3.2. On définit le **cercle circonscrit** d'un triangle comme étant le plus petit cercle qui contient un triangle donné.

Théorème 2.3.4. Les trois médiatrices d'un triangle se rencontre au centre du cercle circonscrit.

Démonstration.

Il s'agit d'une conséquence du théorème précédent. Prenons un triangle quelconque ABC. La médiatrice du segment AB est le lieu de point qui sont à égal distance de A et B. De plus, la médiatrice du segment AC est le lieu des points qui sont à égal distance de A et C. Le point d'intersection de ces deux médiatrices ce trouve donc à égal distance des points A,B et C. Dénotons ce point par la lettre O. Comme ce point est à égal distance des trois sommets du triangle, il est en particulier à égal distance des points B et C, et donc ce trouve aussi sur la médiatrice du segment BC. Les trois médiatrices du triangle se rencontre donc en un seul point. Finalement, comme un cercle est par définition le lieu des points qui sont à égal distance de son centre, on remarque donc que O doit être le centre du cercle circonscrit, c'est à dire celui qui passe par les trois sommets du triangle.

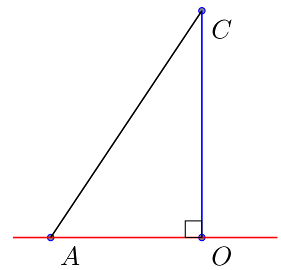


□

Théorème 2.3.5. Si AB est une droite, C est un point qui ne se trouve pas sur la droite, et O le point de AB qui est le plus proche de C, alors le segment CO est perpendiculaire à la droite AB.

Démonstration.

Prenons une droite quelconque, et un point C qui ne se trouve pas sur la droite. Prenons A un point quelconque de la droite, et O un point tel que le segment OC est perpendiculaire à la droite. Par hypothèse, l'angle AOC est droit (donc 90^o), comme la somme des angles internes d'un triangle est 180^o, ceci signifie que la somme des mesures des angles OAC et OCA est 90^o. En particulier, on remarque que l'angle AOC est le plus grand des trois angles du triangle. Par l'inégalité triangulaire, le plus grand côté du triangle doit être AC. Ceci signifie en particulier que la distance entre A et C est plus grande que la distance entre O et C. On peut donc conclure que O est le point de la droite qui ce trouve le plus proche du point C.

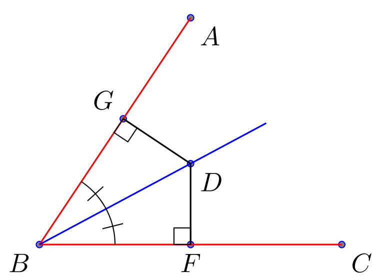


□

Théorème 2.3.6. La bissectrice d'un angle ABC est le lieu des points qui se trouve à égal distance des segments AB et BC.

Démonstration.

Prenons un angle ABC, et dessinons la bissectrice de l'angle. Prenons un point D quelconque sur la bissectrice, et trouvons le point de AB le plus proche de D, et le point de BC le plus proche de D. On dénote ces points par G et F respectivement. Par définition de la bissectrice, on sait que les angles GBD et DBF sont congrus. De plus, comme G et F sont les points les plus proches de D qui ce trouve sur les segments AB et BC respectivement, alors les angles BGD et BFD sont des angles droits, et donc sont congrus. Ensuite, comme la somme des angles internes d'un triangle est toujours constante à 180^o, on peut affirmer que les angles GDB et FDB sont congrus. Ceci nous permet d'obtenir que les triangles GDB et BFD sont congrus par ACA car le segment BD est commun aux deux triangles. Comme ces deux triangles sont congrus, on obtient finalement que les segments GD et DF sont congrus, et donc que le point D est à égal distance du segment AB que du segment BC.



Pour l'autre direction, l'idée est de démontrer que le critère ACC est un critère de congruence dans le cas particulier où l'angle est droit. Cette partie vous est laissé en exercice. La bissectrice est donc le lieu des points qui ce trouve à égal distance des deux segments formant l'angle.

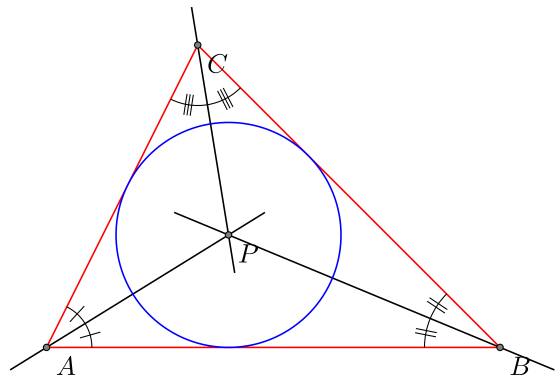
□

Definition 2.3.3. On définit le **cercle inscrit** d'un triangle comme étant le plus grand cercle contenu dans le triangle.

Théorème 2.3.7. Les trois bissectrices d'un triangle se rencontre en un seul point situé au centre du cercle inscrit.

Démonstration.

Prenons un triangle ABC. Comme la bissectrice de l'angle BAC est l'ensemble des points qui ce trouve à égal distance des segments AB et AC, et la bissectrice de l'angle ABC est l'ensemble des points qui ce trouve à égal distance des segments AB et BC, alors le point d'intersection entre ces deux bissectrices doit ce trouver à égal distance de chacun des côtés du triangle. En particulier, ce point d'intersection ce trouve à égal distance des segments AC et BC, et donc ce trouve sur la bissectrice de l'angle ACB. Les trois bissectrices se rencontre donc en un seul point. La justification qu'il s'agit du centre du cercle inscrit est laissé en exercice.

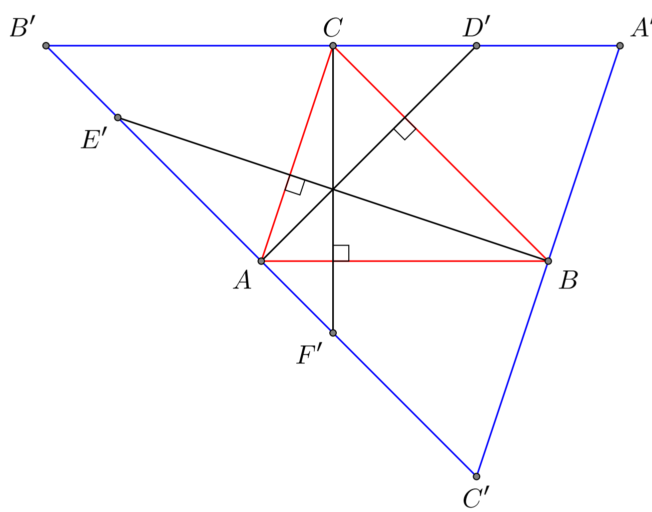


□

Théorème 2.3.8. Les trois hauteurs d'un triangle se rencontre dans un seul point que l'on appelle orthocentre du triangle.

Démonstration.

1. Prenons un triangle quelconque ABC, et pour chacun des côtés du triangle, on dessine une parallèle passant par le sommet opposé, ce qui nous permet d'obtenir un triangle A'B'C' comme sur la figure ci-contre.
2. Comme les segments AB et A'B' sont parallèles, nous obtenons que $\angle CAB \cong \angle B'CA$ par alterne-interne.
3. Comme les segments AB et A'B' sont parallèles, nous obtenons que $\angle CBA \cong \angle A'CB$ par alterne-interne. De plus, comme les segments BC et B'C' sont aussi parallèles, nous obtenons que $\angle A'CB \cong CB'A$ car il s'agit d'angle correspondant, ce qui nous permet d'affirmer que $\angle CBA \cong \angle CB'A$.



4. Comme les segments BC et B'C' sont parallèles, nous obtenons que $\angle ACB \cong \angle CAB'$ par alterne-interne.
5. En combinant les trois congruences que nous venons d'établie, ainsi que le fait que le segment AC est un côté commun aux triangles ABC et AB"C, on peut donc affirmer que ces deux triangles sont congruent par ACA.
6. En continuant de la même façon, on obtient que les triangles ABC, AB'C, A'BC, ABC' sont tous congruent et que les points A, B et C correspondent au point milieux des segment B'C', A'C' et A'B' respectivement.
7. Il est maintenant facile de voir que les hauteurs du triangle ABC sont en fait les médiatrices du triangle A'B'C'. Comme nous avons déjà démontré que les trois médiatrices d'un triangle ce rencontre en un seul point, on peut donc affirmer que les trois hauteurs d'un triangle ce rencontre aussi en un seul point.

□

2.4 Constructions avec règle et compas

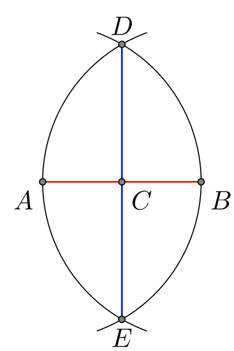
Dans une construction avec règle (non gradué) et compas, seul les 5 opérations suivantes sont permises :

1. Dessinez une droite à partir de deux points.
2. Dessinez un cercle qui passe par un point et pour lequel le centre est aussi un point connu.
3. Trouver le point d'intersection entre deux droites.
4. Trouver les points d'intersections entre une droite et un cercle.
5. Trouver les points d'intersections entre deux cercles.

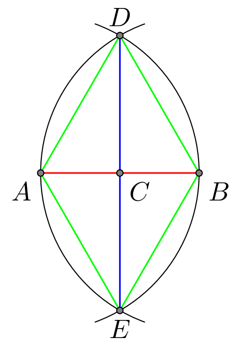
Construction 2.4.1. Dessinez la médiatrice d'un segment

La méthode :

1. Dessiner un arc de cercle centré au point A et de rayon AB
2. Dessiner un arc de cercle centré au point B et de rayon BA
3. Relier les points d'intersection des deux arcs de cercles
4. Le point d'intersection du segment AB et de la droite dessiner à l'étape 3 est le point milieu du segment AB.



La démonstration :



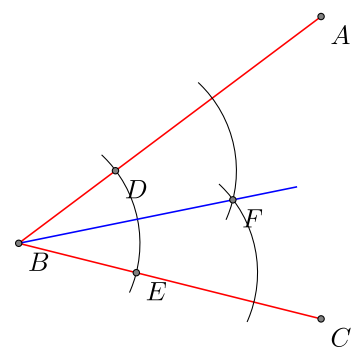
1. Les segments AD, AE, BD et BE sont tous congrus, car ils sont tous des rayons de cercles de rayon AB
2. Les triangles ADE et BDE sont congrus par CCC
3. Les triangles ABD et ABE sont aussi congrus par CCC
4. En utilisant les parties 2 et 3, ont peut maintenant déduire que les triangles ACD, BCD, ACE et BCE sont congrus, mais cette fois par ACA.
5. Les segments AC et CB sont donc congrus. Le point C est donc le milieu du segment AB.

Remarquez que la construction précédente nous permet en fait de faire beaucoup plus que juste dessiner la médiatrice d'un segment. Elle nous permet aussi de trouver le point milieu d'un segment, de dessiner des angles de $30^o, 60^o$ et 90^o, ainsi que de dessiner un triangle équilatéral. Il vous est laissé en exercice de déterminer pourquoi.

Construction 2.4.2. Dessinez la bissectrice d'un angle

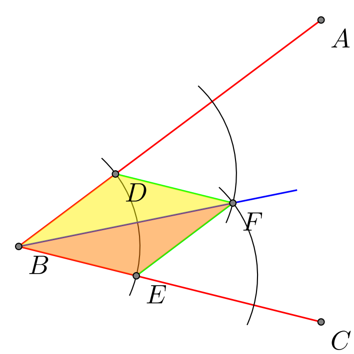
La méthode :

1. Dessiner un arc de cercle centré au point B. Le rayon du cercle n'a pas d'importance
2. Dessiner des arc de cercles de même rayon centré aux point D et E. Le point d'intersection de ces deux arcs est dénoté par F
3. Dessiner la droite BF. Cette droite coupe l'angle ABC en deux angles congrus.



La démonstration :

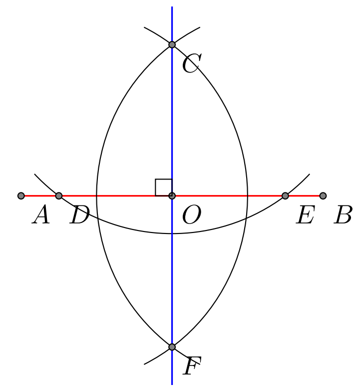
1. Par construction les segments BD et BE sont congrus ainsi que les segments DF et EF.
2. Les triangles BDF et BEF sont donc congrus par CCC
3. Comme les triangles sont congrus, les angles DBF et FBE sont donc congrus.



Construction 2.4.3. Dessinez une droite perpendiculaire à une droite donné et qui passe par un point.

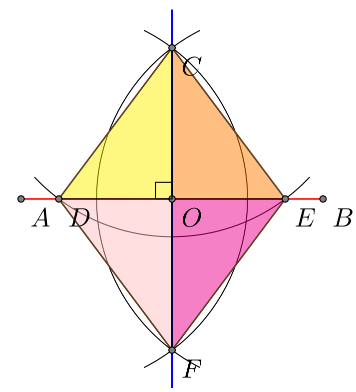
La méthode :

1. Dessinez un cercle de centre C et de rayon suffisamment grand pour couper le segment AB en 2 points. On dénote ces deux points d'intersection par D et E.
2. Dessinez un cercle centré en D et de même rayon qu'à l'étape 1.
3. Dessinez un cercle centré en E et de même rayon qu'à l'étape 1. On dénote le point d'intersection de ce cercle avec celui de l'étape 2 par la lettre F.
4. Dessinez le segment CF. Ce segment est perpendiculaire au segment AB et passe par le point C.



La démonstration :

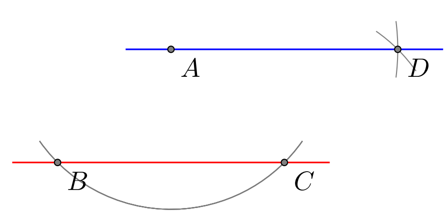
1. Par construction, les segments CD et CE sont congrus. Le triangle CDE est donc isocèle. Les angles CDE et CED sont donc congrus
2. Par construction, les segments CD et DF sont congrus. Le triangle CDF est donc isocèle. Les angles DCF et CFD sont donc congrus.
3. De la même manière qu'à l'étape 2, on peut montrer que les angles FCE et EFC sont congrus
4. Par ACA, les triangles CDO et CEO sont congrus. Les angles DOC et COE sont donc congrus
5. Comme les angles DOC et COE sont congrus, et qu'ensemble ils forment un angle plat (i.e. un angle de 180 degré), ils doivent donc être égal à 90 degré. La droite CF est donc perpendiculaire à AB.



Construction 2.4.4. Dessinez une droite parallèle à une droite donné et qui passe par un point

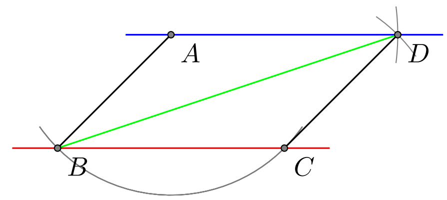
La méthode :

1. Dessinez un cercle centré en A et de rayon suffisamment grand pour couper la droite en exactement 2 points. On nomme ces point B et C.
2. Dessinez un cercle de même rayon qu'à l'étape 1, mais cette fois centré en C.
3. Dessinez un cercle centré en A, et de rayon de même grandeur que le segment BC.
4. On nomme le point d'intersection des cercles de l'étape 2 et 3 par la lettre D. La droite passant par A et D est parallèle à la droite de départ et passe par le point A.

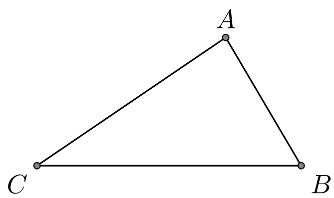


La démonstration :

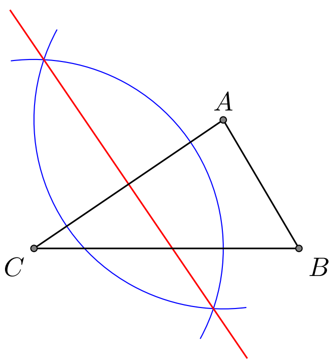
1. Par construction, les segements AD et BC sont congrus, et les segments AB et CD sont congrus.
2. Les triangles ABD et BCD sont donc congrus par CCC, on peut donc conclure que l'angle DBC et ADB sont congrus
3. Comme la somme des angles d'un triangle est 180 degré, on peut donc en déduire que l'angle CBD plus l'angle DBA plus l'angle BAD est égal à 180 degré. Les droites BC et AD sont donc parallèle.



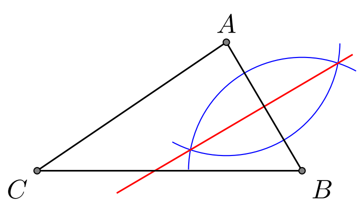
Construction 2.4.5. Dessinez le cercle circonscrit d'un triangle



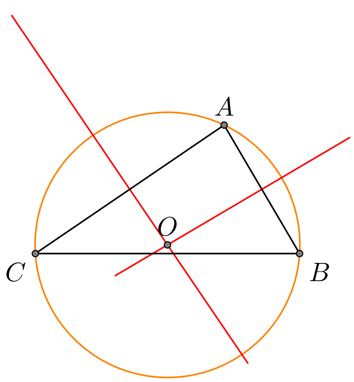
On veut dessiner le cercle circonscrit du triangle ABC ci contre en utilisant uniquement un compas et une règle non gradué



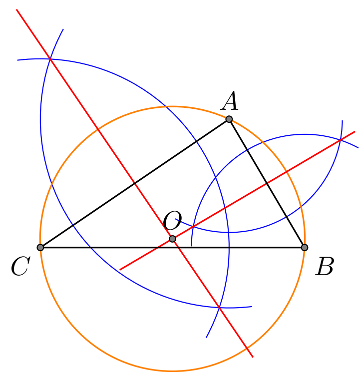
Étape 1 : Utilisez la construction qui permet de couper un segment en deux pour dessiner la médiatrice du segment AC



Étape 2 : Utilisez la construction qui permet de couper un segment en deux pour dessiner la médiatrice du segment AB

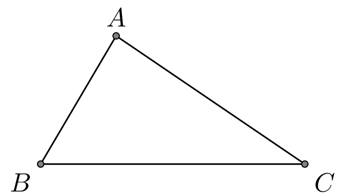


Étape 3 : Dessinez un cercle centré au point d'intersection des droites trouvé dans les étapes 1 et 2, et qui passe par un des sommets du triangle. Ce cercle devrait normalement passer par les deux autres sommets aussi.

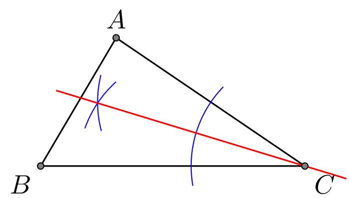


Ci contre, une figure illustrant toutes les lignes nécessaire pour la construction sur un même graphique.

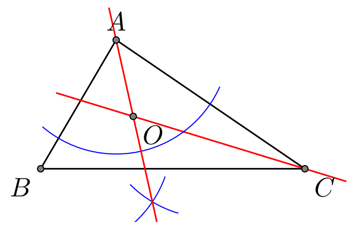
Construction 2.4.6. Dessinez le cercle inscrit d'un triangle



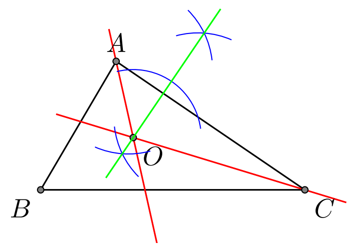
On veut dessiner le cercle inscrit du triangle ABC ci contre en utilisant uniquement un compas et une règle non gradué



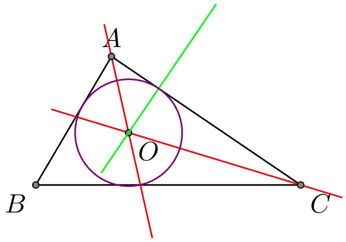
Étape 1 : Utilisez la construction qui permet de couper un angle en deux pour dessiner la bissectrice de l'angle ACB



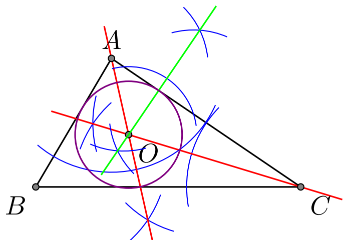
Étape 2 : Utilisez la construction qui permet de couper un angle en deux pour dessiner la bissectrice de l'angle BAC



Étape 3 : Utilisez la construction qui permet de trouver une droite perpendiculaire au segment AC et qui passe par le point d'intersection des droites trouvé au étape 1 et 2.



Étape 4 : Dessinez un cercle centré au point d'intersection des droites trouvé aux étapes 1 et 2, et qui passe par le point d'intersection de la droite trouvé à l'étape 3 et du segment AC. Ce cercle devrait être le cercle inscrit du triangle.



Ci contre, une figure illustrant toutes les lignes nécessaire pour la construction sur un même graphique.

2.5 Opérations arithmétiques avec règle et compas

Construction 2.5.1. Si deux segments sont donnés, alors il est possible :

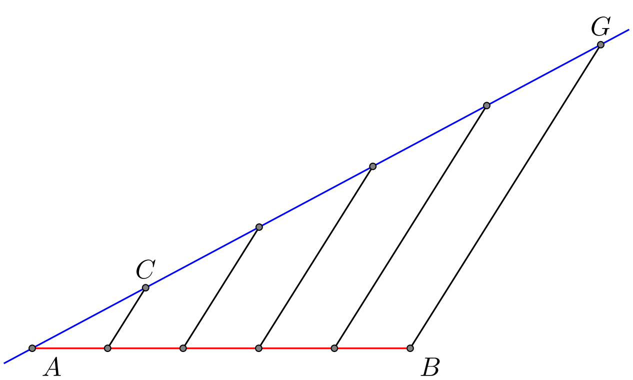
1. De trouver un segment pour lequel sa longueur correspond à la somme des longueurs des deux segments donnés.
2. De trouver un segment pour lequel sa longueur correspond à la différence des longueurs des deux segments donnés.

De plus, si un segment est donné, il est possible de trouver un segment n fois plus long que le segment donné. Notez qu'ici n représente un entier positif.

Cette partie est facile et est laissé en exercice.

Construction 2.5.2. Diviser un segment en n parties congrus.

Prenons un segment AB de longueur quelconque, et choisissons un point C qui ne se trouve pas sur la droite contenant AB. On dessine un droite passant par AC. À l'aide du compas, on reproduit la longueur de AC à n reprise, de sorte qu'on obtienne n segment de longueur AC consécutif. Nommons l'extrémité de ce dernier segment par la lettre G. On dessine ensuite le segment BG, puis on fait des parallèles à BG passant par chacun des points de la droite AC que nous avons déjà dessiné. Ces droites divise le segment AB en n segment congrus.



La justification de cette construction est particulièment simple. Elle vient du fait que chacun des triangles que nous avons obtenus sont semblables, et donc les côtés sont proportionnels.

Construction 2.5.3. Si un segment de longueur 1 est donné, nous pouvons faire les deux constructions suivantes :

1. Trouver un segment de longueur égal au produit des longueurs de deux segments donnés.
2. Trouver un segment de longueur égal au quotient des longueurs de deux segments donnés.

Les deux constructions reposent sur la même construction. L'idée est de construire un triangle AEC, contenant un segment DB parallèle au côté EC. Les triangles ACE et ABD sont donc semblables. En conséquence la longueur des côtés sont donc proportionnel, ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Comme $AE = AD + DE$ et $AC = AB + BC$, on obtient donc :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AB + BC}{AD + DE}$$

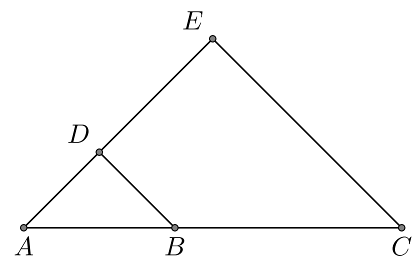
Ce qui nous donne en réarrangent les termes :

$$AB(AD + DE) = AD(AB + BC)$$

$$AB \cdot AD + AB \cdot DE = AD \cdot AB + AD \cdot BC$$

$$AB \cdot DE = AD \cdot BC$$

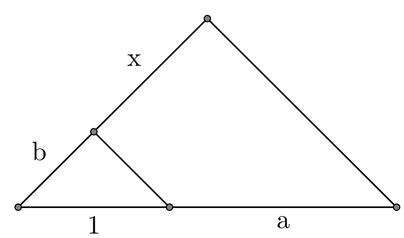
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$



Donc dépendant de quel façon nous plaçons le segment de longueur 1 et les deux autres segments, il devient alors possible d'effectuer facilement des multiplications et divisions.

Pour effectuer des multiplications, considérons la figure ci-contre. Il devient alors facile de remarquer que

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad x = a \cdot b$$

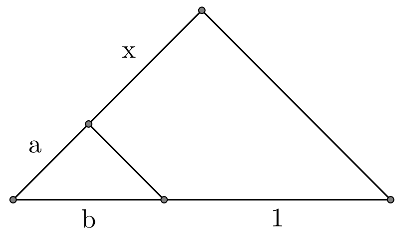


Donc si le a et le b représente les deux segments donnés, le segment représenté par la lettre x représentera donc un segment de longueur égal au produit.

Pour effectuer les divisions, considérons le schéma ci-contre. Dans ce cas, il est facile de voir que :

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad b \cdot x = 1 \cdot a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{b}$$

Donc si le a et le b représente les deux segments donnés, le segment représenté par la lettre x représentera donc un segment de longueur égal au quotient $\frac{a}{b}$.



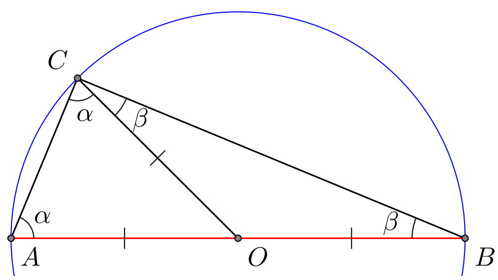
Théorème 2.5.1. Si AB est le diamètre d'un cercle, et C un point quelconque du cercle différent de A et B, alors l'angle ACB est un angle droit (i.e. 90^o).

Démonstration.

Premièrement, remarquons que les triangles AOC et BOC sont tous deux isocèles, car dans chaque cas deux de leur côtés sont le rayon du cercle, ce qui signifie que $\angle OAC \cong \angle OCA$ et $\angle OBC \cong \angle OCB$. Dénotons respectivement la valeur de ces angles par α et β. Maintenant, comme la somme des angles internes d'un triangle est toujours 180^o, on obtient donc par le triangle ABC :

$$2\alpha + 2\beta = 180 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90$$

L'angle ACB est donc un angle droit.



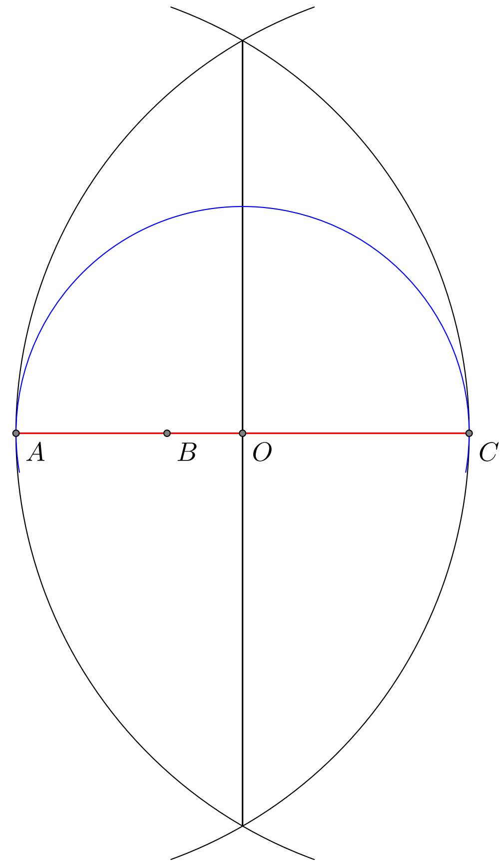
□

Construction 2.5.4. Si un segment de longueur 1 est donné. Trouver un segment de longueur égal à la racine carré de la longueur d'un segment donné.

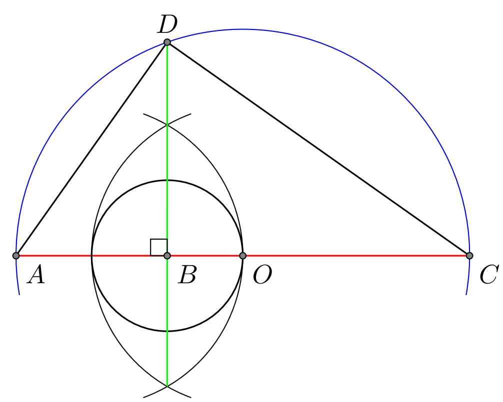
La méthode :

Étape 1 : On commence par placer le segment AB de longueur 1, et le segment BC pour lequel on veut calculer la racine, sur une ligne droite.

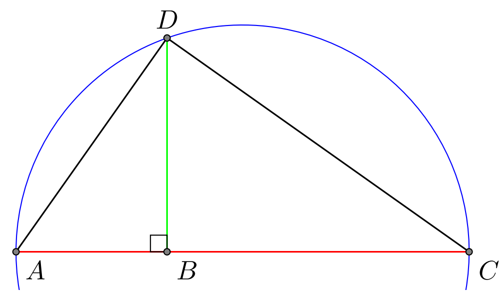
Étape 2 : On trouve le centre du segment AC, que l'on dénote par la lettre O, puis on dessine un cercle centré en O en passant par A et C.



Étape 3 : On dessine maintenant un droite perpendiculaire à AC et qui passe par le point B. On dénote le point d'intersection de cette droite avec le cercle que nous avons trouvé à l'étape précédente par la lettre D.



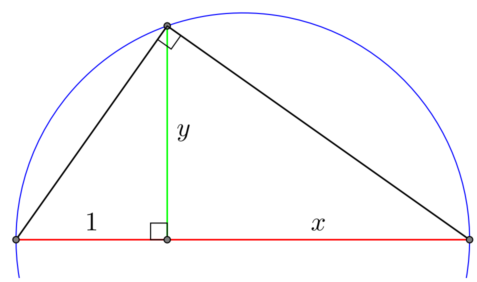
Étape 4 : La longueur du segment BD est la racine carré de la longueur du segment BC.



Démonstration :

Il s'agit essentiellement d'une application du théorème précédent. Comme le segment AC est le diamètre du cercle, on peut affirmer que l'angle ADC est un angle droit. Il devient alors facile de voir que les trois triangles sur la figure sont semblable par AA, ce qui nous permet d'en déduire les relations suivantes :

$$\frac{1}{y} = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{x}$$



Construction 2.5.5. Trouver un segment de longueur égal à la racine carré du produit de deux segments donnés.

Cette partie est laissé en exercice. Notez cependant qu'il s'agit essentiellement de la même méthode que pour la construction précédente.

2.6 Aire d'un triangle

Dans cette section, nous somme intéressé à calculer l'aire d'un triangle, ce qui nous permettra de démontrer la célèbre formule

$$\text{Aire} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$$

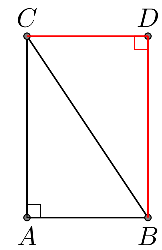
Pour ce faire, nous prenons pour acquis que l'aire d'un rectangle est donné par le produit de la longueur de sa base par sa hauteur, ce qui est en fait une façon de définir la notion d'aire. Pour calculer l'aire d'un triangle, l'idée est de commencer par étudier l'aire d'un triangle rectangle, puis ensuite en divisant un triangle plus complexe en triangle rectangle. Nous regarderons ensuite une propriété curieuse de l'aire de triangles obtenu en découpant un triangle selon ses médianes. Avant de commencer, nous devons cependant donner la définition d'un triangle rectangle.

Definition 2.6.1. Un **triangle rectangle** est un triangle ayant un angle droit, c'est à dire un angle de 90^o.

Théorème 2.6.1. L'aire d'un triangle est donné par la formule base fois hauteur divisé par 2.

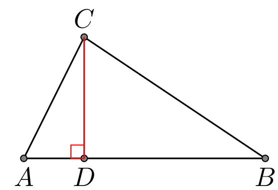
Démonstration. Nous allons faire la démonstration en trois parties.

Pour calculer l'aire d'un triangle rectangle ABC, il suffit de dessiner une droite perpendiculaire à AB et passant par B, ainsi qu'un droite perpendiculaire à AC et passant par C. Ces deux droites se croisent en un point que l'on dénote D. Maintenant, on remarque que les triangles ABC et BDC sont congruent par ACA, et que les angles ACD et ABD sont droit. La figure ABDC est donc un rectangle et son aire est le double de celle du triangle ABC. On peut donc conclure que l'aire du triangle ABC est $Aire = \dfrac{AB \cdot AC}{2}$.



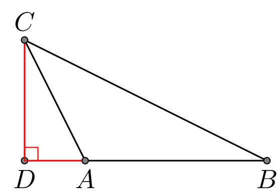
Supposons maintenant que ABC est un triangle pour lequel la hauteur issue de C se trouve à l'intérieur du triangle. Dans ce cas, la hauteur CD divise le triangle en deux triangles rectangles pour lequel on sait déjà calculer l'aire. On obtient donc :

$$Aire = \frac{AD \cdot DC}{2} + \frac{DB \cdot DC}{2} = \frac{(AD + DB) \cdot DC}{2} = \frac{AB \cdot DC}{2}$$



Supposons maintenant que ABC est un triangle pour lequel la hauteur issue de C se trouve à l'extérieur du triangle. Dans ce cas, l'idée est semblable à la partie précédente. On commence par calculer l'aire du triangle DBC et on soustrait l'aire du triangle DAC, ce qui nous donne :

$$Aire = \frac{DB \cdot DC}{2} - \frac{DA \cdot DC}{2} = \frac{(DB - DA) \cdot DC}{2} = \frac{AB \cdot DC}{2}$$

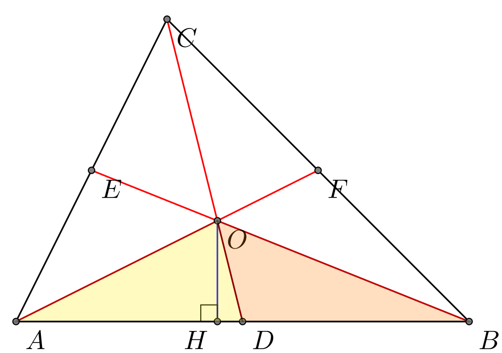


□

Théorème 2.6.2. Dans tous triangle, les médianes divisent le triangle en 6 petits triangles ayant la même aire.

Démonstration.

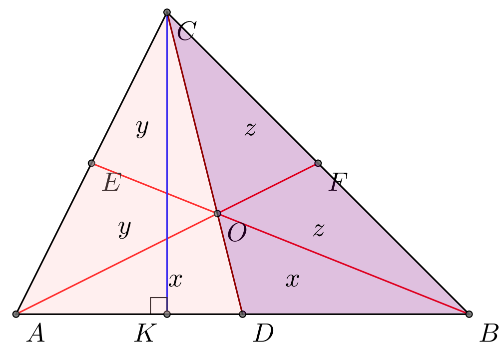
Premièrement, remarquons que les triangles ADO et BDO on eu une hauteur OH, comme par définition de la médianes les segments AD et DB sont de même longueur, on en déduit que les deux triangles ont la même aire. En appliquant la même méthode, on en déduit que les triangles AOE et EOC, ainsi que les triangles BOF et FOC ont aussi la même aire.



Si on considère les triangles ADC et DBC, on remarque qu'eux aussi on la même hauteur, et que la longeur de leur base est aussi identique. On peut donc en conclure qu'ils ont aussi la même aire. Maintenant, si on suppose que l'aire des triangles ADO et DBO est x, l'aire des triangles AOE et EOC est y, et l'aire des triangles BOF et FOC est z, on obtient que l'aire du triangle ADC est $x + 2y$ et l'aire du triangle DBC est $x + 2z$. Comme ces deux valeurs sont égales, on obtient :

$$x + 2y = x + 2z \quad \Rightarrow \quad y = z$$

De la même façon en considérant les triangle EBC et EBA, on obtient $x = z$. On peut donc conclure que l'aire de chacun des 6 petits triangles est la même.



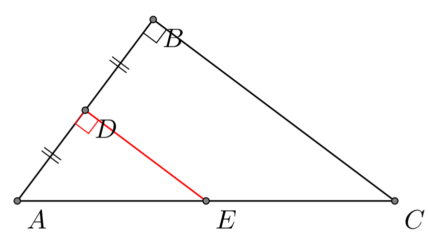
□

2.7 Triangles rectangles

Théorème 2.7.1. Dans un triangle rectangle, les médiatrices se rencontre au milieu de l'hypoténuse.

Démonstration.

Prenons un triangle rectangle ABC et supposons que ABC est l'angle droit. Supposons que D est le point milieu du segment AB, et dessinons la médiatrice de ce segment. On dénote le point d'intersection de cette médiatrice avec le côté AC par la lettre E.



Remarquons que les triangles ADE et ABC sont semblable car ils ont deux angles congrus. Comme le segment AD est la moitié de la longueur de AB, alors le rapport de proportionnalité est 2 :1. La longueur du segment AE doit donc être la moitié du segment AC. En particulier, ceci signifie que le point E est au milieu du segment AC, et doit donc être sur la médiatrice du segment AC.
On note donc que la médiatrice du segment AB et celle du segment AC se rencontre au point E. Comme toute les médiatrices ce rencontre au même point, le point d'intersection des trois médiatrices est donc le point E, situé au milieu de l'hypoténuse.

□

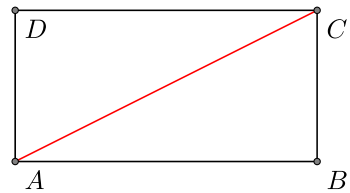
Definition 2.7.1. On dit que polygone est inscriptible dans un cercle, s'il existe un cercle sur lequel se trouve tous les sommets du polygones.

Remarquez que nous avons déjà démontré que tous les triangles sont inscriptible dans un cercle. En effet, dans ce cas le cercle en question n'est rien d'autre que le cercle circonscrit du triangle.

Corollaire 2.7.1. Tous les rectangles sont inscriptible dans un cercle centré au point d'intersection des diagonales.

Démonstration.

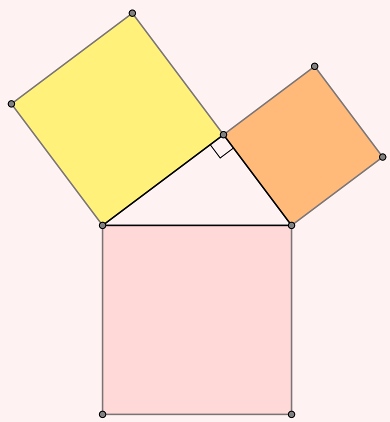
Prenons un rectangle ABCD, et dessinons la diagonale AC. Cette dernière divise le rectangle en deux triangles rectangles. Il est facile de voir par CCC qu'il s'agit de deux triangles congrus ayant un hypoténuse commune. Par le théorème précédent, le centre du cercle circonscrit du triangle ACD est au milieu du segment AC, et ce dernier forme un diamètre du cercle.



De plus le centre du cercle circonscrit du triangle ABC ce trouve aussi au milieu du segment AC et le centre ce trouve aussi au milieu du segment AC. On peut donc conclure que les 4 sommet ce trouve sur le même cercle.

□

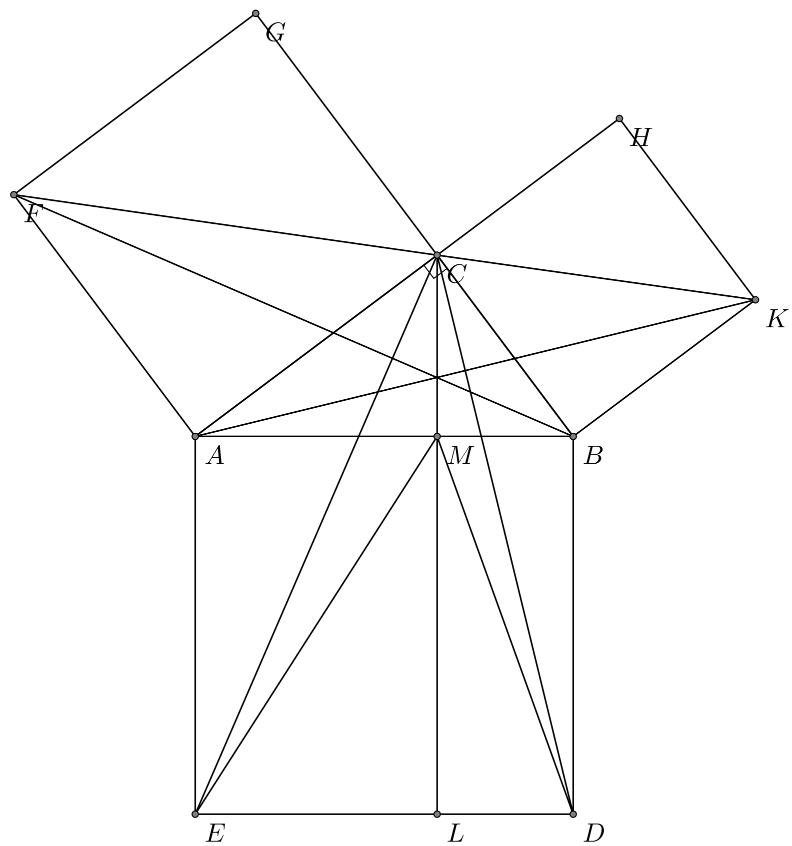
Théorème 2.7.2. **(Le théorème de Pythagore)** Dans un triangle rectangle, l'aire du carré ayant pour côté l'hypothénuse du triangle est égal à la somme de l'aire des carrés formés à partir des deux autres côtés.



Il existe de très nombreuses démonstrations de ce théorème. Certain site sur internet donne plus de 100 démonstrations du théorème. La preuve que nous allons présenter ici est celle donné par Euclide dans Les Éléments [1]. D'autre démonstrations vous seront présenter en laboratoire.

Démonstration.

1. Premièrement, il est facile de voir que l'aire du triangle AFC est la moitié de l'aire du carré AFGC.
2. Ensuite, remarquons que la hauteur du triangle AFB associé au côté AF est congru au segment AC. On a donc que l'aire du triangle AFC est égale à l'aire du triangle AFB.
3. Les triangles AFB et ACE sont tous deux congrus par CAC. Ils ont donc la même aire.
4. La hauteur du triangle ACE associé au côté AE est congru au segment AM. Les triangles ACE et AME ont donc la même aire.

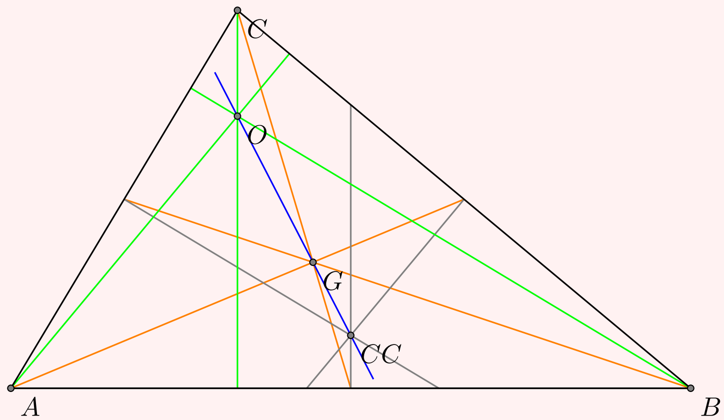


5. L'aire du triangle AME est la moitié de l'aire du rectangle AMLE.
6. En combinant tous les résultats que nous venons d'obtenir, on a donc que l'aire du carré AFGC est la même que l'aire du rectangle AMLE.
7. En appliquant la même technique que nous venons de faire, on obtient que l'aire du carré BCHK est la même que l'aire du rectangle MBLD.
8. En combinant les deux parties précédentes, on peut donc conclure que l'aire du carré ABDE est égale à la somme de l'aire des carrés AFGC et BCHK, ce qui est exactement l'énoncé du théorème de Pythagore.

□

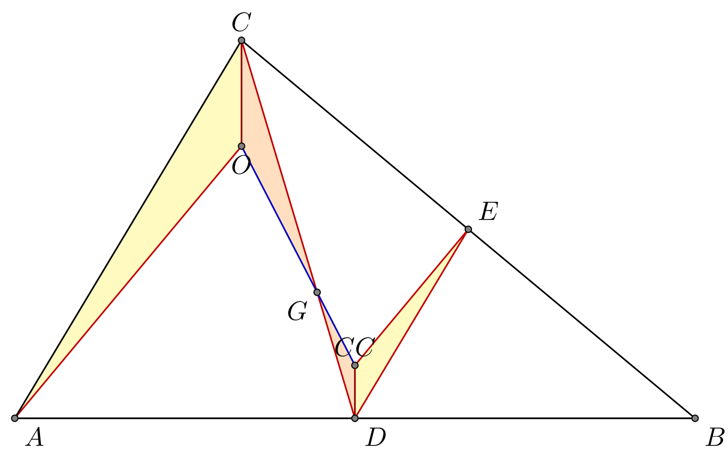
2.8 La droite et cercle d'Euler

Théorème 2.8.1. **(Droite d'Euler)** Dans tous triangles, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont aligné sur une même droite. Lorsque le triangle n'est pas équilatéral, cette droite est bien définie et porte le nom de droite d'Euler.



Démonstration.

Prenons un triangle ABC, et supposons que D et E sont les points milieux des segment AB et BC respectivement. Supposons aussi que O est l'orthocentre du triangle (i.e. l'intersection des hauteurs) et CC est le centre du cercle circonscrit (l'intersection des médiatrices). Ceci signifie que les segments OC et OA se trouve sur des hauteurs du triangle, et que les segment E CC et D CC se trouve sur des médiatrices du triangle. On veut montrer que le point G qui se trouve à l'intersection du segment O CC et de la médiane CD est en fait le centre de gravité du triangle, ce qui complètera la démonstration.



Remarquons premièrement que les segments AC et DE sont parallèle, ainsi que les segments CO et C CC, et les segment AO et DE. Ceci nous permet donc d'affirmer que les triangle AOC et CE CC sont semblable par AA. De plus, nous avons déjà démontré que le segment DE est la moitié de la longueur de segment AC, ce qui signifie que les deux triangles sont proportionnel dans un rapport 2 :1.

Maintenant, remarquons que les côtés des triangles COG et DG CC sont aussi parallèle, donc les triangles sont aussi semblable par AA. De plus, comme le segment D CC est la moitié de la longueur du segment OC, alors on peut affirmer que le rapport de proportionnalité est aussi 2 :1. En particulier, ceci signifie que le segment CC G est la moitié de la longueur du segment GC.

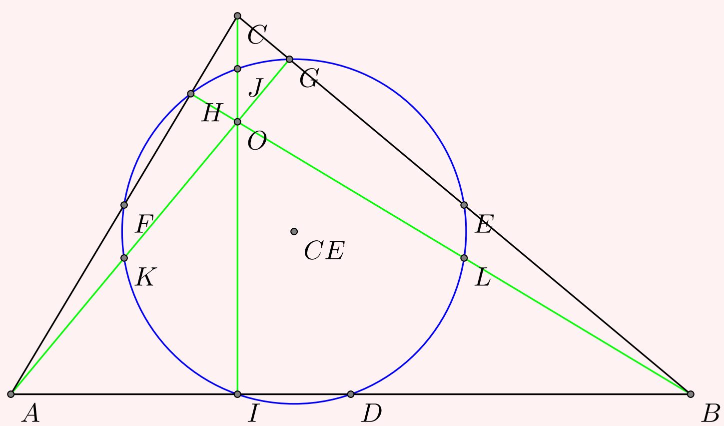
Finalement, comme le segment CD représente l'une des médianes du triangle, et que le point G le découpe dans un rapport 2 :1, nous savons par le théorème sur l'intersection des médianes qu'il s'agit en fait du point d'intersection des médianes, i.e. le centre de gravité. On peut donc affirmer que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont tous aligné sur la même droite. De plus, nous pouvons affirmer qu'ils sont aligné dans un rapport 2 :1.

□

Théorème 2.8.2. **(Cercle des neuf points d'Euler)** Dans tous triangles, il existe un cercle passant par les neuf points suivant :

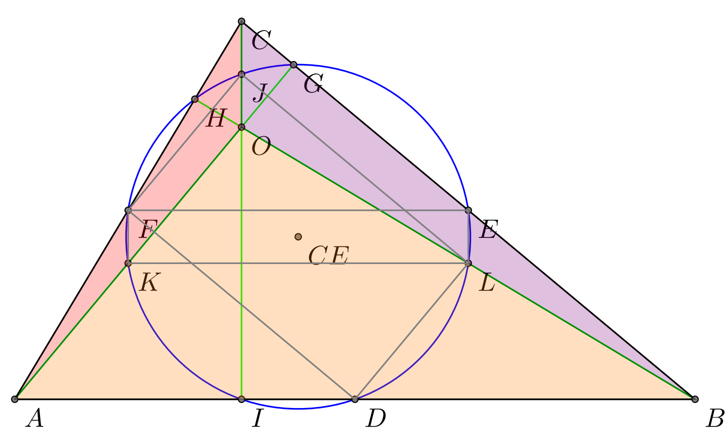
1. Les points milieux des côtés du triangle
2. La base de chacun des hauteurs du triangle
3. Le point milieu de chacun des segments reliant un sommet à l'orthocentre.

De plus, le centre de ce cercle ce trouve sur la droite d'Euler.



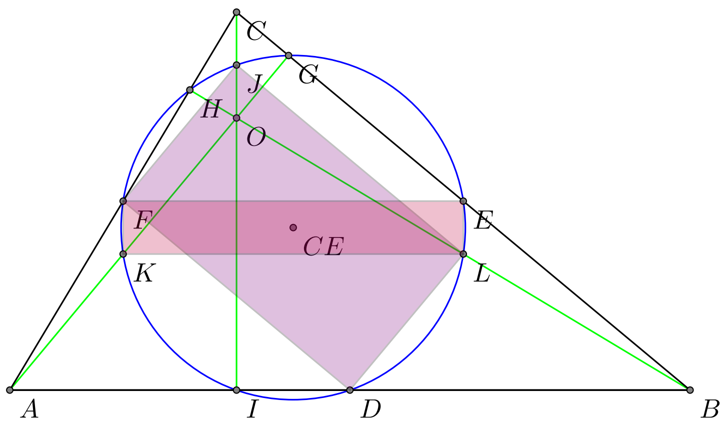
Démonstration.

Étape 1 : Le segment FJ relie le point milieu de 2 des 3 côtés du triangle AOC. Il est donc parallèle au segment AO. Le segment DL pour sa part relie le point milieu de 2 des 3 côtés du triangle AOB, et donc aussi parallèle au segment AO. De plus, le segment AO se trouve sur la hauteur AG du triangle ABC, ce qui signifie qu'il est perpendiculaire au côté BC. On a donc obtenu que les segments FJ et DL sont tous deux perpendiculaires au segment BC.



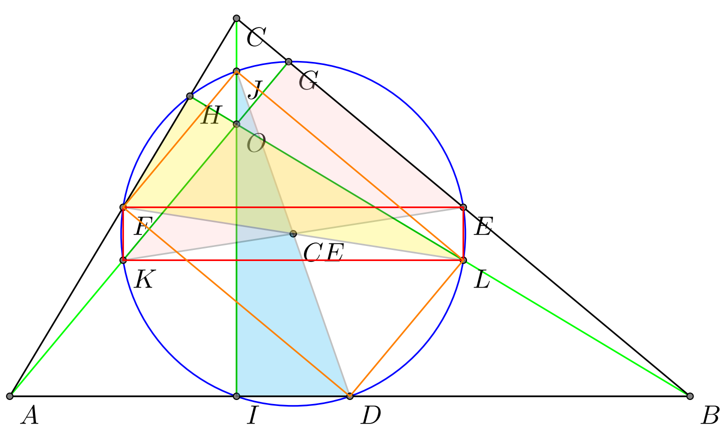
Maintenant, remarquons que le segment JL relie le point milieu de 2 des 3 côtés du triangle OCB, ce qui signifie qu'il est parallèle au côté BC. Ensuite, remarquons que le segment FD relie les points milieux de 2 des 3 côtés du triangle ABC, et donc est parallèle au segment BC.
Le segment FK relie les points milieux de 2 des 3 segments du triangle AOC, et donc est parallèle au segment CO, de même pour le segment EL qui relie les points milieux de 2 des 3 côtés du triangle OCB et donc est aussi parallèle au segment OC. Comme le segment OC se trouve sur la hauteur CI du triangle ABC, les segment FK et EL sont donc tous deux perpendiculaires au segment AB
Ensuite, le segment FE relie les points milieux de 2 des 3 côtés du triangle ABC et donc est parallèle au segment AB, et le segment KL relie les points milieux de 2 des 3 côtés du triangle AOB, et donc est aussi parallèle au segment AB.

Étape 2 : Basé sur la première étape, on remarque que le quadrilatère FKLE est formé de 4 angles droits, il s'agit donc d'un rectangle. Les points F,K,L et E se trouve donc sur un même cercle ayant pour centre le point milieu des segments FL et EK.



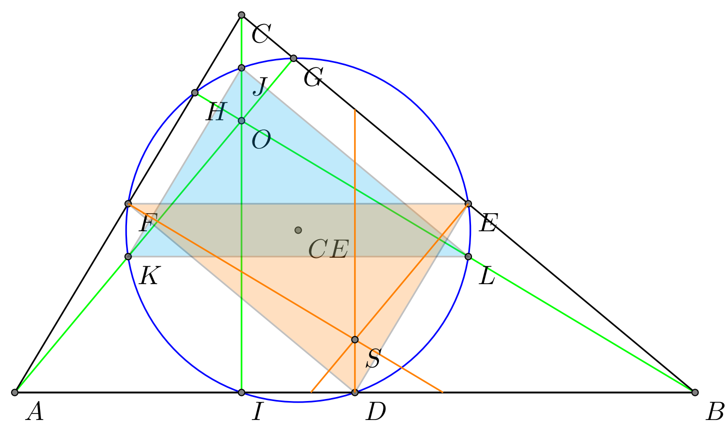
Aussi, à partir de la première étape on remarque que le quadrilatère FJLD est formé de 4 angles droits. Il s'agit donc aussi d'un rectangle. Les points F,J,L et D se trouve donc sur un même cercle centré au milieu des segments JD et FL.
Comme le segment FL est le diamètre de chacun des deux cercles que nous venons d'obtenir, on remarque donc qu'il s'agit en fait du même cercle. On peut donc affirmer que les 6 points F,J,E,L,D et K sont sur le même cercle.

Étape 3 : Considérons le triangle FHL. Comme il est rectangle, le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de son hypoténuse, c'est à dire au milieu du segment FL. Il doit donc s'agit du même cercle que nous avons trouvé à l'étape 2. En particulier, le point H ce trouve sur ce cercle.

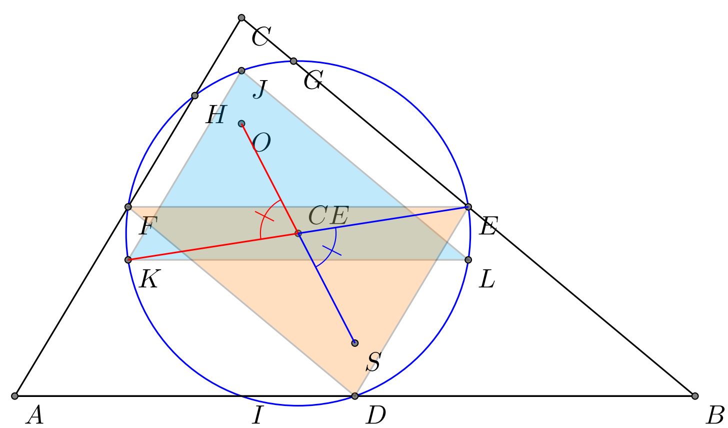


Ensuite, considérons le triangle KGE. Comme il est rectangle, le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de son hypoténuse, c'est à dire au milieu du segment KE. Il doit donc s'agit encore une fois du même cercle que nous avons trouvé à l'étape 2. En particulier, le point G ce trouve sur ce cercle.
Finalement, considérons le triangle JID. Comme il est rectangle, le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de son hypoténuse, c'est à dire au milieu du segment JD. Il doit donc s'agit encore une fois du même cercle que nous avons trouvé à l'étape 2. En particulier, le point I ce trouve sur ce cercle.

Étape 4 : Nous voulons maintenant démontrer que le centre du cercle d'Euler se trouve sur la droite d'Euler. Pour ce faire, nous allons considérer, les triangles JKL et DEF. En se basant sur ce que nous avons fait précédemment, il est facile de voir que c'est deux triangles sont congrus par CCC. De plus, le point O qui était l'orthocentre du triangle ABC est aussi l'orthocentre du triangle JKL. Ensuite, si on dénote par S le centre du cercle circonscrit du triangle ABC, on remarque qu'il s'agit aussi de l'orthocentre du triangle DEF. En particulier les point S et O sont tous deux sur la droite d'Euler.



Étape 5 : Considérons maintenant les angles K-CE-O et S-CE-E. Ces deux angles sont congrus car relie un sommet, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre des triangles JKL et DEF respectivement. De plus, nous savons que K, CE et E sont trois points alignés sur une même droite d'après l'étape 2. Il doit donc en être de même pour les points O, CE et S. Comme O et S sont sur la droite d'Euler, il en est donc de même pour le centre du cercle d'Euler (CE). De plus, on remarque facilement que le centre du cercle d'Euler se trouve au milieu du segment OS.



Conclusion : On a donc obtenu que les 9 points mentionnés dans le théorème se trouve sur le même cercle, et que le centre de ce cercle se trouve sur la droite d'Euler à égal distance entre l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit.

□

Chapitre 3

Les cercles

3.1 Introduction et définitions

Après les triangles, le cercle est probablement la figure géométrique la plus importante de la géométrie euclidienne. Dans la culture de la Grèce antique, le cercle était vu comme une figure parfaite, symbol de la symétrie divine. Ceci étant du en partie au nombre infinie d'axe de symétrie qu'un cercle possède. Bien que nous allons mettre l'aspect mythologique du cercle de côté, ce chapitre se concentrera sur les différentes propriétés de cette figure remarquable.

Definition 3.1.1. Un cercle est le lieu des points qui se trouve à égal distance d'un point appelé centre du cercle.

Definition 3.1.2. Voici quelques définitions concernant les cercles.

- **Rayon :** Un segment reliant un point du cercle et son centre.
- **Corde :** Un segment reliant deux points d'un cercle.
- **Diamètre :** Une corde de longueur maximale.
- **Arc :** Une portion d'un cercle délimité entre deux points du cercle.
- **Angle au centre :** Si A et B sont des points d'un cercle de centre O, alors on dit que l'angle AOB est un angle au centre.
- **Angle inscrit :** Si A, B et C sont des points d'un cercle, alors on dit que l'angle ABC est un angle inscrit.

La définition d'un cercle est basé sur un point particulièrement important que l'on appelle le centre du cercle. Ce point étant tellement fondamental dans l'étude du cercle que notre première étape dans l'étude de cette figure géométrique sera de regarder comment trouvé le centre d'un cercle donné, en utilisant bien entendu uniquement une règle non gradué et un compas. Cette construction est particulièrement simple, mais permet d'observer des le début du chapitre l'importance des triangles en géométrie euclidienne, même pour l'étude des cercles.

Construction 3.1.1. Trouver le centre d'un cercle donné.

La méthode : Il s'agit de choisir 3 points quelconques sur le cercle. En reliant ces points, on obtient un triangle inscrit dans le cercle. Il faut ensuite trouver le centre du cercle circonscrit du triangle, ce qu'on a appris comment faire dans le chapitre précédent. Le centre du cercle étant le centre du cercle circonscrit du triangle, la construction est terminé.

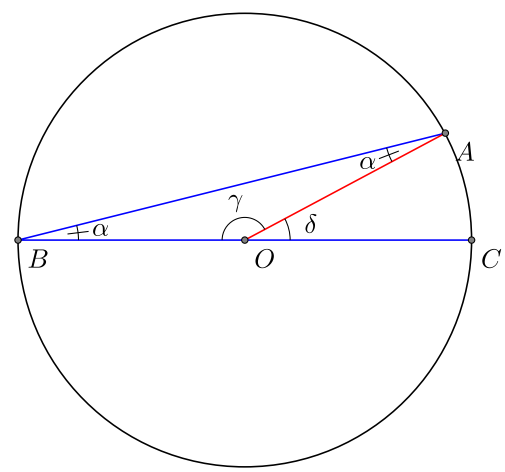
3.2 Angle inscrit

Théorème 3.2.1. **(Théorème des angles inscrits)** Si A, B et C sont trois points sur un cercle de centre O, alors la mesure de l'angle inscrit ABC est la moitié de la mesure de l'angle au centre AOC.

Démonstration. La démonstration se fait en trois partie.

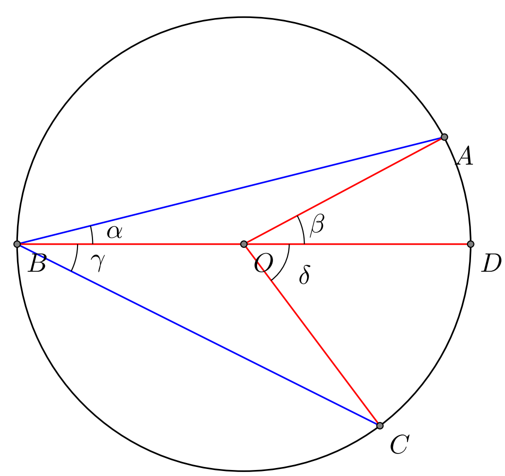
Cas 1 : Supposons premièrement que le segment BC passe par le centre du cercle, c'est à dire que le segment BC est un diamètre du cercle. Comme les segments BO et OA sont tous deux des rayons du cercle, le triangle AOB est isocèle. On obtient donc que les angles ABO et BAO sont congrus. On dénote leur mesure par α. Maintenant, comme la somme des angles d'un triangle est toujours 180 degré on a donc que $2\alpha + \gamma = 180$. De plus, comme les angles AOB et AOC sont supplémentaires, nous avons donc aussi l'équation suivante : $\gamma = 180 - \delta$. En remplaçant cette expression dans notre première équation, on obtient donc :

$$2\alpha + \gamma = 180 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + (180 - \delta) = 180 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = \delta$$



Cas 2 : Supposons maintenant que le centre du cercle O se trouve à l'intérieur de l'angle ABC. Dans ce cas, on trouve le point D de sorte que le segment BD sont un diamètre du cercle. Ceci nous permet donc de découper l'angle ABC en deux nouveaux angles pour lesquels le premier cas s'applique. On obtient donc $2\alpha = \beta$ et $2\gamma = \delta$. En additionnant c'est deux équations, on obtient donc :

$$2(\alpha + \gamma) = \beta + \delta$$



Cas 3 : Supposons que le centre du cercle O se trouve à l'extérieur de l'angle ABC. Cette partie est laissé en exercice.

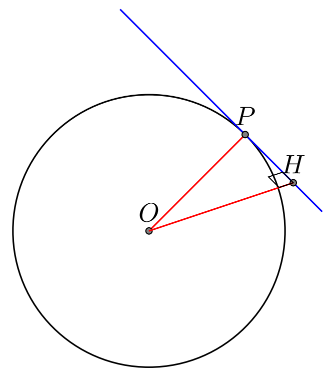
□

3.3 Tangente à un cercle

Théorème 3.3.1. Si P est un point d'un cercle de centre O, alors la tangente au cercle passant par P est perpendiculaire au rayon OP.

Démonstration.

Prenons un cercle de centre O, et dessinons la tangente au cercle passant par P. Dessinons une perpendiculaire à la tangente passant par O, et dénotons le point d'intersection des deux droites par H. Supposons que P et H sont deux points distincts. Par définition de la tangente, il est facile de voir que H est à l'extérieur du cercle, et donc la longueur de OH est strictement plus grande que la longueur de OP. De plus, comme le triangle OPH est rectangle par construction, le théorème de Pythagore (Théorème 2.7.2) implique que l'hypoténuse est le plus grand côté du triangle et donc $OP > OH$. On obtient donc une contradiction. Les point P et H doivent donc être identique, ce qui signifie que le rayon OP est perpendiculaire à la tangente.



□

Théorème 3.3.2. Si AB est une corde d'un cercle de centre O, alors l'angle entre la tangente au point B et la corde AB est égal à la moitié de l'angle AOB.

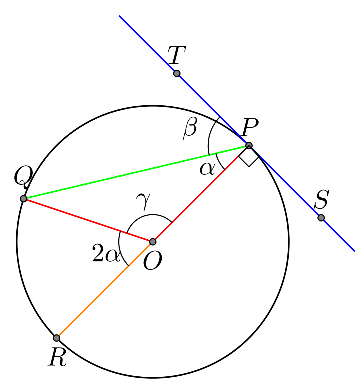
Démonstration.

Par le théorème précédent, nous savont que la tangente TS est perpendiculaire au rayon OP. La droite TS est découper en 3 angles, ce qui nous donne l'équation $\alpha + \beta + 90 = 180$, et donc $\alpha = 90 - \beta$. Comme l'angle QPR est inscrit d'angle α, on a donc que l'angle au centre QOR mesure 2α. Comme le diamètre RQ forme une droite divisé en deux angles, on obtient donc l'équation $2\alpha + \gamma = 180$. En remplaçant le α par l'expression que nous avions trouvé précédement, on a donc :

$$2(90 - \beta) + \gamma = 180$$

$$180 - 2\beta + \gamma = 180$$

$$\gamma = 2\beta$$



□

3.4 Angles extérieurs et angles intérieurs

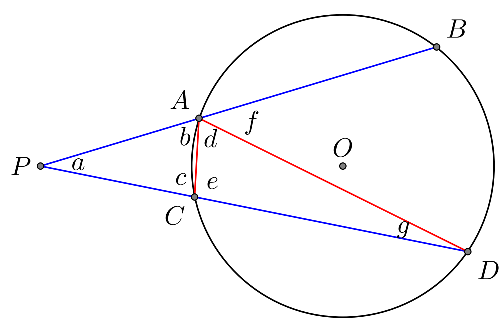
Nous avons déjà vu comment calculer la mesure d'un angle inscrit sur un cercle à partir de l'angle au centre. Dans cette section nous irons un peu plus loin, et relirons la mesure d'un angle se trouvant à l'extérieur du cercle ou à l'intérieur du cercle, avec celle des angles au centre qu'il délimite.

Théorème 3.4.1. Si P est un point extérieur à un cercle de centre O. Supposons que A et B sont des points du cercle de sorte que P, A, B sont aligné, et de même pour C et D qui sont des points du cercle de sorte que P, C, D sont aligné, alors la mesure de l'angle BPD est donné par :

$$\angle BPD = \frac{1}{2}\Big(\angle BOD - \angle AOC\Big)$$

Démonstration.

Premièrement, remarquons que comme PAB est un angle plat, on a donc $b + d + f = 180$ ou de manière équivalente $b = 180 - f - d$. De plus, comme PCD est aussi un angle plat, nous avons $c + e = 180$ ou de manière équivalente $c = 180 - e$. Ensuite, comme la somme des angles internes d'un triangle est toujours 180 degré, nous avons $d + e + g = 180$ ou de manière équivalente $d + e = 180 - g$. De la même manière pour le triangle APC nous avons $a + b + c = 180$. En combinant toute ces équations, nous obtenons donc :



$$a = 180 - b - c = 180 - (180 - f - d) - (180 - e) = -180 + f + d + e = -180 + f + 180 - g = f - g$$

Finalement, en applicant le théorème sur les angles inscrit, nous avons $f = \frac{1}{2}\Big(\angle BOD\Big)$ et $g = \frac{1}{2}\Big(\angle ADC\Big)$, ce qui nous donne :

$$\angle BPD = \frac{1}{2}\Big(\angle BOD - \angle ADC\Big)$$

□

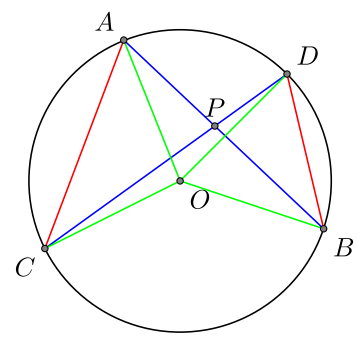
Théorème 3.4.2. Si P est un point intérieur à un cercle de centre O. Supposons que A et B sont des points du cercle de sorte que P, A, B sont aligné, et de même pour C et D qui sont des points du cercle de sorte que P, C, D sont aligné, alors la mesure de l'angle BPD est donné par :

$$\angle BPD = \frac{1}{2}\Big(\angle BOD + \angle AOC\Big)$$

Démonstration.

La démonstration est très semblable à la démonstration du théorème précédent. On a donc :

$$\begin{aligned}
\angle BPD &= 180 - \angle PBD - \angle PDB \\
&= 180 - \frac{1}{2}\angle AOD - \frac{1}{2}\angle COB \\
&= 180 - \frac{1}{2}\Big(\angle AOD + \angle COB\Big) \\
&= 180 - \frac{1}{2}\Big(360 - \angle BOD - \angle AOC\Big) \\
&= 180 - 180 + \frac{1}{2}\angle BOD + \frac{1}{2}\angle AOC \\
&= \frac{1}{2}\Big(\angle BOD + \angle AOC\Big)
\end{aligned}$$



□

3.5 Arc capable

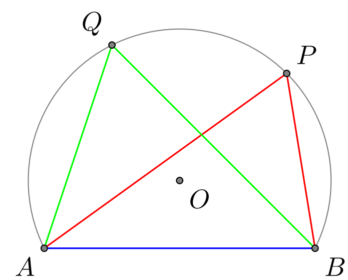
Nous allons maintenant nous intéresser à la réciproque des théorèmes concernant les angles inscrits, extérieurs et intérieurs. Il s'agit d'un problème historique concernant la navigation maritime. Sur un bateau, un marin peut observer deux phares. Sachant qu'il est facile de mesurer l'angle formé entre le premier phare, le bateau et le second phare, que peut-on affirmer sur la position du bateau ?

Théorème 3.5.1. **(Théorème de l'arc capable)** Si A et B sont des points distincts quelconque, et $0 < \alpha < \pi$, alors l'ensemble des points P situé d'un même côté de la droite passant par A et B et pour lesquels la mesure de l'angle APB est α forme un arc de cercle appelé l'arc capable.

Démonstration.

Premièrement, notons que pour tout $\alpha \in (0, \pi)$, il existe au moins un point P qui satisfait la propriété que la mesure de l'angle APB est α. La démonstration de l'existence d'un tel point sera faite dans la construction de l'arc capable immédiatement après, mais vous devriez déjà être en mesure de vous convaincre qu'un tel point doit exister.

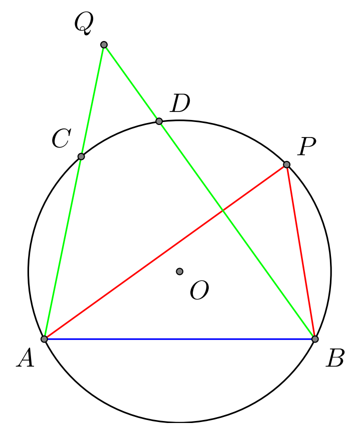
Posons O le centre du cercle circonscrit du triangle APB. Nous voulons premièrement montrer que l'ensemble des points sur l'arc du cercle entre A et B satisfait la propriété. Par le théorème de l'arc inscrit, nous savons que $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$. De plus, si Q est un autre point sur l'arc de cercle, alors nous avons aussi $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AOB$. On a donc que tout les points sur l'arc satisfont la propriété.



Maintenant, il nous faut montrer que si un point Q n'est pas sur l'arc de cercle, alors $\angle AQB \neq \alpha$. Supposons que Q se trouve à l'extérieur du cercle. Par le théorème sur les angles extérieurs nous avons

$$\begin{aligned}\angle AQB &= \frac{1}{2}\Big(\angle AOB - \angle COD\Big) = \frac{1}{2}\angle AOB - \frac{1}{2}\angle COD \\ &< \frac{1}{2}\angle AOB = \angle APB = \alpha\end{aligned}$$

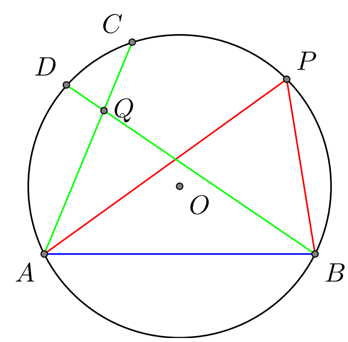
En particulier la mesure de l'angle est strictement plus petite que α et donc ne satisfait par la propriété.



Maintenant, supposons que le point Q se trouve à l'intérieur du cercle. Cette fois en utilisant le théorème sur les angles intérieurs on obtient :

$$\begin{aligned}\angle AQB &= \frac{1}{2}\Big(\angle AOB + \angle COD\Big) = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle COD \\ &> \frac{1}{2}\angle AOB = \angle APB = \alpha\end{aligned}$$

Donc cette fois l'angle est strictement plus grand que α, et ne respecte donc pas non plus la propriété.



□

Remarque : Si on enlève la restriction que les points doivent tous être du même côté de la droite, on obtient alors deux arcs de cercle.

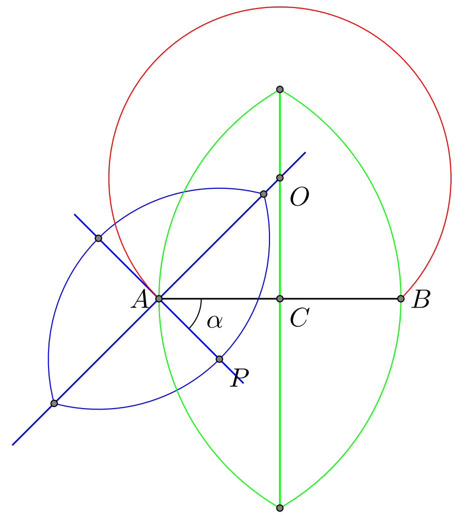
Nous avons vu dans le théorème précédent que si un segment AB nous est donné, alors l'ensemble des points P se trouvant d'un même côté du segment, et pour lesquels l'angle APB est constant forme un arc que nous avons appelé l'arc capable. Nous somme maintenant intéressé à savoir comment peut-on trouver l'arc capable d'un segment, lorsqu'un angle α nous est donné.

Construction 3.5.1. Dessiner l'arc capable d'angle α pour un segment AB donné.

Démonstration.

La méthode :

1. Reproduire l'angle α de sorte que son sommet soit en A. On obtient donc un point P de sorte que la mesure de l'angle PAB soit α.
2. Construire la médiatrice du segment AB
3. Construire une perpendiculaire au segment AP passant par le point A.
4. Dessiner un arc de cercle centré à l'intersection O des droites obtenus aux étapes 2 et 3, et passant par les points A et B. Il s'agit de l'arc capable cherché.



La démonstration :

1. Comme l'angle OAP est droit, et l'angle CAP mesure α, alors l'angle OAC doit mesurer $90 - \alpha$.
2. La somme des angles internes d'un triangle étant toujours 180 degré, l'angle AOC doit donc mesurer α.
3. Comme la droite CO est la médiatrice du segment AB, il est alors facile de remarquer que l'angle AOB mesure 2α.
4. Par le théorème sur les angles inscrits, on obtient donc que pour tout point Q sur l'arc de cercle en rouge on aura que la mesure de l'angle AQB sera de α.

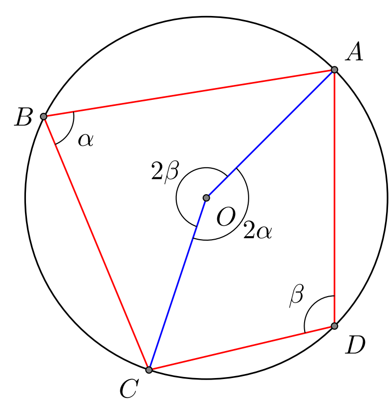
□

3.6 Quadrilatère inscriptible

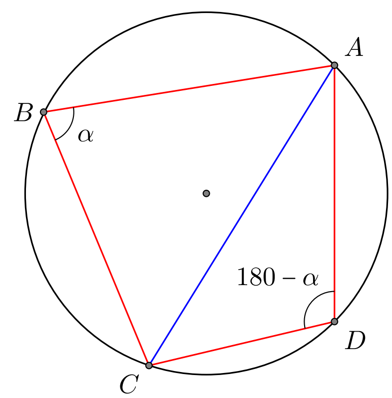
Théorème 3.6.1. **(Théorème des quadrilatères convexe inscriptibles)** Un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si les angles opposé sont supplémentaires.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Considérons des points A, B, C, D dans cet ordre sur un cercle de centre O. On a donc que les angles ABC et ADC sont tous deux inscrits. Si on suppose que leur mesure sont respectivement α et β, leur angle au centre correspondant auront comme mesure 2α et 2β respectivement. Comme les deux angles au centre forme ensemble un tour de cercle complet, on a donc $2\alpha + 2\beta = 360$, ce qui nous donne en simplifiant $\alpha + \beta = 180$. Les angles ABC et ADC sont donc supplémentaire. De la même façon, on peut aussi obtenir que les deux autres angles du quadrilatère sont aussi supplémentaires.



(⇐) Pour l'autre direction, supposons que $ABCD$ est un quadrilatère convexe pour lequel les angles opposés sont supplémantaires. Supposons que E est un point quelconque sur le cercle circonscrit du triangle ABC. D'après le théorème sur les angles inscrits (Théorème 3.2.1), dépendant de quel côté du segment AC se trouve le point E, on a soit $\angle AFC = \angle ABC$ ou $\angle AFC = 180 - \angle ABC$. En particulier, il existe au moins un point F sur le cercle circonscrit du triangle ABC pour lequel $\angle AFC = 180 - \angle ABC$. Maintenant, si on considère l'ensemble des points du plan pour lesquels $\angle AFC = 180 - \angle ABC$ et qui se trouve du côté opposé au point B par rapport à la droite AC forme un arc de cercle d'après le théorème de l'arc capable (Théorème 3.5.1). Comme cet arc de cercle contient les points A, F, C font partie de cet arc de cercle, ainsi que du cercle circonscrit du triangle ABC, l'arc capable doit donc faire partie du cercle circonscrit du triangle ABC. Finalement, comme $\angle ADC = 180 - \angle ABC$, le point D fait partie de cet arc capable, et donc du cercle circonscrit du triangle ABC. Les points A, B, C et D sont donc tous sur un même cercle, ce qui signifie que le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible.

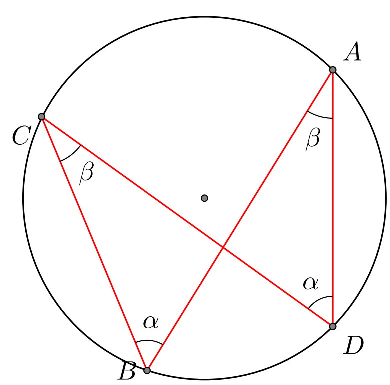


□

Théorème 3.6.2. **(Théorème des quadrilatères croisés inscriptibles)** Un quadrilatère croisé $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si les angles opposé sont crongrus.

Démonstration.

(⇒) Supposons que le quadrilatère $ABCD$ est croisé et inscriptible, alors par le théorème des angles inscrits (Théorème 3.2.1), les angles CBA et CDA sont congrus. Il en est de même pour les angles BCD et BAD.



(⇐) Il s'agit d'une application du théorème des arcs capables (Théorème 3.5.1). Les détails vous sont laissés en exercice.

□

3.7 Aire et circonférence d'un cercle

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les formules familières pour le calcul de la circonférence d'un cercle et de l'aire d'un disque. Nous avons cependant un problème. Rien de ce que nous avons fait jusqu'à présent ne nous permet de calculer exactement la circonférence d'un cercle. Ceci est dû au fait que nous n'avons aucune définition du nombre π.

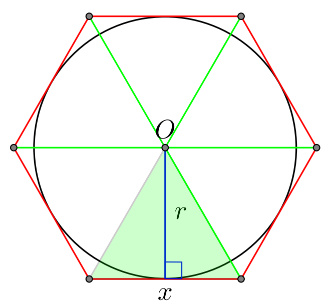
Definition 3.7.1. La circonférence C d'un cercle de rayon r est définit comme étant $C = 2\pi r$, où π est une constante.

Notez que la définition précédente est en fait une définition du nombre π. Nous allons maintenant utiliser cette définition pour établie la formule pour calculer l'aire d'un disque.

Théorème 3.7.1. **(Aire d'un disque)** L'aire A d'un disque de rayon r est donné par la formule suivante :

$$A = \pi r^2$$

Démonstration.



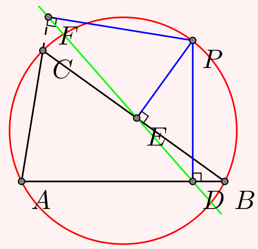
L'idée est de relier l'aire d'un disque avec la circonférence du cercle. Pour ce faire, nous allons inscrire le cercle dans un polygone régulier à n côtés. En posant la longueur d'un de ces côtés par x, il est facile de voir que le périmètre du polygone est $P_n = nx$. Maintenant, notons qu'un polygone régulier à n côtés peut être découpé en n triangles isocèles congrus. Si r est la mesure du rayon du cercle, alors r est aussi la hauteur d'un des triangles. On obtient donc que l'aire de chacun des triangles est $\frac{rx}{2}$, et donc l'aire du polygone est $A_n = \frac{nrx}{2}$. Maintenant, remarquons que $\frac{A_n}{P_n} = \frac{nrx/2}{nx} = \frac{r}{2}$, et donc ce rapport est constant et ne dépend pas du nombre de côté du polygone. En remarquant qu'un augmentant le nombre de côté du polygone, ce dernier s'approche de plus en plus du cercle. On obtient donc que le rapport entre l'aire A du disque et la circonférence C du cercle est donné par $\frac{A}{C} = \frac{r}{2}$. Par notre définition, nous savons que $C = 2\pi r$, ce qui nous permet finalement d'obtenir :

$$A = \frac{r}{2}C = \frac{r}{2} \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

□

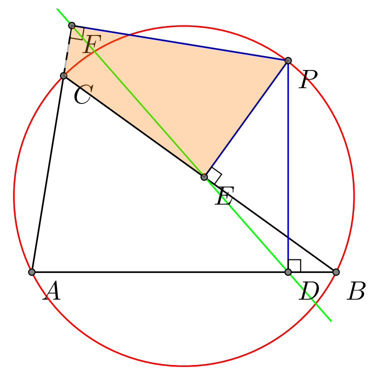
3.8 Droite de Simson

Théorème 3.8.1. **(Droite de Simson)** Un point P se trouve sur le cercle circonscrit d'un triangle ABC si et seulement si la projection orthogonale de P sur chacun des côtés du triangle nous donne trois points qui se trouve sur une même droite.

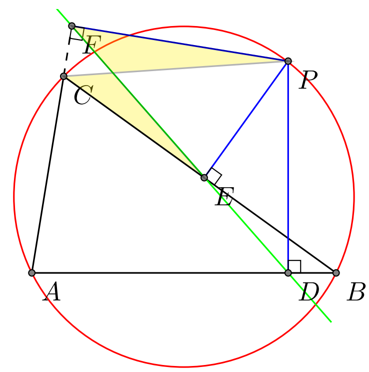


Démonstration.
($\Rightarrow$) Supposons que P est un point sur le cercle circonscrit du triangle ABC.

Étape 1 : Par définition de la projection orthogonale, nous savons que les angles $\angle PFC$ et $\angle PEC$ sont tout deux des angles droits. On a donc d'après le théorème des quadrilatères inscriptibles (Théorème 3.6.1 ou 3.6.2) que le quadrilatère $PFCE$ peut être inscrit dans un cercle.

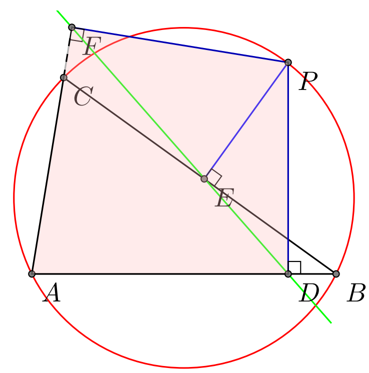


Étape 2 : Par la première étape, nous savons que les points P, F, C et E se trouve tous sont un même cercle. Le quadrilatère croisé $PCEF$ est donc inscriptible. Par le théorème des quadrilatères croisés inscriptibles (Théorème 3.6.2), on a donc : $\angle CEF = \angle CPF$.



Étape 3 : Comme les angles $\angle PFA$ et $\angle PDA$ sont tous deux des angles droits par définition de la projection orthogonale, alors le quadrilatère $PFAD$ est inscriptible. On doit donc avoir $\angle FPD + \angle FAD = 180$. Ceci signifie que

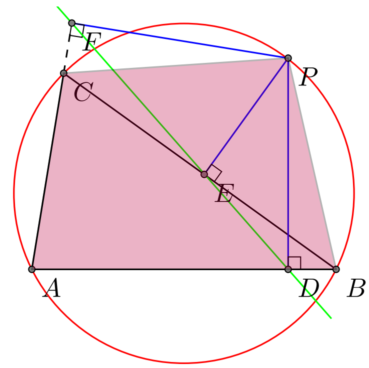
$$\angle FPC + \angle CPE + \angle EPD + \angle FAD = 180$$



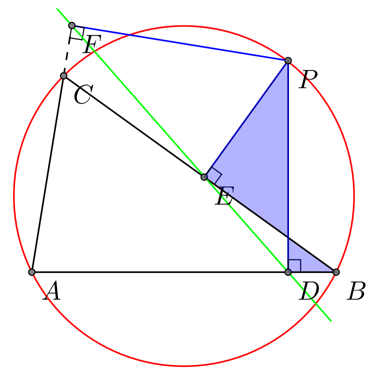
Étape 4 : Comme le point P est par hypothèse sur le cercle circonscrit du triangle ABC, les points A, B, C et P sont donc tous sur un même cercle. Le quadrilatère $CPBA$ est un donc inscriptible, ce qui nous donne $\angle CPB + \angle CAB = 180$. Ceci nous permet d'obtenir

$$\angle CPE + \angle EPD + \angle DPB + \angle CAB = 180$$

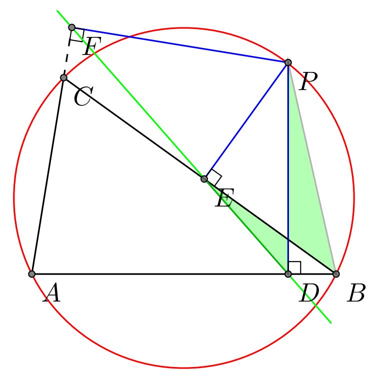
En remarquant que $\angle FAD = \angle CAB$, l'équation que nous venons d'obtenir en combinaison avec l'équation de l'étape précédente nous permet d'affirmer que $\angle FPC = \angle DPB$.



Étape 5 : Comme les angles $\angle PEB$ et $\angle PDB$ sont tous les deux droits, on peut affirmer que le quadrilatère $PDBE$ est inscriptible. Les points P, B, D et E sont donc tous sur un même cercle.



Étape 6 : Comme les points P, B, D et E sont tous sur un même cercle par l'étape précédente, on peut donc affirmer que le quadrilatère $PDEB$ est inscriptible. Ceci nous permet donc d'obtenir $\angle DPB = \angle DEB$. Finalement, en combinant ce que nous venons d'obtenir avec nos résultats des étapes 2 et 4, on obtient donc $\angle CEF = \angle CPF = \angle DPB = \angle DEB$. Les points F, E et D sont donc alignés.



($\Leftarrow$) Supposons que la projection du point P sur chacun des côtés du triangle ABC nous donne 3 points qui sont aligné. Dans ce cas on veut démontrer que le point P fait partie du cercle circonscrit du triangle ABC. L'idée de la démonstration est très semblable à ce que nous venons de faire. Ce sont essentiellement l'ordre des étapes qui est différent. Cette partie vous est laissé en exercice.

$\square$

3.9 Les polygones réguliers

Definition 3.9.1. Un polygone régulier à n côtés est une figure géométrique formé de n cotés congrus et n angles congrus

Le nom de polygone est formé à partir des racines grecques. Il existe cependant deux exceptions notables à cette règle. Un polygone régulier à 3 côtés s'appelle triangle équilatéral, et un polygone régulier à 4 côtés s'appelle un carré. Voici un tableau donnant le nom des polygones réguliers d'au plus 12 côtés :

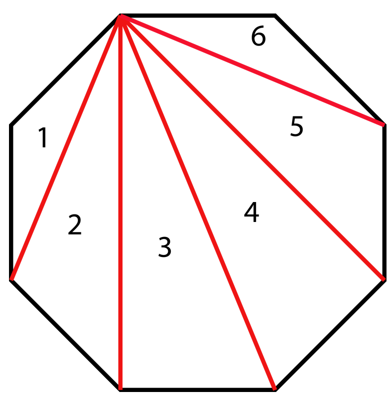
Nombre de côté	Nom du polygone
3	Triangle équilatéral
4	Carré
5	Pentagone régulier
6	Hexagone régulier
7	Heptagone régulier
8	Octogone régulier
9	Ennéagone régulier
10	Décagone régulier
11	Hendécagone régulier
12	Dodécagone régulier

Attention : Dans le langage courant, le terme nonagone est fréquemment rencontré pour représenter un polygone ayant 9 côtés. Cependant, ce terme est techniquement incorrect et ne sera pas accepté dans ce cours. Le terme nonagone vient d'une erreur d'une confusion entre les préfixes grecques et latin. Le préfixe nona- est le préfixe pour 9 en latin, alors que la règle pour nommé les polygones utilise les préfixes grecque.

On a déjà vu que la somme des angles internes d'un triangle est toujours 180 degrés. Nous allons maintenant généraliser ce résultat au polygone à n côtés (pas nécessairement régulier).

Théorème 3.9.1. Dans un polygone convexe à n côtés, la somme des angles internes est donné par la formule $180(n-2)$. De plus, si le polygone est régulier, alors chaque angle interne mesure $\dfrac{180(n-2)}{n}$.

Démonstration. Pour simplifier les choses, nous allons commencer par traiter le cas d'un octogone. On choisi un sommet quelconque et on dessine des segments vers tout les sommets opposés (i.e. ceux qui ne lui sont pas adjacent). Ceci nous permet donc de diviser l'octogone en 6 triangles. Maintenant, remarquons que tous les angles de ces triangles se trouve directement sur l'octogone. La somme des angles internes de l'octogone est donc la somme des angles internes des 6 triangles, ce qui nous donne $6 \times 180 = 1080$ degré.



De façon générale, si on a un polygone ayant n côtés, en choisissant un sommet et en procèdent comme pour l'octogone, nous allons obtenir $n-2$ triangles. La somme des angles internes du polygone sera donc $180(n-2)$. Finalement, comme dans un polygone régulier tout les angles sont congrus, pour obtenir leur mesure il suffit de diviser cette formule par le nombre de côté n. ☐

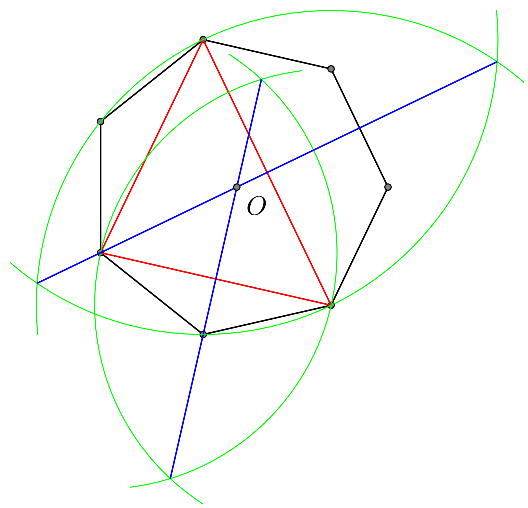
Théorème 3.9.2. Tous les polygones réguliers peuvent être inscrit dans un cercle. Cependant, ce n'est pas tous ces polygones qui peuvent être dessiné avec règle et compas

Construction 3.9.1. Trouver le cercle circonscrit d'une polygone régulier.

La méthode : Il suffit de choisir trois sommets quelconques du polygone régulier et de les relier de façon à former un triangle inscrit dans le polygone. Le cercle circonscrit du polygone régulier est alors identique au cercle circonscrit du triangle.

Exemple 3.9.1. Trouver le cercle circonscrit de l'heptagone régulier ci contre.

1. On dessine un triangle inscrit dans l'heptagone en choisissant trois sommets quelconques.
2. On dessine 2 médiatrices du triangle. Le point d'intersection est le centre du cercle du cercle circonscrit de l'heptagone.
3. On dessine un cercle centré au point trouvé à l'étape 2 et qui passe par l'un des sommets.



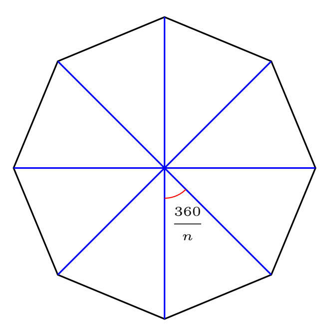
Attention : Comme nous l'avons déjà vu dans le cas des quadrilatère, ce n'est pas tout les polygones qui sont inscriptible dans un cercle.

La question est maintenant de savoir comment faire pour dessiner un polygone régulier. Premièrement, notons que nous savons déjà comment dessiner un triangle équilatéral. Pour les autres polygones réguliers, remarquons que dessiner un polygone régulier à n côtés est équivalent à dessiner un angle de $\frac{360}{n}$ degrés, ce qui représente la mesure de l'angle au centre comme sur la figure ci-dessous.

Lorsque nous savons dessiner un angle de $\frac{360}{n}$ degré, on peut dessiner un polygone régulier à n côtés en suivant les étapes suivantes :

1. On commence par trouver les angles au centre en calculant 360 divisé par n, ou n est le nombre de cotés du polygone. On doit dessiner un angle ayant ce nombre de coté.
2. On dessine un cercle centré au centre de l'angle dessiné précédemment. Ceci nous donne le premier coté du polygone
3. On trouve ensuite les autres cotés du polygone

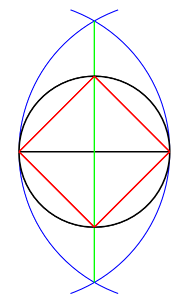
Il ne s'agit cependant pas toujours de la méthode la plus simple. Comme nous savons déjà comment dessiner des angles de 90^o, 60^o, 45^o et 30^o, la méthode nous permet donc de dessiner un carré, un hexagone régulier, un octogone régulier et un dodécagone régulier.



Construction 3.9.2. Faites les constructions suivantes à l'aide d'une règle non gradué et d'un compas.

1. Dessiner un triangle équilatéral.
2. Dessiner un carré.
3. Dessiner un hexagone régulier.
4. Dessiner un octogone régulier.
5. Dessiner un dodécagone régulier.

Nous allons traiter seulement le cas du carré. les autres sont laissé en exercices.



La méthode : Un carré a 4 cotés, donc l'angle au centre est 360 / 4 = 90 degré. La construction repose donc sur la construction d'un angle droit.

1. On commence avec un segment AB (Droite mauve)
2. On trouve une droite perpendiculaire (droite verte)
3. On dessine un cercle centré au point d'intersection
4. On dessine les cotés du carré (En rouge)

Notez qu'il est aussi possible de construire un pentagone régulier et un décagone régulier. La technique que nous venons de voir s'applique dans les deux cas, mais la difficulté vient du fait que nous ne somme toujours pas en mesure de construire un angle de 36 et 72 degré. Avant la fin du chapitre, nous allons voir comment effectuer ces deux constructions.

3.10 Puissance d'un point

Definition 3.10.1. Si Γ est un cercle de centre O et de rayon r, et M un point quelconque du plan, alors on définit la **puissance du point** M par rapport à Γ comme étant $P_\Gamma(M) = MO^2 - r^2$.

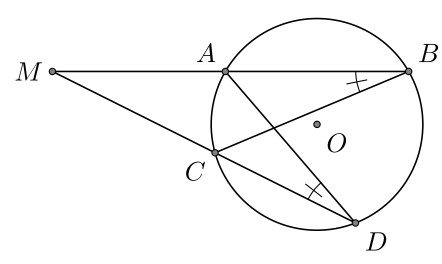
Remarquez que la puissance du point M est positive si M est à l'extérieur du cercle et négative si M est à l'intérieur du cercle. De plus, si M est sur le cercle, alors la puissance est 0.

Théorème 3.10.1. Si M est un point à l'extérieur d'un cercle Γ, et A, B des points du cercle tel que M, A et B sont aligné, alors $MA \cdot MB = P_\Gamma(M)$.

Démonstration.

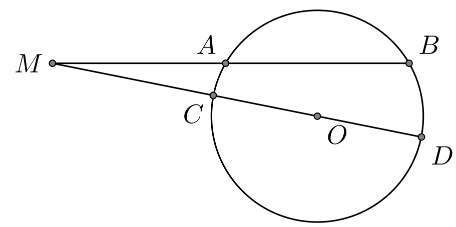
Supposons que M est un point à l'extérieur d'un cercle Γ, et prenons A, B, C, D des points du cercle tel que M, A, B sont aligné et M, C, D sont aligné comme sur la figure ci-contre. On remarque donc que les angles $\angle MBC$ et $\angle ADM$ sont congrus par le théorème des angles inscrits. Ceci nous permet donc d'affirmer que les triangles MBC et MDA sont semblables par AA. Les côtés de ces deux triangles sont donc proportionnel, ce qui nous permet d'obtenir $\dfrac{MB}{MD} = \dfrac{MC}{MA}$. En réarrangeant les termes on obtient donc

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$



Donc peut importe comment les points A, B, C, D sont placé, tant qu'ils sont alignés le produit reste constant. en particulier, si CD est un diamètre du cercle (et donc le segment MD passe par le centre du cercle), alors on obtient $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Si on dénote le rayon du cercle par r, alors il est facile de voir que $MC = MO - r$ et $MD = MO + r$. En combinant ces équations, on obtient :

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = (MO - r)(MO + r) = MO^2 - r^2 = P_\Gamma(M)$$



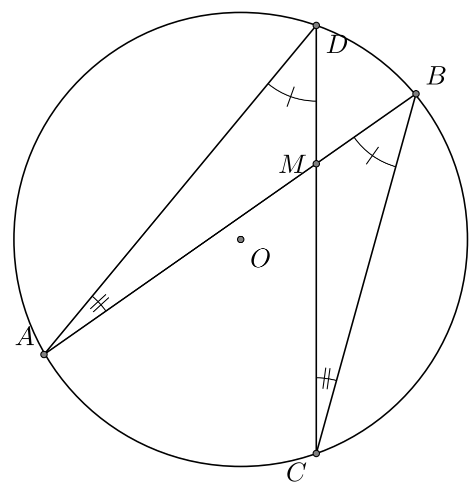
□

Théorème 3.10.2. Si M est un point à l'intérieur d'un cercle Γ, et A, B des points du cercle tel que A, M et B sont aligné, alors $MA \cdot MB = -P_\Gamma(M)$.

Démonstration.

L'idée est très semblable à la démonstration du théorème précédent. Supposons que M est à l'intérieur du cercle, et que A, B, C, D sont 4 points comme sur la figure ci-contre. Par le théorème de l'angle inscrit, on a $\angle ADC \cong \angle ABC$ et $\angle DAB \cong DCB$. On obtient donc que les triangles ADM et BCM sont semblables. Comme les côtés sont proportionnels, on obtient donc l'égalité :

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$



Maintenant, si on suppose que r est le rayon du cercle et si on place les points de sorte que CD soit un diamètre du cercle, alors on obtient :

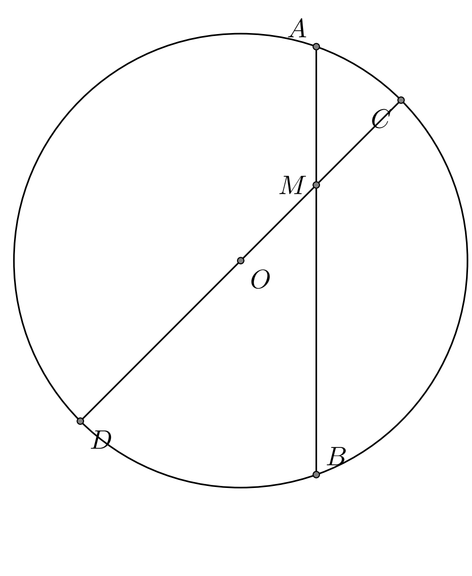
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

De la figure, il est facile de voir que

$$MC = r - MO \text{ et } MD = r + MO,$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$MA \cdot MB = (r - MO) \cdot (r + MO) = r^2 - MO^2 = -P_\Gamma(M)$$

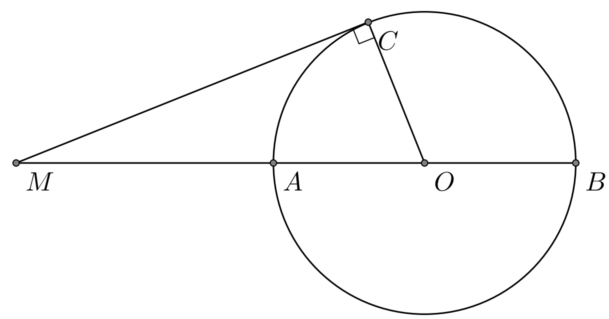


□

Théorème 3.10.3. Si M est un point à l'extérieur d'un cercle Γ, et A un point du cercle, alors la droite MA est tangente au cercle si et seulement si $P_\Gamma(M) = MA^2$.

Démonstration.

Supposons premièrement que MC est une droite tangente au cercle, et supposons que A et B sont les points d'intersection de la droite MO avec le cercle. Comme le droite MC est tangente au cercle, alors l'angle $\angle MCO$ est un angle droit. Par le théorème de Pythagore (Théorème 2.7.2) on a donc $MO^2 = MC^2 + CO^2$. En posant r comme étant le rayon du cercle, on obtient donc : $MC^2 = MO^2 - r^2 = P_\Gamma(M)$.



Pour l'autre direction, il suffit de remarquer que si C n'est pas le point de tangence, alors la droite MC doit croiser le cercle en un second point D. Dans ce cas, nous avons $MO^2 - r^2 = MC \cdot MD \neq MC \cdot MC = MC^2$.

□

Construction 3.10.1. Si Γ est un cercle, et P un point à l'extérieur du cercle. Trouver tous les points Q tel que la droite PQ est tangente au cercle Γ.

3.11 Construction du pentagone régulier

Nous voulons maintenant nous attaquer à la construction du pentagone régulier. Ce dernier est considérablement plus difficile que les autres polygones que nous avons rencontré jusqu'à présent. Il s'agit d'ailleurs de l'une des constructions les plus difficiles que nous aurons l'occasion de rencontrer dans le cours. Cette construction est l'un des plus grand exploit des mathématiciens de l'antiquité.

Avec cette construction, nous serons en mesure de construire à l'aide d'une règle non gradué et d'un compas tous les polygones que les grecques de l'antiquité étaient en mesure de construire. Il faudra attendre Gauss en 1796 avec sa construction de l'heptadécagone (17 côtés) pour qu'on découvre la construction d'un nouveau polygone. Gauss a été l'un des plus grand mathématicien de l'histoire et d'innombrable théorème important porte son nom. Pourtant ce résultat était si important pour lui, qu'il demanda qu'un heptagécagone régulier soit gravé sur son tombeau.

Pour la construction du pentagone régulier, nous allons procéder en deux étapes. L'idée est de construire un triangle isocèle pour lequel les deux angles congrus mesure le double du troisième angle. Remarquez que si α est la mesure de l'un des deux angles congrus, alors en utilisant le fait que la somme des angles internes d'un triangle est 180 degré, on obtient :

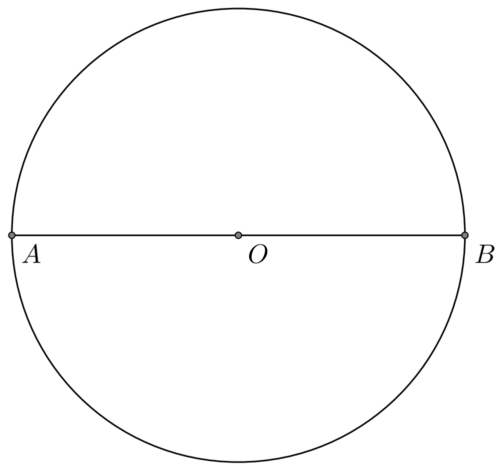
$$\alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 180 \quad \Rightarrow \quad \frac{5\alpha}{2} = 180 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 72$$

Ce qui correspondant à l'angle nécessaire pour construire un pentagone régulier. Donc si on sait dessiner un tel triangle, alors on sait comment dessiner un pentagone régulier.

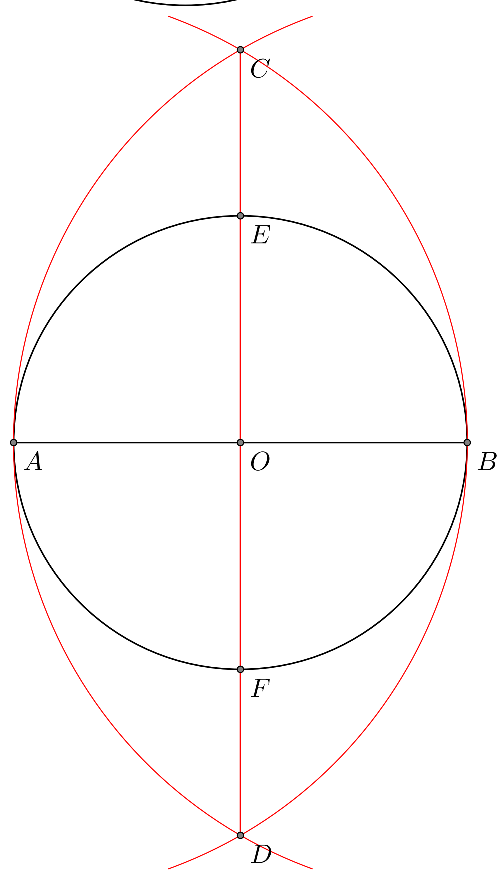
Construction 3.11.1. Dessiner un pentagone régulier.

La construction :

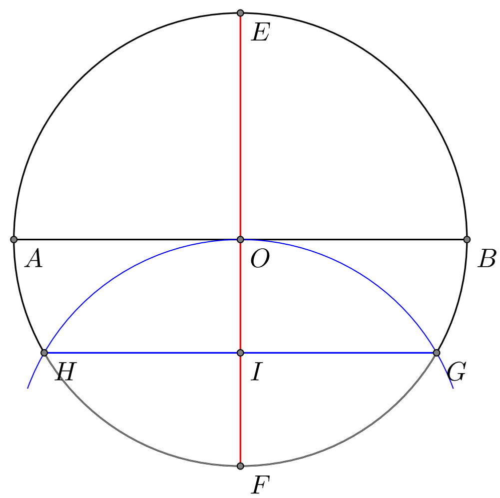
Étape 1 : On commence par dessiner un cercle de centre O, et on dessine un diamètre quelconque du cercle. Les extrémités du diamètre sont dénoté par les lettres A et B



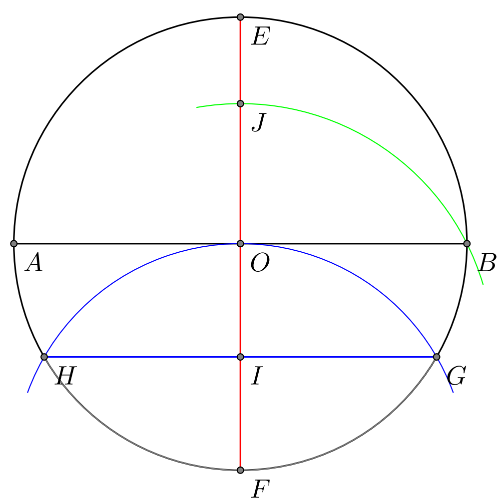
Étape 2 : Dessiner un arc de cercle centré en A et de rayon AB, puis dessiner un arc de cercle centré en B et de rayon AB. On dénote les points d'intersection de ces deux arcs par les lettres C et D. On dessine ensuite le segment CD, ce qui nous permet d'obtenir la médiatrice du segment AB. On dénote les points d'intersection de la médiatrice avec le cercle par les lettres E et F



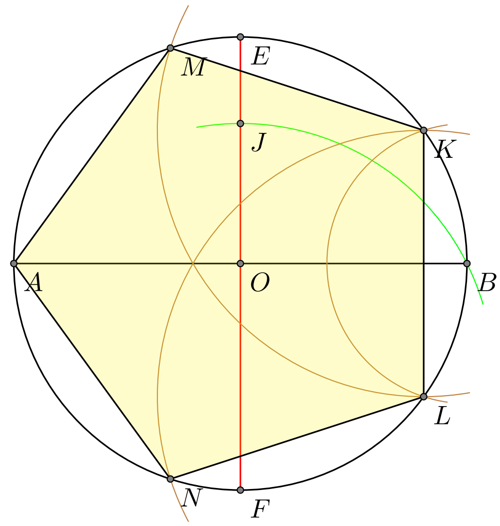
Étape 3 : Dessiner un arc de cercle centré en F et de rayon FO. Les points d'intersection de cet arc avec le cercle sont dénoté par G et H. On relie ensuite les points G et H pour obtenir la médiatrice du segment OF. Le point d'intersection de cette médiatrice avec la médiatrice obtenu à l'étape précédente est dénoté par la lettre I.



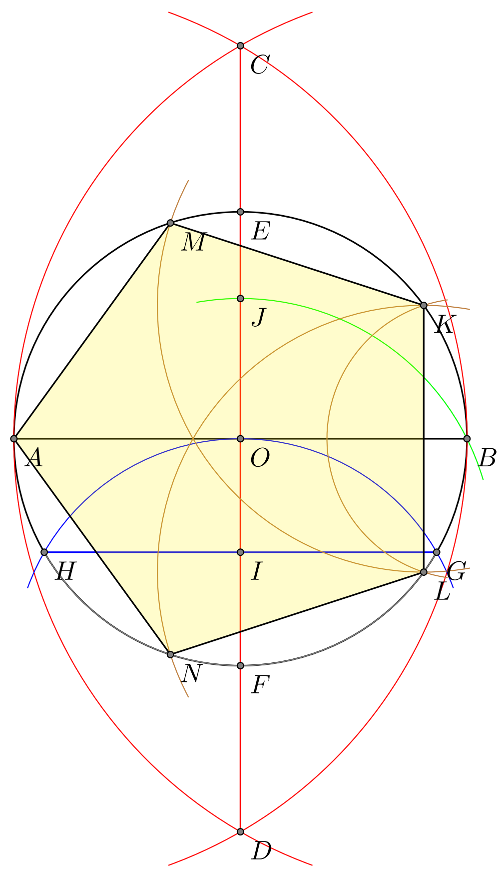
Étape 4 : Dessiner un arc de centre I et de rayon IB. L'intersection de cet arc avec le segment EF est dénoté par la lettre J.



Étape 5 : Dessiner un arc de cercle centré en B et de rayon OJ. Les points d'intersection de cet arc avec le cercle sont dénoté par L et K. Dessiner ensuite un arc de cercle centré en K et de rayon KL. Le point d'intersection de cet arc avec le cercle est dénoté par M. Dessiner maintenant un arc de cercle centré en L et de rayon KL. Le point d'intersection de cet arc avec le cercle est dénoté par N. Relier finalement les points A, M, K, L et N pour obtenir un pentagone régulier.



Ci-contre, un schéma illustrant toutes les étapes nécessaire pour dessiner un pentagone régulier à l'aide d'une règle non-gradué et d'un compas.

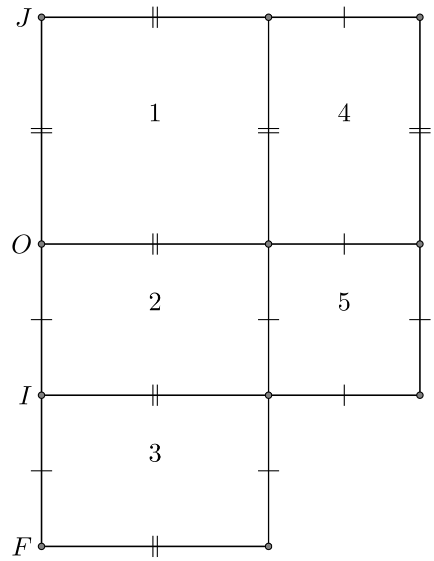


La démonstration :

Étape 1 : Commençons par considérez uniquement les points F, I, O et J. Par construction nous savons que les 4 points sont alignés, et que I est au milieu du segment FO. En considérant la figure ci-contre, il est facile de voir que le produit $JO \cdot JF$ correspond à la somme des aires des régions $1, 2$ et 3. En remarquant que les régions 3 et 4 ont la même aire, le produit $JO \cdot JF$ peut aussi être interpréter par la somme de l'aire des régions 1, 2 et 4. Ceci nous permet donc d'obtenir :

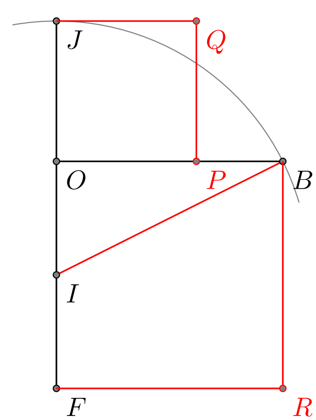
$$JO \cdot JF = JI^2 - IO^2$$

Car JI^2 est la somme des aires des régions $1, 2, 4$ et 5, et la valeur IO^2 correspond à l'aire de la région 5.

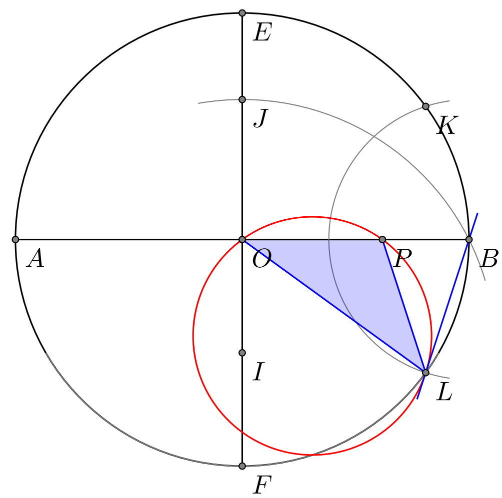


Étape 2 : Considérons maintenant la figure ci-contre. Les lignes et points en noirs correspondent à notre construction du pentagone régulier. En rouge ce trouve des segments et points que nous avons ajouter pour la démonstration. Notez que par construction, la mesure de IJ est égal à la mesure de OB. De plus, nous avons placer les points P, Q et R de sorte que $JQPO$ et $OBRF$ soient des carrés. Par l'étape 1, nous savons que $JO \cdot JF = JI^2 - IO^2$, ce qui nous permet d'obtenir :

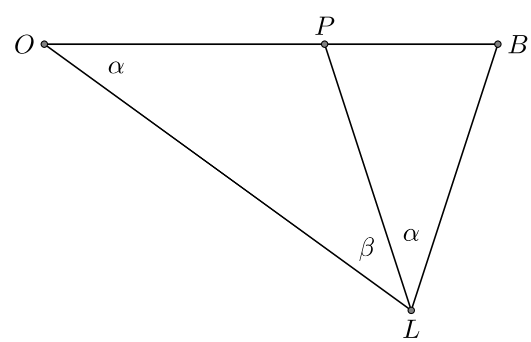
$$\begin{aligned}
JO \cdot JF &= JI^2 - IO^2 \\
JO \cdot (JO + OF) &= IB^2 - IO^2 \\
OP \cdot (OP + OB) &= OB^2 \\
OP^2 + OP \cdot OB &= OB^2 \\
OP \cdot OB &= OB^2 - OP^2 \\
OP^2 &= OB^2 - OP \cdot OB \\
OP^2 &= OB \cdot (OB - OP) \\
OP^2 &= OB \cdot PB
\end{aligned}$$



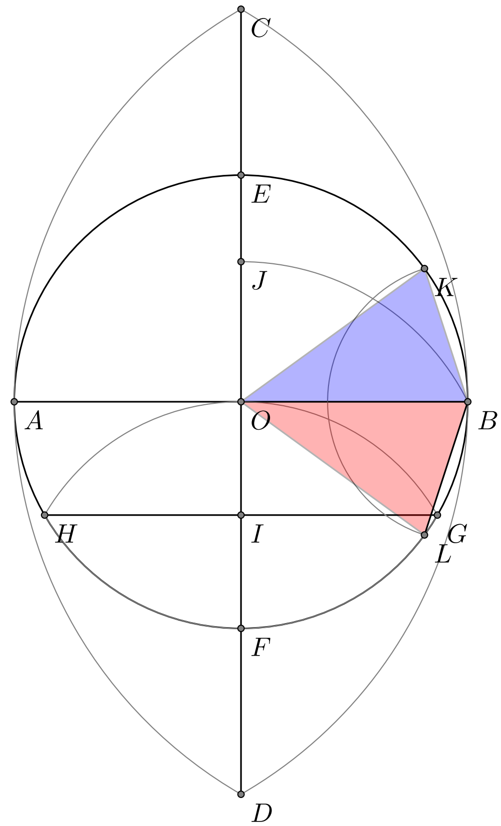
Étape 3 : Reprenons les points de notre construction du pentagone régulier, ainsi que le point P de l'étape précédent. Considérons le cercle circonscrit du triangle obtenu à partir des points O, P et L. Par l'étape précédente, nous savons que $OP^2 = OB \cdot PB$. En considérant le théorème sur la puissance d'un point et les droites tangentes, on remarque donc que la droite BL est tangente au cercle circonscrit du triangle OPL, ce qui nous permet d'affirmer que $\angle POL \cong \angle PLB$.



Étape 4 : Dénotons par α la mesure des angles $\angle POL$ et $\angle PLB$ que nous savons congrus par l'étape précédente, et dénote par β la mesure de l'angle $\angle PLO$. Comme la somme des angles internes du triangle OPL est 180 degré, on obtient que $\angle OPL = 180 - \alpha - \beta$. De plus, comme les angles $\angle OPL$ et $\angle BPL$ sont supplémentaires, on obtient $\angle BPL = \alpha + \beta$. Maintenant, comme OB et OL sont tous deux des rayons du même cercle (Voir le construction du pentagone), alors le triangle OBL est isocèle, ce qui signifie que $\angle OBL = \angle OBL = \alpha + \beta$. On remarque donc que le triangle PBL est isocèle. Les segments PL et BL sont donc congrus. En se rappelant que $BL = OP$, on obtient donc que le triangle OPL est aussi isocèle, ce qui signifie que $\angle OLP = \angle POL$. On a donc $\alpha = \beta$. Les angles du triangle OBL sont donc respectivement $\alpha, 2\alpha$ et 2α. En utilisant le fait que la somme des angles est 180 degré, on a donc $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180$, ce qui nous donne $\alpha = 36$ degré.



Étape 5 : À partir de l'étape précédente, nous savons donc que l'angle $\angle LOB = 36$. Par symétrie, nous avons aussi que $\angle KOB = 36$. En combinant ces deux angles, on obtient donc $\angle KOL = 72$, ce qui est exactement ce que nous avions besoin pour construire notre pentagone régulier. Le reste de la démonstration est maintenant particulièrement simple et vous est laissé en exercice.



À partir de la construction du pentagone régulier que nous venons de faire, il nous est maintenant possible de réaliser quelques constructions supplémentaires qui vous sont laissé en exercice.

Construction 3.11.2. Faites les constructions suivantes :

1. Dessiner un triangle isocèles pour lequel la mesure des deux angles (congrus) de la base est le double de la mesure du troisième angle.
2. Dessiner un angle de 36 degrés.
3. Dessiner un angle de 72 degrés.
4. Dessiner un décagone régulier.

3.12 Axe radical

Commençons par rappeler la définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Si Γ est un cercle de centre O et de rayon r, alors on définit la puissance d'un point M par rapport au cercle Γ comme étant $P_\Gamma(M) = MO - r^2$.

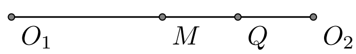
Definition 3.12.1. Si Γ_1 et Γ_2 sont deux cercles distincts, alors on définit l'**axe radical** de ces deux cercle comme étant l'ensemble des points M du plan tel que $P_{\Gamma_1}(M) = P_{\Gamma_2}(M)$.

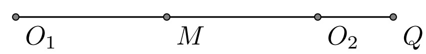
Théorème 3.12.1. L'axe radical de deux cercles est toujours une droite perpendiculaire au segment reliant le centre de chacun des cercles. De plus,

1. si les deux cercles se croisent en deux points, l'axe radical est la droite passant par ces deux points.
2. si les deux cercles possèdent un seul point d'intersection (i.e. ils sont tangent), alors l'axe radical passe par le point de tangence.

Démonstration. Supposons que Γ_1 et Γ_2 sont des cercles de centre O_1 et O_2 respectivement, et de rayon r_1 et r_2 respectivement. Nous allons faire la démonstration en plusieurs étapes.

1. Dans un premier temps nous allons montrer qu'il existe exactement un point sur la droite O_1O_2 qui fait partie de l'axe radical. Supposons qu'il existe au moins un point Q sur la droite O_1O_2 qui fait partie de l'axe radical. On a donc $P_{\Gamma_1}(Q) = P_{\Gamma_2}(Q)$, ce qui nous donne $QO_1^2 - r_1^2 = QO_2^2 - r_2^2$. En réarrageant les termes, on obtient $QO_1^2 - QO_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Sans perte de généralité, nous allons supposer que $r_1 \geq r_2$, ce qui signifie que $QO_1 \geq QO_2$. En posant $r_1 - r_2 = k$, on obtient $QO_1^2 - QO_2^2 = k \geq 0$. Donc Q peut soit être entre M et O_2, ou bien être à l'extérieur du segmnet O_1O_2 (du côté de O_2).



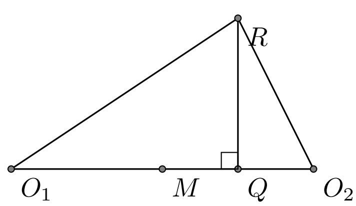


   Supposons que Q se trouve entre M et O_2. On a donc :

$$\begin{aligned}
QO_1^2 - QO_2^2 &= k \\
(QO_1 + QO_2)(QO_1 - QO_2) &= k \\
O_1O_2(O_1M + QM - (MO_2 - QM)) &= k \\
O_1O_2(O_1M + QM - MO_2 + QM) &= k \\
O_1O_2(2QM) &= k \\
QM &= \frac{k}{2\ O_1O_2}
\end{aligned}$$

   Remarquez que cette dernière équation nous permet de situé exactement le point Q. Ce dernier doit donc être unique. De plus, il est facile de vérifier que le point Q définie par cette égalité se trouve bien sur l'axe radical.
   Le cas où Q se trouve à l'extérieur du segment O_1O_2 se fait de manière similaire et est laissé en exercice. Notez que dans ce cas nous obtenons exactement la même équation, et donc la même conclusion.

2. Dans ce qui suit, nous allons supposer que Q est un point de l'axe radical se trouvant sur la droite O_1O_2 et que Q se trouve entre M et O_2. Les autres cas étant similaire, ils vous sont laissé en exercice. Supposons que R est un autre point se trouvant sur la droite perpendiculaire à O_1O_2 et qui passe par Q comme sur la figure ci-dessous.

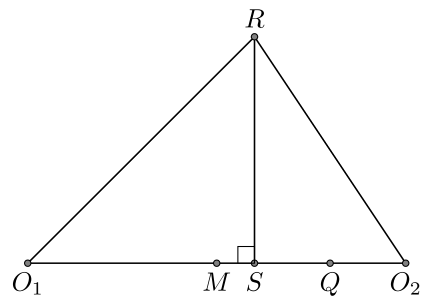


   Dans ce cas, en appliquant le théorème de Pythagore (Théorème 2.7.2), on obtient :

   $P_{\Gamma_1}(R) = RO_1^2 - r_1^2 = QO_1^2 + QR^2 - r_1^2 = P_{\Gamma_1}(Q) + QR^2 = P_{\Gamma_2}(Q) + QR^2 = QO_2^2 - r_2^2 + QR^2 = RO_2^2 - r_2^2 = P_{\Gamma_2}(R)$

Donc le point R se trouve aussi sur l'axe radical.

3. Supposons que O_1 et O_2 sont le centre des cercles Γ_1 et Γ_2 qui ont respectivement des rayons de longueur r_1 et r_2. Supposons que Q est le point de la droite O_1O_2 qui fait partie de l'axe radical, et supposons que R est un autre point quelconque du plan qui fait partie de l'axe radical. Finalement, supposons que S est la projection orthogonale de R sur la droite O_1O_2.



Par définition de l'axe radical, nous avons donc $P_{\Gamma_1}(R) = P_{\Gamma_2}$, ce qui nous donne :

$$\begin{array}{rcl} O_1R^2 - r_1^2 & = & O_2R^2 - r_2^2 \\ O_1S^2 + SR^2 - r_1^2 & = & O_2S^2 + SR^2 - r_2^2 \\ O_1S^2 - r_1^2 & = & O_2S^2 - r_2^2 \\ P_{\Gamma_1}(S) & = & P_{\Gamma_2}(S) \end{array}$$

Le point S fait donc partie de l'axe radical. Comme il existe un seul point sur la droite O_1O_2 qui fait partie de l'axe radical, nous avons $S = Q$. Le point R se trouve donc sur la droite perpendiculaire à O_1O_2 qui passant par le point Q. L'axe radical est donc une droite perpendiculaire au segment reliant le centre de chacun des cercles.

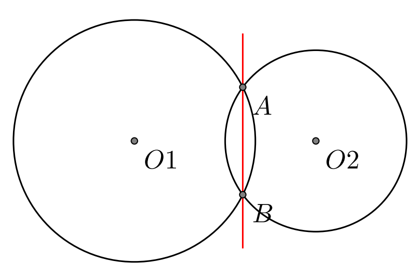
4. Nous avons vu que la puissance d'un point se trouvant directement sur le cercle est 0. Donc si deux cercles ont deux points d'intersection, alors ces points ont une puissance de 0 par rapport à chacun des deux cercles. Ils sont donc sur l'axe radical. L'axe radical étant une droite, cette droite est complètement définie par les deux points d'intersection.

5. Finalement, si deux cercles sont tangents, alors ils possèdent exactement un point d'intersection. Ce dernier aura une puissance de 0 par rapport à chacun des deux cercles. Il fait donc partie de l'axe radical.

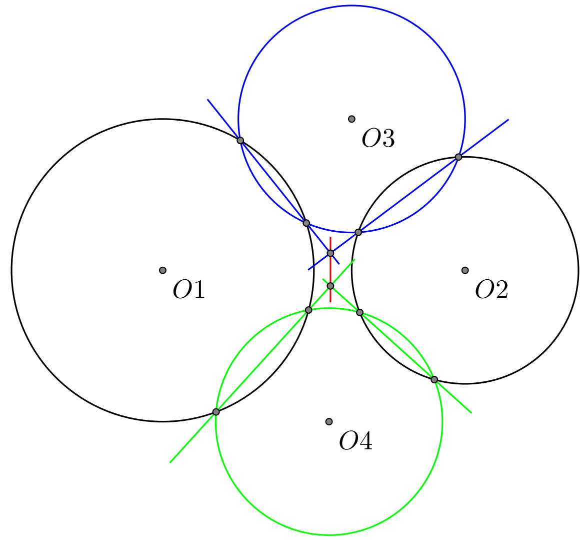
□

Construction 3.12.1. Dessiner à l'aide d'une règle non gradué et d'un compas l'axe radical de deux cercles donnés.

Cas 1 : Les cercles ont deux points d'intersection. Dans ce cas, nous savons que l'axe radical est une droite passant par les deux points d'intersection. Pour dessiner l'axe radical, il est donc suffisant de dessiner une droite passant par les deux points d'intersection.



Cas 2 : Les cercles n'ont aucun point d'intersection. Dans ce cas, on utilise des cercles auxilières. On commence par dessiner un cercle (en bleu) qui intersecte les deux Γ_1 et Γ_2. Ceci nous permet de dessiner l'axe radical du cercle par rapport à chacun des deux cercles Γ_1 et Γ_2. Le point d'intersection de ces deux axes radicaux nous donne donc un point qui a la même puissance avec chacun des trois cercles, et donc fait partie de l'axe radical que nous souhaitons dessiner. Ensuite,



on dessine un autre cercle auxillière (en vert) puis on répète la même étape que précédent pour obtenir un second point de l'axe radical des cercles Γ_1 et Γ_2. À partir des deux points que nous avons obtenu, il nous est maintenant possible de dessiner l'axe radical.

Cas 3 : Les cercles sont tangent. Dans ce cas, nous savons que le point de tangence est un point de l'axe radical. Pour dessiner l'axe radical nous avons donc deux options. La première optioin consiste à trouver un second point de l'axe radical en utilisant la méthode d'écrite dans le 2e cas. La deuxième option consiste à dessiner une droite perpendiculaire à la droite reliant le centre de chacun des cercle et passant par le point de tangence.

Chapitre 4

Les transformations

4.1 Les isométries

Maintenant que nous allons étudier les propriétés des figures géométriques simple comme les cercles et les triangles, il nous est maintenant temps d'aller un peu plus loin et étudier les fonctions qui sont définie sur le plan. Ceci est en fait semblable à l'étude des applications linéaires en algèbre linéaire, mais en géométrie nous ne somme pas intéressé par la même classe de fonction. En algèbre linéaire, les fonctions d'intérêt sont celle qui sont linéaire, c'est à dire celle pouvant être représenté par une matrice. Dans le contexte de la géométrie, ce sont les fonctions bijectives qui nous intéresseront, c'est à dire les fonctions qui sont inversibles. Notez qu'il existe des fonctions bijectives qui ne sont pas linéaire (par exemple les translations), et il existe des fonctions linéaires qui ne sont pas bijectives (par exemple les projections).

Definition 4.1.1. Une **transformation du plan** en géométrie euclidienne est une fonction bijective qui associe à chaque point du plan un autre point du plan. Une **isométrie** est une transformation du plan qui préserve les distances. C'est à dire que si T est une transformation du plan, et A, B des points, alors T est une isométrie si et seulement si $m(AB) = m(T(A)T(B))$.

Les isométries, et plus généralement les transformations du plan, étant en particulier des fonctions, il est possible de définir l'opération de composition de la même manière que nous définissons la composition dans les cours de mathématiques du secondaire. L'isométrie la plus simple est l'identité, mais ils en existent plusieurs autres. Parmi celles qui devrait vous êtes familière, il y a la translation, la rotation et la réflexion.

1. L'**identité** est une isométrie du plan qui consiste à laisser tout les points au même endroit.
2. Une **translation** est une isométrie du plan qui consiste à déplacer figure d'une distance et direction définie par un vecteur donné.
3. Une **rotation** est une isométrie du plan qui consiste à faire tourné une figure autour d'un point central appelé le centre de rotation et selon un angle prédéfinie.
4. Une **réflexion** est une isométrie du plan qui consiste à déplacer les points du plan de part et d'autre d'une droite, de sorte que le segment reliant un point avec son image soit perpendiculaire à la droite, et la distance d'un point avec la droite est égal à la distance de son image avec la droite.

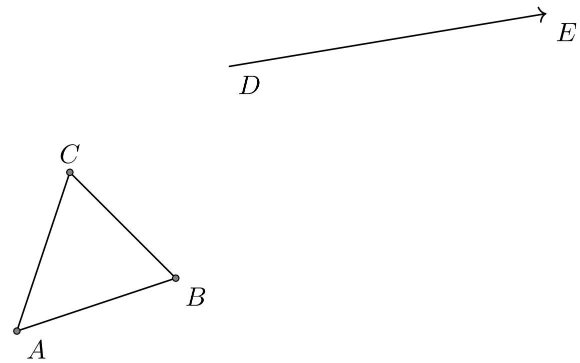
Notez que les réflexions sont parfois appelé symétries. En géométrie euclidienne, les deux termes sont habituellement utilisé de manière interchangeable. Le terme symétrie est cependant diferement dans certain contexte (par exemple en théorie des groupes) et peut donc porter à confusion.

Definition 4.1.2. Un **point fixe** d'une transformation T est un point A qui reste inchangé après la transformation. C'est à dire qu'il s'agit d'un point tel que $T(A) = A$. De plus, On dit qu'une isométrie T préserve l'**orientation**, si les sommets d'un triangle ABC apparait dans le même ordre avant et après la transformation. Autrement on dit que la transformation inverse l'orientation.

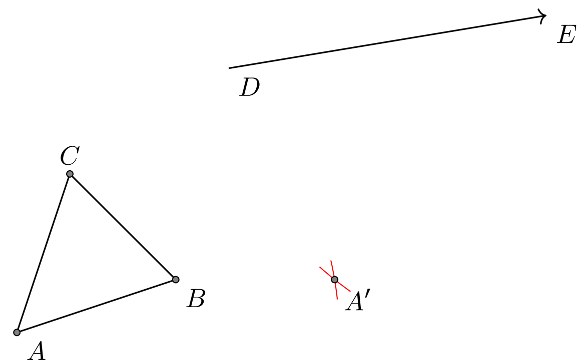
	Points fixes	Orientation
Translation	Aucun	l'orientation est préservé
Rotation	Un point fixe situé au centre de la rotation	L'orientation est préservé
Réflexion	Les points fixes forment une droite	L'orientation est inversé

Construction 4.1.1. À l'aide d'un compas et d'une règle non gradué, effectuer la translation du triangle ci-dessous par rapport au vecteur donné.

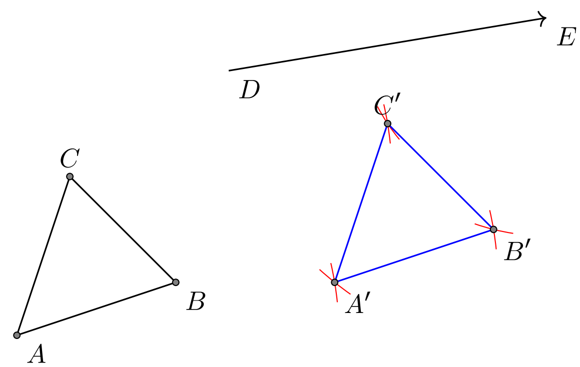
On veut dessiner la translation du triangle ABC ci-contre selon le vecteur donné.



Étape 1 : On commence par dessiner un arc de cercle centré en A et de rayon de longueur DE, puis on dessine un arc de cercle centre en E et de rayon de longueur AD. L'intersection de ces deux arcs de cercle est l'image du point A que l'on dénote A'.

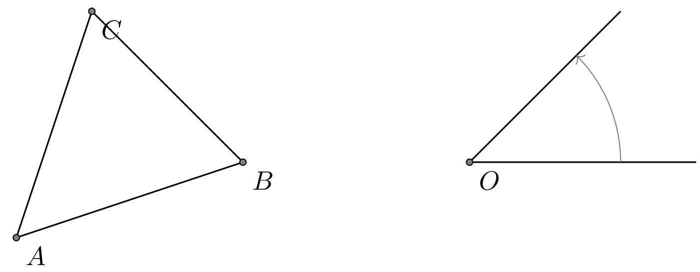


Étape 2 : On répète la première étape en remplaçant le point A par les points B et C respectivement pour obtenir les points B' et C'. En reliant les points A', B' et C' on obtient l'image du triangle ABC.

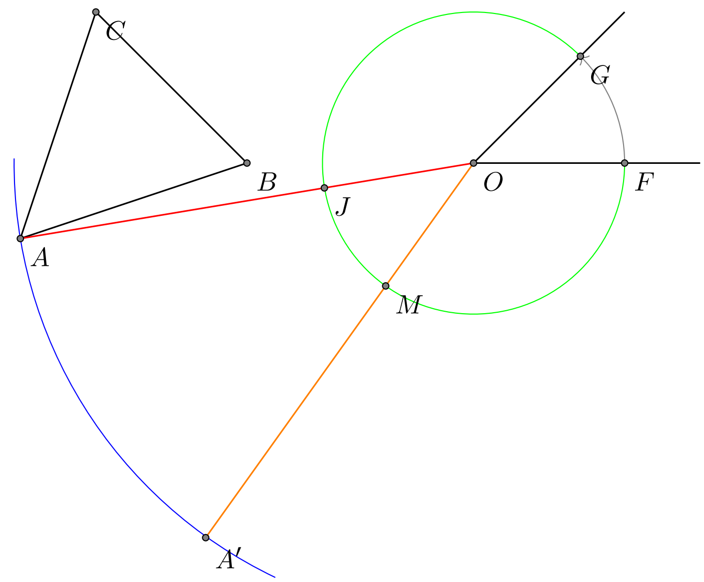


Construction 4.1.2. À l'aide d'un compas et d'une règle non gradué, effectuer la rotation du triangle ci-dessous par rapport à l'angle et au centre donné.

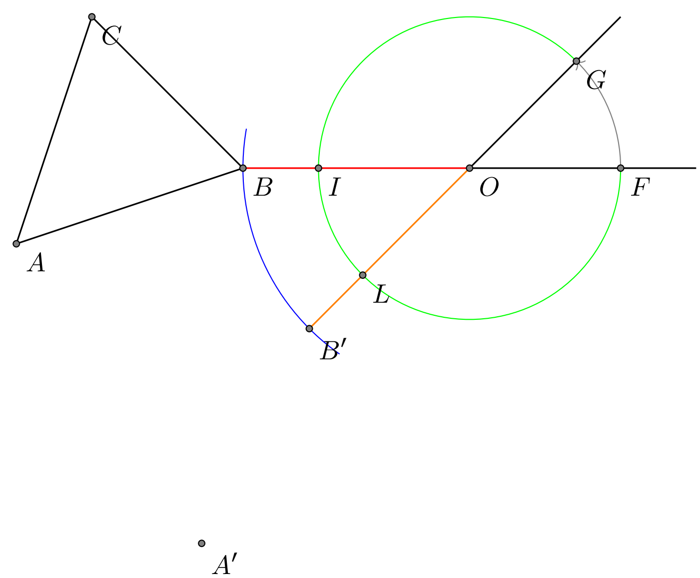
On veut effectuer la rotation du triangle ABC ci-contre selon le centre et l'angle donné.



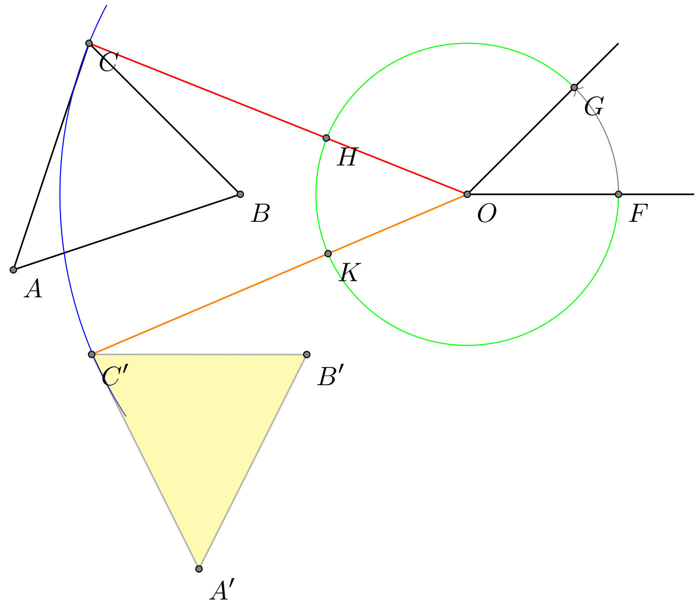
Étape 1 : On commence par dessiner un cercle centré en O et intersectant l'angle en deux points. On appelle ces points f et G. Ensuite on dessine le segment OA. Le point d'intersection entre cette droite et le cercle que nous avons dessiné précédement est dénoté par la lettre J. Ensuite, on dessine un cercle centré en J et de rayon de la même longueur que le segment FG. Le point d'intersection de ce cercle avec la cercle (vert) que nous avions dessiner précedement est appellé M. Finalement, on dessine le droite OM, et un cercle centré en O et passant par le point A. Le point d'intersection entre cette droite et ce cercle est dénoté A' et est l'image du point A.



Étape 2 : Ensuite, on répète l'étape 1, mais en utilisant le point B à la place du point A. Ceci nous permet d'obtenir le point B' qui est l'image du point B.

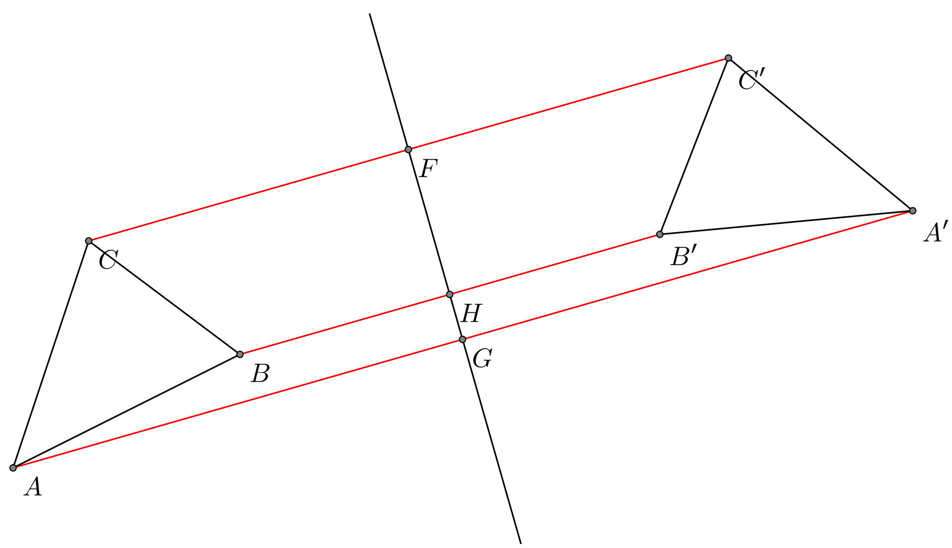


Étape 3 : Puis on fait de même avec le point C pour obtenir le point C'. En reliant les points A', B' et C', on obtient l'image du triangle ABC.



Construction 4.1.3. À l'aide d'un compas et d'une règle non gradué, effectuer la réflexion du triangle ci-dessous selon la droite donné.

L'idée de cette construction consiste à construire pour chacun des sommets une droite passant par ce sommet et perpendiculaire à la droite de réflexion. Ensuite, à l'aide du compas, on mesure la distance entre le sommet et la droite, et on reproduit cette distance de l'autre côté de la droite de réflexion. Ceci nous permet d'obtenir les trois sommets de l'image de notre triangle.



Théorème 4.1.1. Une isométrie transforme une droite en une droite.

Démonstration. Supposons que A, B et C sont trois points sur une même droite, et supposons que T est une isométrie. Sans perte de généralité, supposons que B est entre A et C, et posons $A' = T(A), B' = T(B)$ et

$C' = T(C)$. Dans ce cas, comme A, B et C sont sur une droite et dans cet ordre, on doit donc avoir

$$m(AC) = m(AB) + m(BC)$$

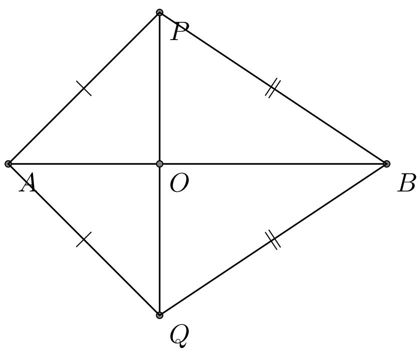
Maintenant, comme il s'agit d'une isométrie, on doit donc avoir $m(AC) = m(A'C'), m(AB) = m(A'B')$ et $m(BC) = m(B'C')$. Ceci nous permet donc d'affirmer que :

$$m(A'C') = m(A'B') + m(B'C')$$

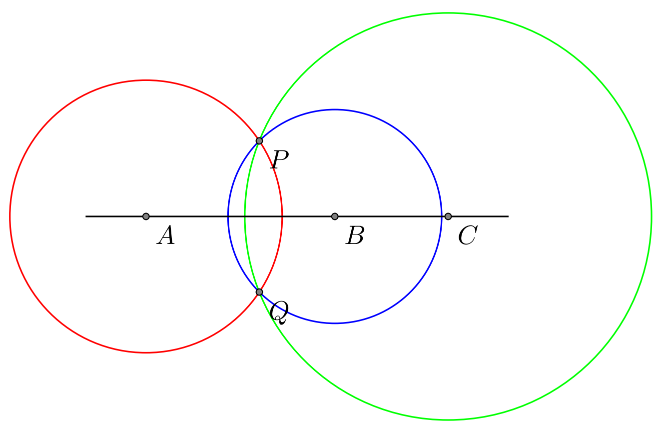
Ce qui signifie que A', B' et C' sont aussi sur une même droite. On peut donc affirmer qu'une isométrie transforme une droite en une droite. □

Théorème 4.1.2. Toute isométrie T est déterminé par la donné de trois points non aligné. En particulier, si T est une isométrie du plan ayant 3 points fixes non aligné, alors T est l'identité.

Étape 1 : Considérez le quadrilatère $APBQ$ ci-contre et supposez que $AP \cong AQ$ et $BP \cong BQ$. Alors par CCC, il est facile de voir que les triangles APB et AQB sont congru. On doit donc avoir $\angle PAB \cong \angle BAQ$. De plus, il est facile de voir que le triangle PAQ est isocèle, on a donc $\angle APQ \cong \angle AQP$. Par ACA, on obtient donc que les triangles PAO et AOQ sont congru, ce qui signifie que $\angle POA \cong \angle AOQ$, et donc comme ces angles sont supplémentaires on a $\angle POA = \angle AOQ = 90^o$. De plus, nous avons aussi $PO \cong OQ$. Ceci nous permet donc de conclure que la droite passant par AB est la médiatrice du segment PQ.



Étape 2 : Supposons maintenant que nous avons trois cercles distincts de centre respectif A, B et C, et qui s'intersectent en exactement deux points que nous appelons respectivement P et Q. Comme P et Q dont partie du cercle centré en A, nous avons donc $AP \cong AQ$. De plus, comme P et Q dont aussi partie du cercle de centre B, nous avons donc $BP \cong BQ$. Le quadrilatère $APBQ$ satisfait donc les conditions de la première partie de la démonstration. On doit donc avoir que la droite passant par A et B est la médiatrice du segment PQ. Ensuite, remarquons que les points P et Q font aussi partie du cercle centré en C. Ceci signifie que $CP \cong CQ$, et donc que le quadrilatère $APCQ$ satisfait lui aussi les conditions de la première partie de la démonstration, et donc la droite passant par A et C est elle aussi la médiatrice du segment PQ. Finalement comme la médiatrice d'un segment est unique, on peut donc conclure que les points A, B et C font tous les trois partie de la même droite, et sont donc aligné.



Étape 3 : Supposons que T_1 et T_2 sont des isométries, et A, B et C trois points non alignés du plan tel que $T_1(A) = T_2(A) = A', T_1(B) = T_2(B) = B'$ et $T_1(C) = T_2(C) = C'$. Prenons maintenant un point P quelconque du plan et posons $T_1(P) = Q$ et $T_2(P) = R$. On veut montrer que $Q = R$. Supposons au contraire que $Q \neq R$. Dans ce cas, remarquons que comme T_1 et T_2 sont des isométries, nous avons que $d(A', Q) = d(T_1(A), T_1(P)) = d(A, P) = d(T_2(A), T_2(P)) = d(A', R)$. Les points Q et R sont donc sur un même cercle centré en A'. De la même façon, nous que Q et R sont sur un même cercle centré en B', et aussi sur un même cercle centré en C'. Nous avons donc que R et Q sont deux points d'intersections de cercle centré en A', B' et C'. D'après la seconde partie de la démonstration, on obtient donc que A', B' et C' doivent être aligné, ce qui est une contradiction, car les triangles ABC et $A'B'C'$ sont congrus par CCC. Si les points A, B et C ne sont pas aligné par hypothèse, les points A', B' et C' ne peuvent pas l'être non plus. On peut donc conclure que $Q = R$, et donc une isométrie est entièrement déterminé par la donné de trois points non alignés.

Deuxième partie : Dans le cas particulier d'une isométrie ayant trois points fixes non alignés, il nous suffit de remarquer que cette propriété est satisfaite par l'identité, et donc l'isométrie doit être l'identité par l'étape 3.

Théorème 4.1.3. **(Caractérisation des isométries)** Toutes isométries du plan T peut s'écrire comme la composition d'au plus 3 réflexions.

Démonstration. Par le théorème 4.1.2, il nous est suffisant de travailler avec 3 points non alignés. Prenons des points A, B et C, des points non alignés ayant pour image A', B' et C' respectivement.

Étape 1 : On commence par trouver une réflexion qui transforme A et A' sans tenir compte des deux autres points. Pour ce faire, deux cas peuvent se produire.

- Si $A = A'$, il n'y a rien à faire. Nous allons donc poser T_1 comme étant l'identité, puis on pose $B_2 = B$ et $C_2 = C$.
- Si $A \neq A'$, on pose T_1 comme étant la réflexion par rapport à la médiatrice du segment AA'. Par définition de la médiatrice et de la réflexion, il devient alors évident que $T_1(A) = A'$. On pose par la suite $B_2 = T_1(B)$ et $C_2 = T_1(C)$.

Étape 2 : Maintenant, nous voulons trouver une réflexion permettant de transformer B_2 en B', sans déplacer le point $A = A'$.

- Si $B_2 = B'$, il n'y a rien à faire. Nous allons donc poser T_2 comme étant l'identité. Dans ce cas il est évident que $T_2(A') = A'$ et $T_2(B') = B'$. On pose ensuite $C_3 = T_2(C_2)$.
- Si $B_2 \neq B'$, on pose T_2 comme étant la réflexion selon la médiatrice du segment B_2B'. Comme le segment AB est congru au segment $A'B'$ par hypothèse (car T est une isométrie), et le segment AB est congru au segment $A'B_2$ (car T_1 est une isométrie), alors par transitivité on obtient que $A'B_2 \cong A'B'$. Le point A' est donc à égal distance du point B_2 et du point B'. Comme la médiatrice du segment B_2B' est le lieu des points qui se trouvent à égal distance de B_2 et B', on obtient donc que A' est sur la médiatrice du segment B_2B'. On a donc $T_2(A') = A'$. De plus, il est évident que $T_2(B_2) = B'$. On pose finalement $T_2(C_2) = C_3$.

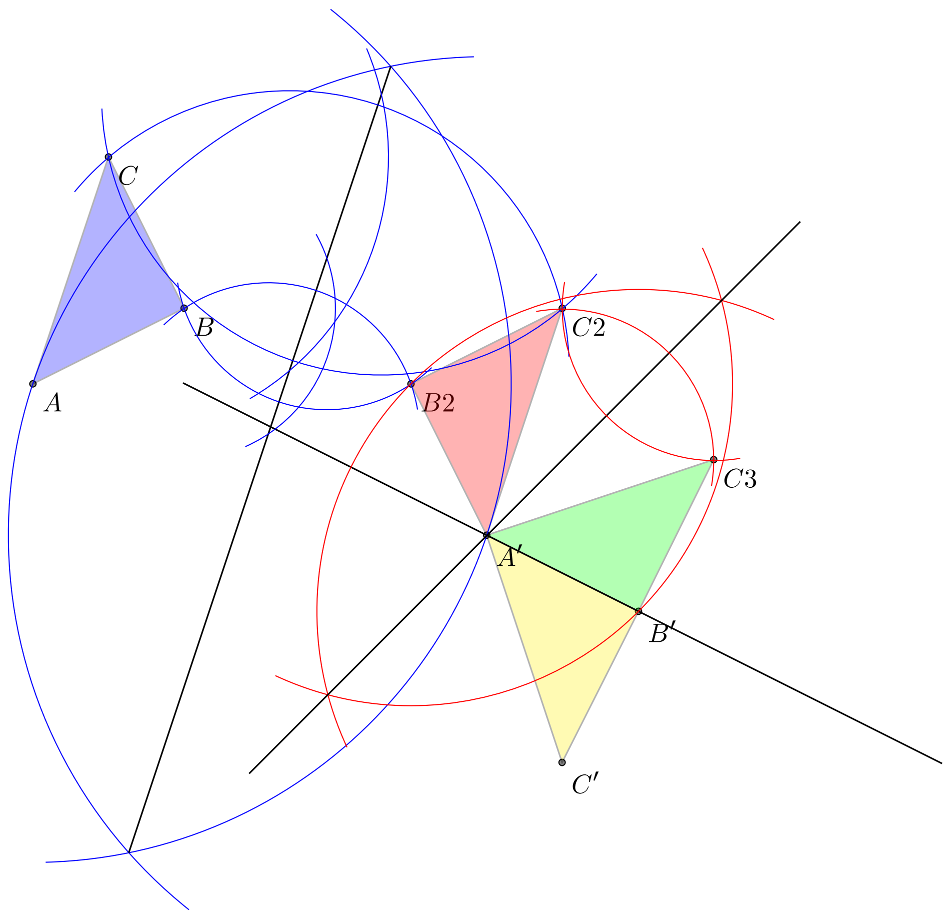
Étape 3 : Il nous reste maintenant à trouver une réflexion permettant de transformer C_3 en C' sans déplacer les deux autres points.

- Si $C_3 = C'$, il n'y a rien à faire. Nous allons donc poser T_3 comme étant l'identité.
- Si $C_3 \neq C'$, on pose T_3 comme étant la réflexion selon la médiatrice du segment C_3C'. Dans ce cas, la même idée que pour l'étape 2 nous permet de montrer que $T_3(A') = A'$, $T_3(B') = B'$ et finalement $T_3(C_3) = C'$. Remarquez que dans ce cas la médiatrice du segment C_3C' n'est en fait rien d'autre que la droite passant par A' et B'. Cette partie vous est laissé en exercice.

Et finalement : Il est maintenant facile de voir que $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$. Toute isométrie du plan peut donc s'écrire comme la composition d'au plus 3 réflexions. $\square$

Construction 4.1.4. Sachant que le triangle $A'B'C'$ a été obtenu en effectuant une isométrie au triangle ABC, d'écrire cette isométrie à l'aide d'au plus trois réflexions à l'aide d'un compas et d'une règle non gradué.

Cette construction consiste essentiellement à appliquer les étapes de la démonstration du théorème précédent. Nous allons donc nous contenter de dessiner une figure complète.



4.2 Les homothéties

Dans cette section, nous voulons maintenant nous intéresser au homothétie. Les homothéties sont communément appelé grossissement ou raptissement selon le contexte, mais sont en fait un peu plus général. Il ne s'agit pas d'une isométrie, car les longueurs ne sont pas préservé, mais permet tout de même de préserver les similitudes. Elles se caractérise à partir d'un centre d'homothétie, ainsi que d'un facteur $k \in \mathbb{R}$.

Definition 4.2.1. Une homothétie de facteur $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et de centre O est une transformation du plan associant à chaque point P du plan un point P' se trouvant sur la droite OP et tel que $OP' = k \cdot OP$.

Théorème 4.2.1. Les homothéties ont les propriétés suivantes :

1. Elles transforment une droite en une droite parallèle.
2. Elles transforment un cercle en un cercle.
3. La mesure des angles est préservé.

Démonstration.

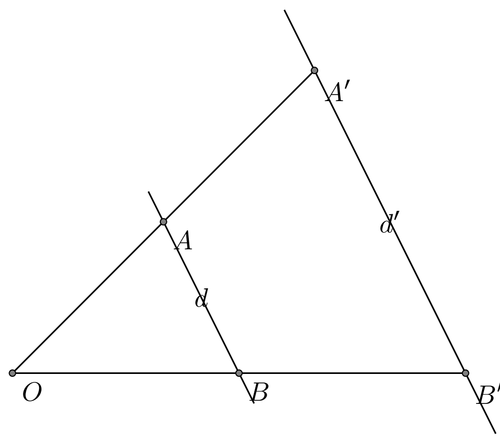
1.

   (a) Supposons que T est une homothétie de centre O et de facteur k, et prenons d une droite quelconque du plan. Supposons que A et B sont deux points distincts de la droite d, et posons $A' = T(A)$. Définissons la droite d' comme étant parallèle à la droite d et passant par le point A'. Finalement, on définit B' comme étant le point d'intersection des droites OB et d'. On veut montrer que le point B' que nous venons de définir est en fait l'image du point B.

   (b) Comme les droites d et d' sont par définition parallèle, on a donc $\angle OAB \cong \angle OA'B'$ et $\angle OBA \cong \angle OB'A'$, car il s'agit d'angle correspondant. On obtient donc que les triangles OAB et $OA'B'$ sont semblable par AAA.

   (c) Comme les triangles sont semblables, le rapport de leur côté est constant. On a donc $\dfrac{B'O}{BO} = \dfrac{A'O}{AO} = k$. Le point B' est donc bien l'image du point B.

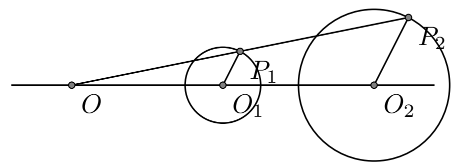
   (d) On obtient donc que l'image des points de la droite d se trouve sur la droite d'. Pour démontrer que tout les points de d' sont l'image d'un point de d, il suffit de remarquer qu'une homothétie est inversible et que l'inverse image d'un point sur la droite d' se trouve sur la droite d.



2.

Supposons que T est une thomothétie de centre O et de facteur k. Prenons C_1 un cercle de rayon r, et supposons que O_1 est son centre, et P_1 un point quelconque de ce cercle. Posons $O_2 = T(O_1)$ et définissons P_2 comme étant le point d'intersection d'une droite parallèle à O_1P_1 et passant par le point O_2. Par AA, il est facile de voir que les triangles OO_1P_1 et OO_2P_2 sont semblable. Leur côté respectif sont donc proportionnel. On obtient donc :

$$\frac{OP_2}{OP_1} = \frac{OO_2}{OO_1} = k \quad \Rightarrow \quad OP_2 = k \cdot OP_1$$



Ce qui nous permet d'affirmer que $P_2 = T(P_1)$. De plus, nous avons :

$$\frac{O_2P_2}{O_1P_1} = \frac{OO_2}{OO_1} = k \quad \Rightarrow \quad O_2P_2 = k \cdot O_1P_1 = k \cdot r$$

Le point P_2 se trouve donc sur le cercle de cercle O_2 et de rayon kr. Maintenant, remarquons que peut importe le point P_1 choisit sur le cercle C_1, on obtient que son image se trouve sur le cercle de centre O_2 et de rayon rk, c'est à dire que le cercle (image) ne dépend pas du point choisit. En considérant que la transformation est inversible, on conclut donc que l'image d'un cercle est un cercle.

3. Donc la première partie du théorème, nous avons démontré qu'un droite est transformé en une droite parallèle. Donc si on prend un angle formé par deux droites, l'image sera un angle formé par deux droites parallèle aux originales. La mesure de l'angle doit donc être la même.

□

Construction 4.2.1. Dessiner à l'aide d'un compas et d'une règle non gradué l'image d'une figure donnée selon une homothétie de centre O et de facteur $k \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

La construction vous est laissé en exercice.

Notez que bien que les homothéties soient techniquement définie pour n'importe quel facteur $k \in \mathbb{R}$, pour pouvoir effectuer la construction à l'aide d'un compas et d'une règle non gradué, il devient nécessaire de se restraindre à des facteurs k que l'on sait construire. Nous nous sommes restreint aux nombres rationnels non nuls, car nous savons tous les construires relativement facilement, mais il est en fait possible d'appliquer la construction à un ensemble beaucoup plus grand de nombre. Il s'agit de l'ensemble des nombres constructibles (que nous ne définierons pas). Cet ensemble inclut en particulier les racines carrés de nombres positifs, mais n'inclut pas des nombres tel que π ou e.

4.3 L'inversion

L'inversion n'est techniquement pas une transformation, car elle ne satisfait pas notre définition du début du chapitre, mais rappelle tout de même plusieurs éléments des transformations que nous avons précédement étudié. Comme pour la rotation et l'homothétie, elle possède un centre, et comme pour la réflexion elle transforme les points d'un côté à l'autre d'une figure géométrique.

Definition 4.3.1. L'inversion d'un point P par rapport à un cercle de centre O et de rayon r est un point P' se trouvant sur la droite passant par O et P et tel que $OP \cdot OP' = r^2$.

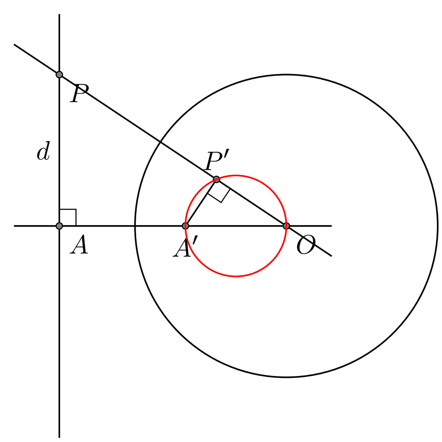
Notez que techniquement l'inversion n'est pas une transformation du plan, car le centre du cercle d'inversion ne possède pas d'inverse dans le plan euclidien. Par contre, il est pratique de considérer l'inverse du centre du cercle comme étant un point à l'infinie, et inversement, l'image d'un point à l'infinie est le centre du cercle.

Théorème 4.3.1. L'inversion possède les propriétés suivantes :

1. L'opération inverse de l'inversion est elle même.
2. L'inversion d'un point se trouvant sur le cercle d'inversion est lui même.
3. L'inversion d'une droite passant par le centre du cercle d'inversion est elle même, et l'inversion d'une droite ne passant pas par le centre du cercle d'inversion est un cercle passant par le centre du cercle d'inversion.
4. L'inversion d'un cercle passant par le centre du cercle d'inversion est une droite, et l'inversion d'un cercle ne passant pas par le centre du cercle d'inversion est un cercle.

Démonstration.

1. Cette partie est une conséquence directe de la définition.
2. Cette partie est une conséquence directe de la définition.
3. Supposons que d est une droite passant par le centre d'inversion O, et prenons un point P sur cette droite. Comme par définition l'image P' du point P se trouve sur la droite passant par O et P, le point P' doit donc être lui aussi sur la droite d. Maintenant, comme l'opération d'inversion est sa propre inverse, on peut donc conclure que l'image de la droite d est elle même. Maintenant, si on suppose que d est une droite ne passant par par le centre O. Prenons A le point de d le plus proche du centre O, et P un autre point quelconque de la droite d. Clairement, l'angle PAO est droit. Maintenant, posons A' et P' l'inverse des points A et P respectivement comme illustré ci-dessous.



On a donc d'après la définition de l'inversion que $OA{\cdot}OA' = r^2 = OP{\cdot}OP'$, ce qui nous permet d'obtenir

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'}$$

Comme l'angle POA est commun aux triangles OAP et $OA'P'$, d'après l'égalité précédente on a donc que les deux triangles sont semblables. En particulier, on obtient que l'angle $OP'A'$ est droit. Comme ceci est vrai peut importe le point P de la droite d, on obtient donc que l'image de la droite d ce trouve donc sur un cercle de diamètre OA' par le théorème de l'arc capable (Théorème 3.5.1). Finalement, en remarquant que ce processus est inversible, on remarque donc que l'image de d est exactement le cercle de diamètre OA', à l'exception du point O. Notez qu'en considérant le point à l'infinie comme faisant partie de la droite, nous obtenons alors le cercle au complet.

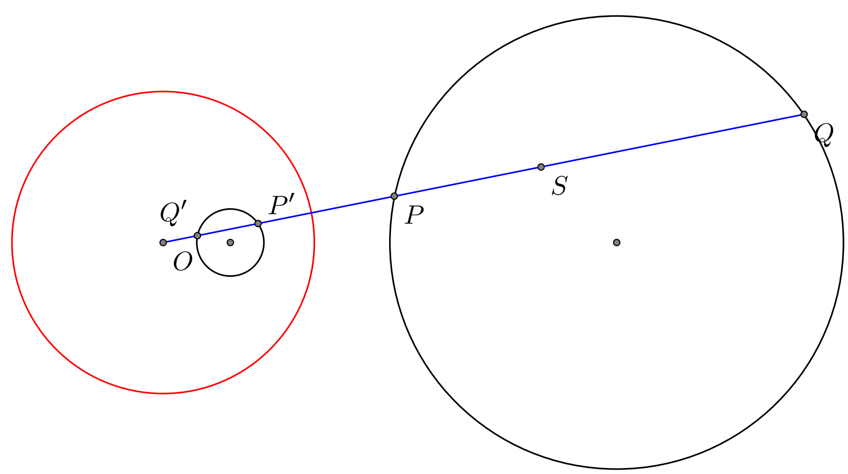
4. Dans le cas ou le cercle passe par le centre du cercle d'inversion, la démonstration est essentiellement la même que dans le cas d'un droite qui ne passe pas par le centre d'inversion. Cette partie vous est laissé en exercice. Supposons donc que le cercle ne passe pas par le centre du cercle d'inversion. Si le cercle d'inversion (en rouge) est de centre O et de rayon r, et si P est un point quelconque d'un cercle Γ, alors on remarque facilement que la droite reliant O et P doit croiser le cercle Γ en un second point que l'on appelle Q. Notez que ceci est vrai à condition que la droite ne soit pas tangente au cercle, mais ce cas est laissé en exercice. Si on dénote par P' l'image du point P, alors on obtient :

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OP \cdot OP'}{OP \cdot OQ} = \frac{r^2}{OP \cdot OQ}$$

Maintenant remarquons que l'expression que nous avons obtenu au dénominateur n'est en fait rien d'autre que la puissance du point O par rapport au cercle Γ. On a donc :

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{r^2}{P_\Gamma(O)}$$

Finalement, si l'on dénote $k = \dfrac{r^2}{P_\Gamma(O)}$, on remarque que la constante k ne dépend que du cercle d'inversion, et en particulier ne dépend pas du point P ou du cercle Γ. On a donc $OP' = k \cdot OQ$. L'image du cercle Γ est donc obtenu en faisant une homothétie de facteur k et de centre O. Comme l'image d'un cercle par homothétie est un cercle, on obtient le résultat voulu.



□

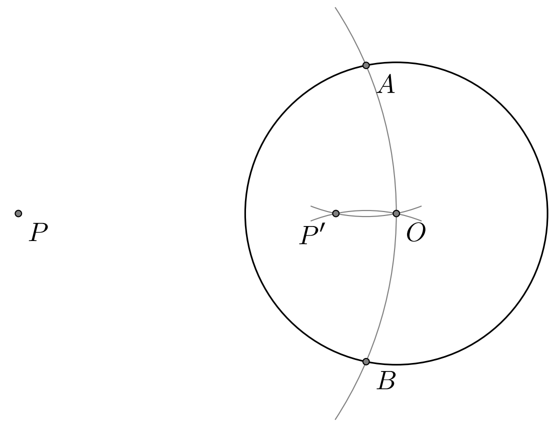
Il y a quelque point important à noter sur la dernière partie de la démonstration précédente. L'inversion d'un cercle ne passant pas par par le centre d'inversion est globalement une homothétie, mais l'homothétie et l'inversion ne nous donnent pas la même image pour un point en particulier du cercle. Pour l'homothétie, l'image du point Q est la point P', alors que pour l'inversion il devrait s'agit du point Q'. De plus. il est important de réaliser que l'image du centre du cercle Γ par inversion, n'est pas le centre du cercle image.

Construction 4.3.1. Construire à l'aide d'une règle non gradué et d'un compas l'inverse d'un point.

Nous allons traiter en détail uniquement le cas où $OP > \frac{r}{2}$. Les autres cas peuvent être obtenu en doublant la longueur OP et en remarquant que $(k \cdot OP) \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot OP'\right) = OP \cdot OP' = r^2$.

La méthode :

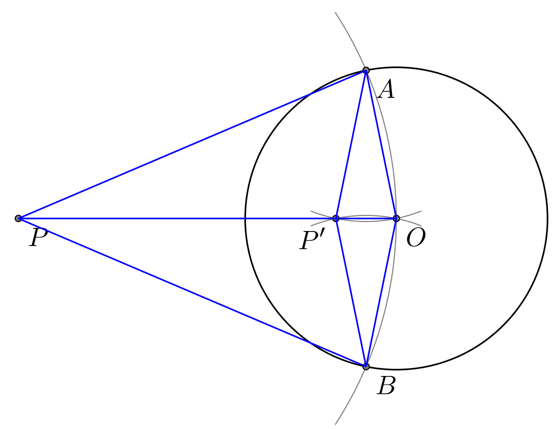
1. Supposons que P est un point à l'extérieur du cercle d'inversion, et supposons que le centre du cercle d'inversion est O.
2. On dessine un cercle de centre P passant par O. Ce cercle rencontre le cercle d'inversion en deux points que nous appelons A et B.
3. On dessine ensuite un cercle de centre A passant par O, et un cercle de centre B passant par O. Ces deux cercles se croisent en deux points, l'un deux étant O et l'autre est P', l'inverse du point P.



La démonstration :

1. Il s'agit dans un premier temps de remarquer que les triangles OPA et $OP'A$ sont tous deux isocèles par construction. De plus, comme ils ont un angles en commun, on remarque donc qu'ils sont semblables par AA.
2. Les côtés correspondant de ces deux triangles sont donc proportionnelles, ce qui nous permet d'obtenir

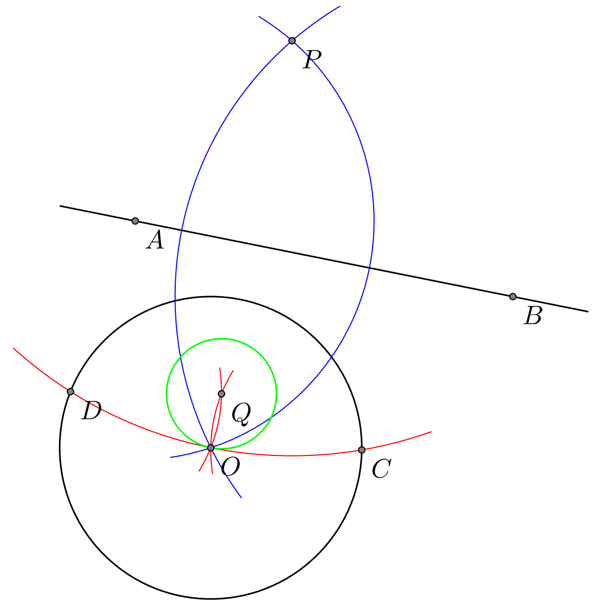
$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OP'} \quad \Rightarrow \quad OP \cdot OP' = OA^2 = r^2$$



Construction 4.3.2. Trouver l'image par inversion d'une droite ne passant pas par le centre du cercle d'inversion.

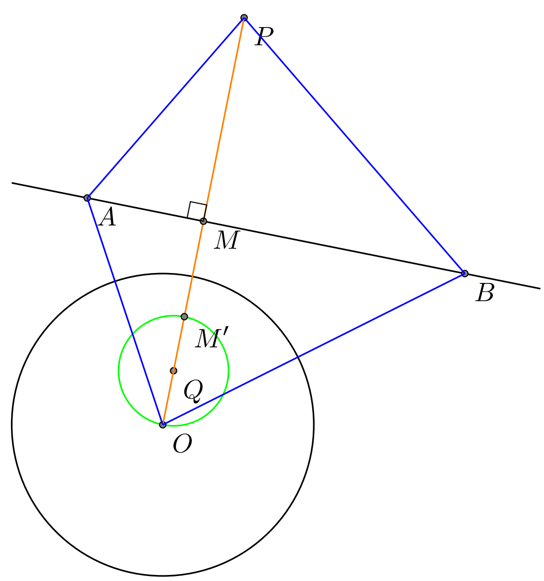
La méthode :

1. On choisit des points A et B sur la droite, et on dessiner un cercle centré en A passant par O, et un cercle centré en B et passant par O. Le point d'intersection de ces deux cercles est dénoté par P (l'autre intersection étant O).
2. Dessiner un arc de cercle centré en P et passant par O. Les points d'intersection de ce cercle avec le cercle d'inversion sont dénoté C et D.
3. Dessiner un cercle centré en C et passant par O, ainsi qu'un cercle centré en D et passant par O. Le point d'intersection de ces deux cercles est dénoté Q (l'autre intersection étant O).
4. Finalement, on dessiner un cercle de centre Q et passant par O. Il s'agit de l'inverse de notre droite.



La démonstration :

1. Premièrement, rappelons que nous avons déjà démontré que l'image d'une droite ne passant pas par le centre du cercle d'inversion est un cercle passant pas le centre du cercle d'inversion. De plus, d'après la définition de l'inversion, il n'est pas très difficile de remarquer que le point de la droite le plus proche du cercle d'inversion sera après transformation le point le plus loin du centre du cercle d'inversion. Ceci va nous permettre de déterminer un diamètre du cercle image.
2. Remarquons que le point P est en fait l'image du point O selon la droite AB. Ceci signifie entre autre que $OM = MP = \frac{1}{2}OP$ et que $\angle AMP = 90^o$. Le point M est donc le point de AB le plus proche du cercle d'inversion.



3. On dénote par M' le point d'intersection entre la droite OP et le cercle centré en Q et passant par O. Notre but est de démontrer que M' est l'inverse du point M, ce qui sera fait très bientôt. Pour le moment, remarquons cependant que $OQ = QM' = \frac{1}{2}OM'$.

4. L'étape 3 de la construction revient à trouver l'inverse du point P, que nous avons appellé Q. Ceci nous donne l'équation $OQ \cdot OP = r^2$.
5. En combinant ces équations, on obtient donc $OM' \cdot OM = 2OQ \cdot \frac{1}{2}OP = OQ \cdot OP = r^2$. Le point M' est donc l'inverse du point M.
6. Il suffit maintenant de remarquer que OM' est donc la diamètre du cercle image, et Q en est son centre.

Chapitre 5

Les constructions

5.1 Les 10 problèmes d'Appolonius

Apollonius de Perge était un mathématicien de tradition grecque du 3e siècle avant J.-C. Au côté de Thales, Pythagore, Euclide et Archimède, il est l'une des plus grande figure des mathématiques de l'antiquité. Né dans l'actuelle Turquie, il enseigna à l'école d'Alexandrie. Dans son traité des coniques, il introduit les termes d'ellipse, de parabole et d'hyperbole. Il est aussi l'auteur du traité des contacts, un ouvrage qui a malheureusement été perdu à travers l'histoire, dans lequel il introduit un ensemble de 10 problèmes que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de problèmes d'Apolonius (aussi connu sous le nom de problèmes des contacts). Ce sont ces 10 problèmes que nous voulons étudier dans cette section.

Les problèmes d'Apolonius consiste à construire à la règle et au compas un cercle satisfaisait à 3 propriétés choisi parmi :

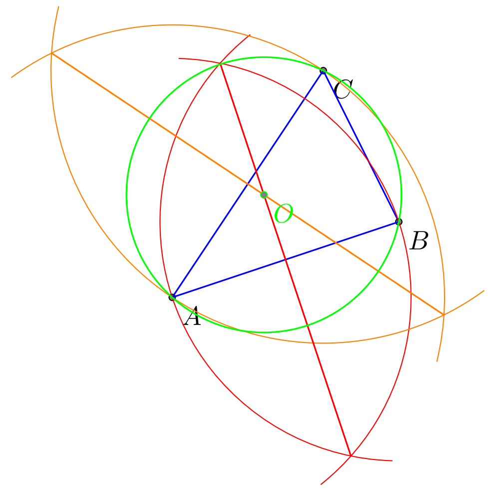
- P : passant par un point donné.
- D : tangent à une droite donné.
- C : tangent à un cercle donné.

En considérant que le choix des propriétés se fait sans ordre et avec remise, ceci donne lieu à 10 problèmes de différent niveau de difficulté. Leur résolution nous permettra de revisiter une partie considérable de la matière des chapitres précédent. Nous dénoterons ces problèmes par les acronymes PPP, PPD, PPC, PDD, PDC, PCC, DDD, DDC, DCC et CCC.

Construction 5.1.1. **(PPP)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle passant par trois point donnés.

Premièrement, remarquons que si les trois points sont alignés, le problème ne possède aucune solution. Nous allons donc supposé que les trois points ne se trouve pas sur une même droite. Dans ce cas, en reliant les points deux à deux, il est facile de remarquez que nous obtenons un triangle. Le cercle passant par les trois points n'est donc rien d'autre que le cercle circonscrit du triangle ayant ces trois points pour sommet, ce que nous savons déjà construire à l'aide d'une règle et d'un compas.

La méthode : Supposons que les points A, B, C ne sont pas sur une même droite. En les reliant, on obtient donc un triangle (en bleu). On trouve la médiatrice du segment AB (en rouge), puis la médiatrice du segment AC (en orange). Le point d'intersection O de ces deux médiatrices est le centre du cercle recherche. Il ne nous reste plus qu'à tracer un cercle de centre O et passant par l'un des points original (en vert).



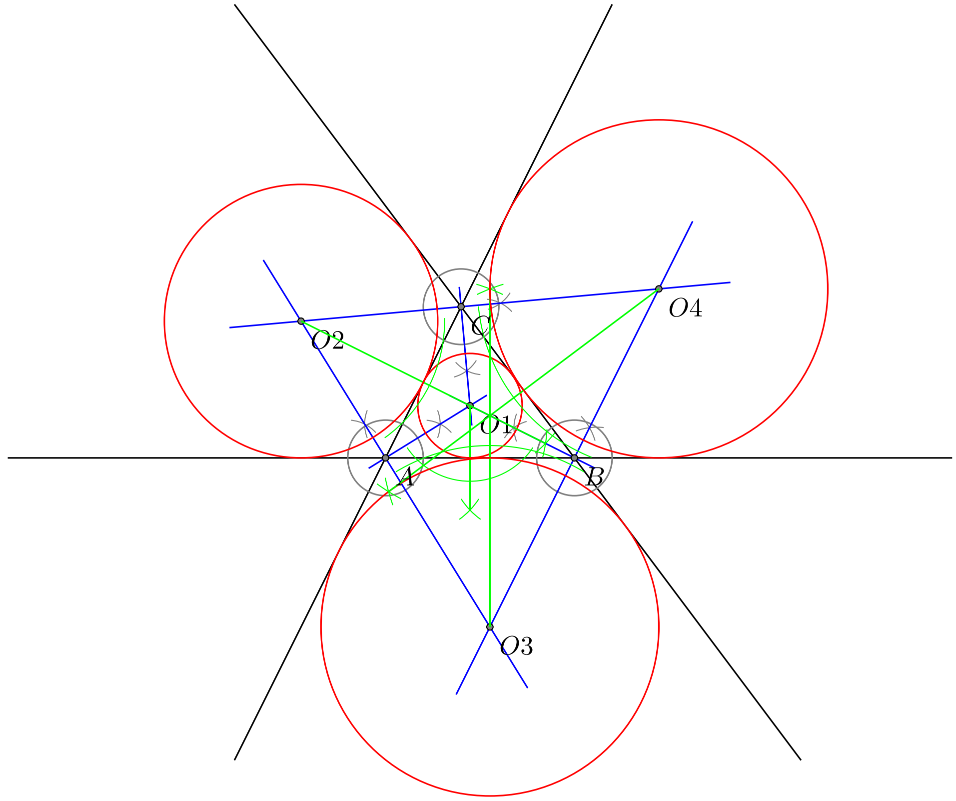
Construction 5.1.2. **(DDD)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle tangent à trois droites données.

Dépendant de la configuration des 3 droites, ce problème peut avoir jusqu'à 4 solutions. Nous allons traiter séparément les différentes configurations des droites.

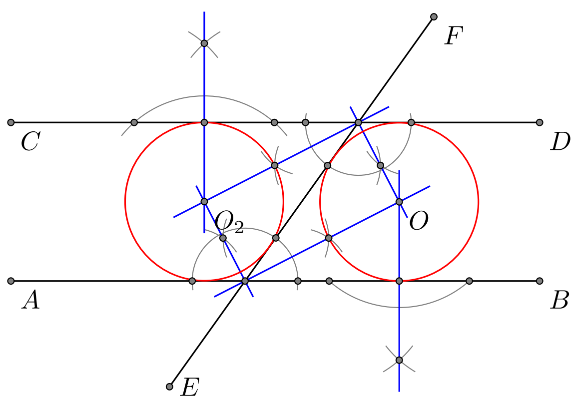
1. **Les trois droites sont parallèles**
   Dans ce cas, il est facile de remarquez qu'il n'y a aucune solution.

2. **Les trois droites se croisent en un seul point**
   Comme pour le cas précédent, ici il est facile de voir qu'il n'y a aucune solution.

3. **Aucune des droites ne sont parallèles, et elles ne se croisent pas en un seul point**
   Dans ce cas, 4 solutions sont possible. La plus simple étant le cercle se trouvant à l'intérieur du triangle formé par les trois droites. Dans ce cas il s'agit tout simplement de trouver le cercle inscrit du triangle. Il existe cependant 3 autres solutions se trouvant à l'extérieur du triangle.

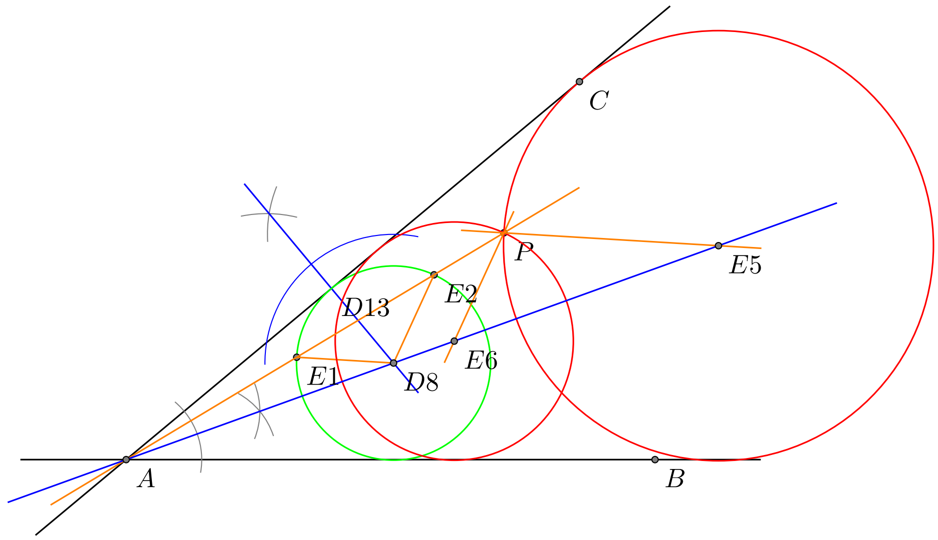


4. **Exactement deux des trois droites sont parallèles**
   Dans ce cas, deux cas sont possible.



Construction 5.1.3. **(PDD)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle passant par un point et tangent à deux droites.

La méthode : L'idée est d'utiliser les homothéties. On commence par trouver un cercle tangent aux deux droites. Pour ce faire, nous savons que le centre du cercle doit se trouver sur la bissectrice des deux droites. En traçant une droite perpendiculaire à l'une de ces droites, il devient alors facile de dessiner un cercle tangent aux deux droites. Ensuite, on effectue une homothétie ayant pour centre l'intersection des deux droites de sorte que l'image passe par le point donné. De manière générale, ce problème possède 2 solutions.

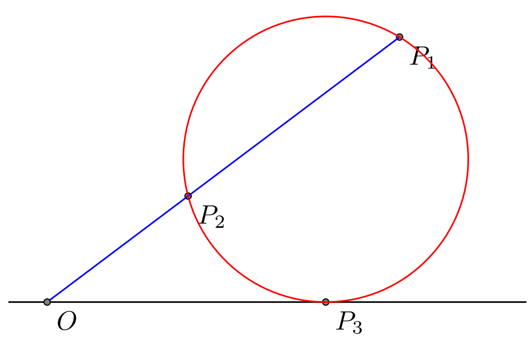


Construction 5.1.4. **(PPD)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle passant par deux points et tangent à une droite.

La méthode : On cherche un cercle tangent à une droite d et passant par des points P_1 et P_2, pour se faire, on dessine une droite passant par P_1 et P_2, si cette droite n'est pas parallèle à d, alors elle l'intersecte en un point que l'on dénote par O. On cherche un point P_3 de la droite d qui est tangent au cercle cherché. Par le théorème de la puissance d'un point, on a donc :

$$OP_1 \cdot OP_2 = OP_3^2 \quad \Rightarrow \quad OP_3 = \sqrt{OP_1 \cdot OP_2}$$

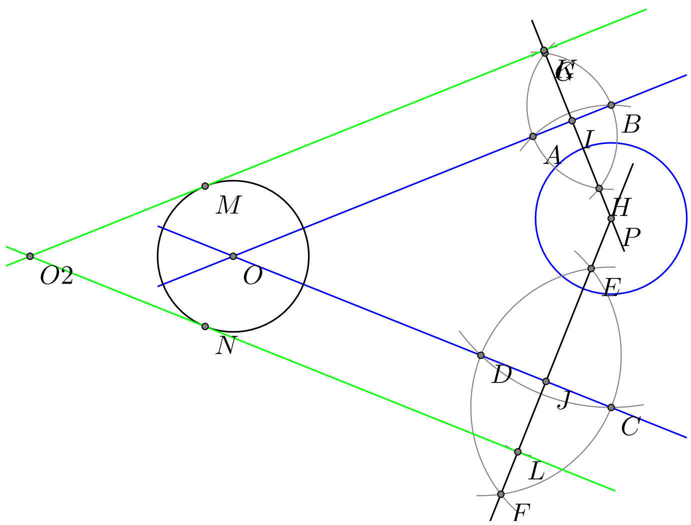
On sait donc trouvé le point P_3 à l'aide d'une règle et d'un compas. Une fois que nous avons trouvé le point P_3, le problème se ramène donc au problème PPP, c'est à dire trouver un cercle passant par P_1, P_2 et P_3.

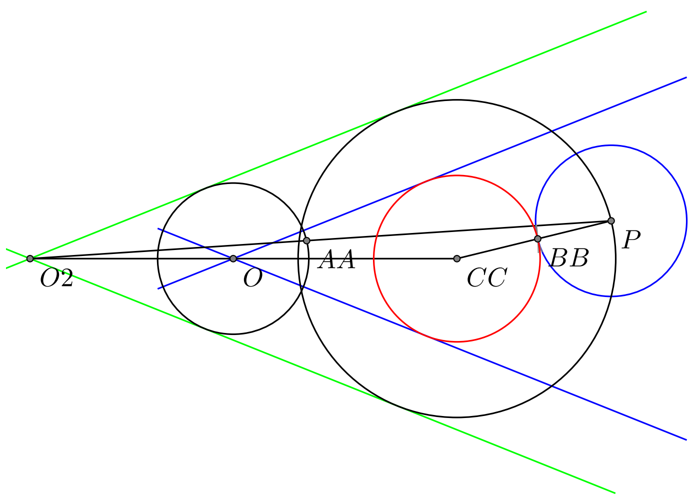


Le cas particulier où la droite passant par P_1 et P_2 est parallèle à la droite d doit être traiter séparément. Dans ce cas, il est facile de voir que le point P_3 doit être à égal distance des points P_1 et P_2. Il doit donc être à l'intersection de la médiatrice de $P_!P_2$ et de la droite d. Le problème ce ramène donc à nouveau à PPP.

Construction 5.1.5. **(DDC)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle tangent à deux droites et tangent à un cercle.

La méthode : L'idée est de transformer le problème en DDP. Ceci peut être accomplie en remplaçant le cercle donné par son centre, et en remplaçant chacune des droites donnés par des droites parallèles de sorte que le centre du cercle que nous cherchons reste le même.

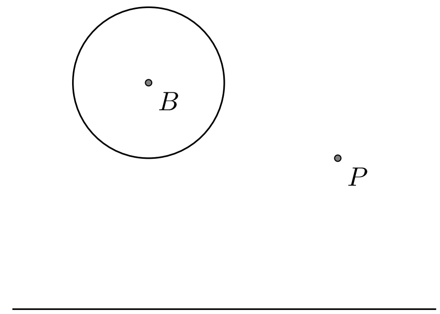




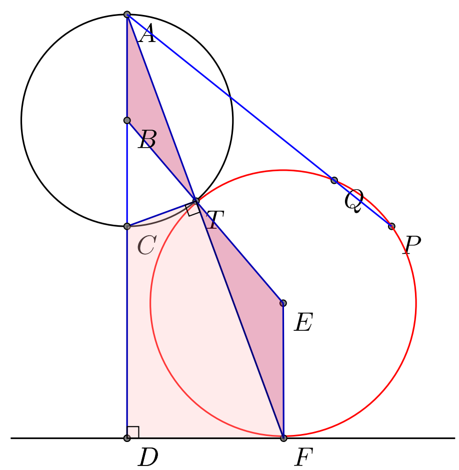
Construction 5.1.6. **(PDC)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle passant par un point, et tangent à une droite et un cercle donnés.

Ce problème peut être résolu de deux manières différentes. La première idée consiste à faire appel à la puissance d'un point et la théorie des quadrilatères inscriptibles. La deuxième méthode consiste à utiliser l'inversion.

Première méthode : On cherche un cercle passant par le point P ci-contre, et tangent au cercle de centre B et à la droite d. Pour ce faire, nous allons commencer par supposer le problème résolu, ce qui devrait nous permettre d'obtenir des idées sur la méthode de résolution.



Supposons que la solution du problème est le cercle de centre E en rouge ci-contre. On commence par dessiner une droite perpendiculaire à d et passant par B. Cette droite croisera le cercle de centre B en deux points que nous dénotons par A et C. Ensuite, supposons que le point de tangence entre nos deux cercles est le point T, et dessinons les droites AT et BT. Les deux cercles on une tangente commune au point T, ce qui nous permet d'affirmer que les points B, T et E sont sur une même droite (car la tangente est perpendiculaire aux rayons). Maintenant, la droite AT croise le cercle rouge en un second point que nous dénotons par F. Comme les triangles ABT et TEF sont tout deux isocèles, il n'est pas très difficile de voir que ces deux triangles sont semblables par AA. On obtient donc que EF est parallèle à AB, et donc EF est perpendiculaire à la droite d.



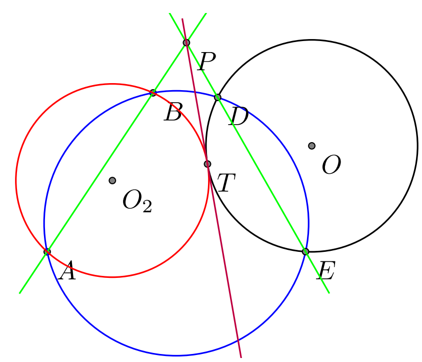
Le point F est donc le point de tangence du cercle rouge avec la droite d. Maintenant, remarquons que l'angle CTA est droit, et donc le quadrilatère $CTFD$ est inscriptible dans un cercle (Car deux angles opposés sont droits. Par la puissance de A par rapport à ce cercle, on obtient $AC \cdot AD = AT \cdot AF$. Maintenant, si on dessiner la droite AP, elle croise le cercle rouge en un second point que l'on dénote Q. Comme le produit $AT \cdot AF$ représente aussi la puissance de A par rapport à notre cercle rouge, on obtient l'égalité $AT \cdot AF = AQ \cdot AP$. Maintenant, en combinant nos deux égalités, on obtient $AC \cdot AD = AQ \cdot AP$. Comme il est facile de trouver les points A, C et D à l'aide d'une règle et d'un compas, et que le point P est déjà connu, ceci nous permet donc de trouver Q, un second point sur le cercle cherché. Une fois Q trouvé, le problème est donc ramener soit à PPD et PPC selon notre préférence.

Deuxième méthode : Il est possible d'utiliser l'inversion pour résoudre ce problème. Si le cercle et la droite possède au moins un points d'intersection O, on effectue l'inversion selon un cercle de centre O, ce qui nous permet de ramener le problème à PDD. Un fois ce problème résolu, il suffit de faire à nouveau l'inversion par rapport au même cercle pour obtenir la solution du problème. Dans le cas ou le cercle et la droite n'ont aucun point d'intersection, on transforme le problème en DCC en effectuant des homotéties et translation approprié. On fait ensuite l'inversion selon un cercle de centre O où O est un point d'intersection entre la droite et un cercle. Le problème est alors transformé en DDC. Après avoir résolution ce problème, on refait l'inversion ce qui nous permet de trouver le centre du cercle recherché. Les détails vous sont laissé en exercices.

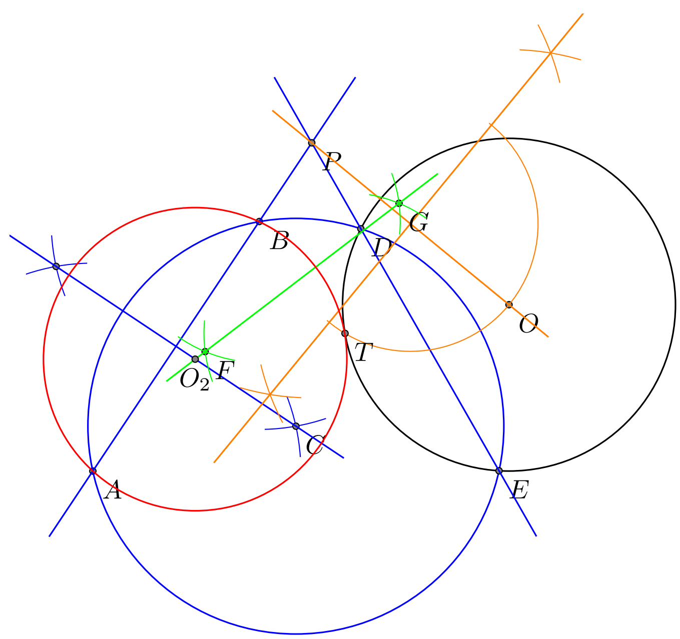
Construction 5.1.7. **(DCC)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle tangent à une droite et à deux cercles donnés.

La méthode : Il s'agit de réduire le plus petit des deux cercles à un point, et d'ajuster la droite et l'autre cercle en conséquence de sorte que le centre du cercle cherché reste le même. Le problème peut donc être ramené à PDC ou PPD dépendant que les deux cercles donnés ont le même rayon ou non.

Construction 5.1.8. **(PPC)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné.

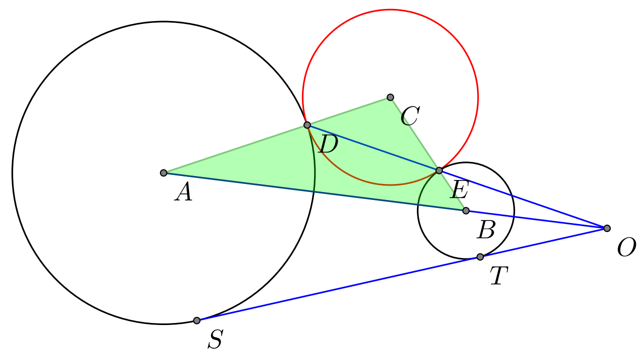


La méthode : La méthode consiste à utiliser la notion d'axe radical. Supposons que nous cherchons un cercle tangent au cercle noir sur la figure et qui passe par les point A et B. Remarquons que le problème est résolu du moment que nous trouvons le point de tangence des deux cercles. Supposons que la solution du problème est le cercle en rouge, et dénotons par T le point de tangence entre le cercle noir et le cercle rouge. De plus, dessinons un troisième cercle en bleu qui passe lui aussi par A et B, et qui coupe le cercle noir en deux points que l'on dénote D et E. Si P est le point d'intersection entre les droites AB et DE, alors P est un point de l'axe radical entre le cercle rouge et le cercle noir. Comme l'axe radical des cercles rouge et noir doit être tangente aux deux cercles et passer par leur point de tangence, alors il suffit de trouver un point T qui de sorte que la droite PT soit tangent au cercle noir. Une fois que le point T est trouvé, le problème se ramène donc à trouver un cercle passant par A, B et T, c'est à dire que le problème se ramène à PPP. Ci dessous la solution complète du problème.



Construction 5.1.9. **(PCC)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle tangent à deux cercles donnés et passant par un point donné.

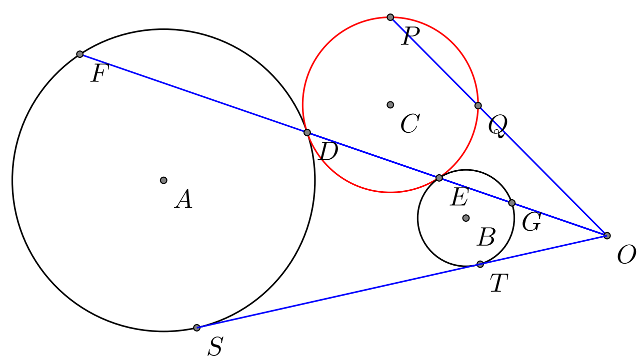
Première méthode : Dans un premier temps, considérons trois cercles de centre respectif A, B et C, et de rayon r_1, r_2 et r_3. Supposons aussi que les cercles de centre A et C sont tangent en un point D, et les cercles de centre B et C sont tangent en un point E. Supposons que S et T sont des points des cercles de centre A et B respectivement de sorte que la droite ST soit tangente à ces deux cercles. Dénotons le point d'intersection des droites AB et ST par la lettre O. Il est facile de remarquer que O est en fait le centre d'un homothétie permettant de transformer le cercle de centre B en le cercle de centre A. Notons le facteur d'homothétie par la lettre k. On veut montrer que la droite DE passe elle aussi par le point O. Pour ce faire, nous appliquons le théorème de Ménélaus au triangle ABC. On a donc :



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BO}}{\overline{OA}} = \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{-1}{k} = \frac{r_1}{r_2} \frac{-1}{k} = k \cdot \frac{-1}{k} = -1$$

On peut donc affirmer que les points D, E et O sont alignés.

Maintenant, dénotons les autres points d'intersection de la droite DE avec les cercles de centre A et B par les lettre F et G respectivement, et supposons que P et Q sont des points du cercle de centre C de sorte que les points P, Q et O soient aligné. En utilisant la puissance d'un point, on obtient donc :



$$\begin{aligned} OP \cdot OQ &= OD \cdot OE = k \cdot OG \cdot OE = k \cdot OT^2 \\ &= \frac{OS}{OT} \cdot OT^2 = OS \cdot OT \end{aligned}$$

À partir d'une droite tangente aux deux cercles, ainsi que la droite passant par le centre des deux cercles, on peut trouver le centre d'homotétie O. En dénotons par S et T les points d'intersection de la tangente avec chacun des cercles, l'équation $OP \cdot OQ = OS \cdot OT$ nous permet de déterminer la position du point Q. Le problème se ramène donc au problème PPC, c'est à dire à trouver un cercle passant par P et Q et tangent à l'un des deux cercles (au choix).

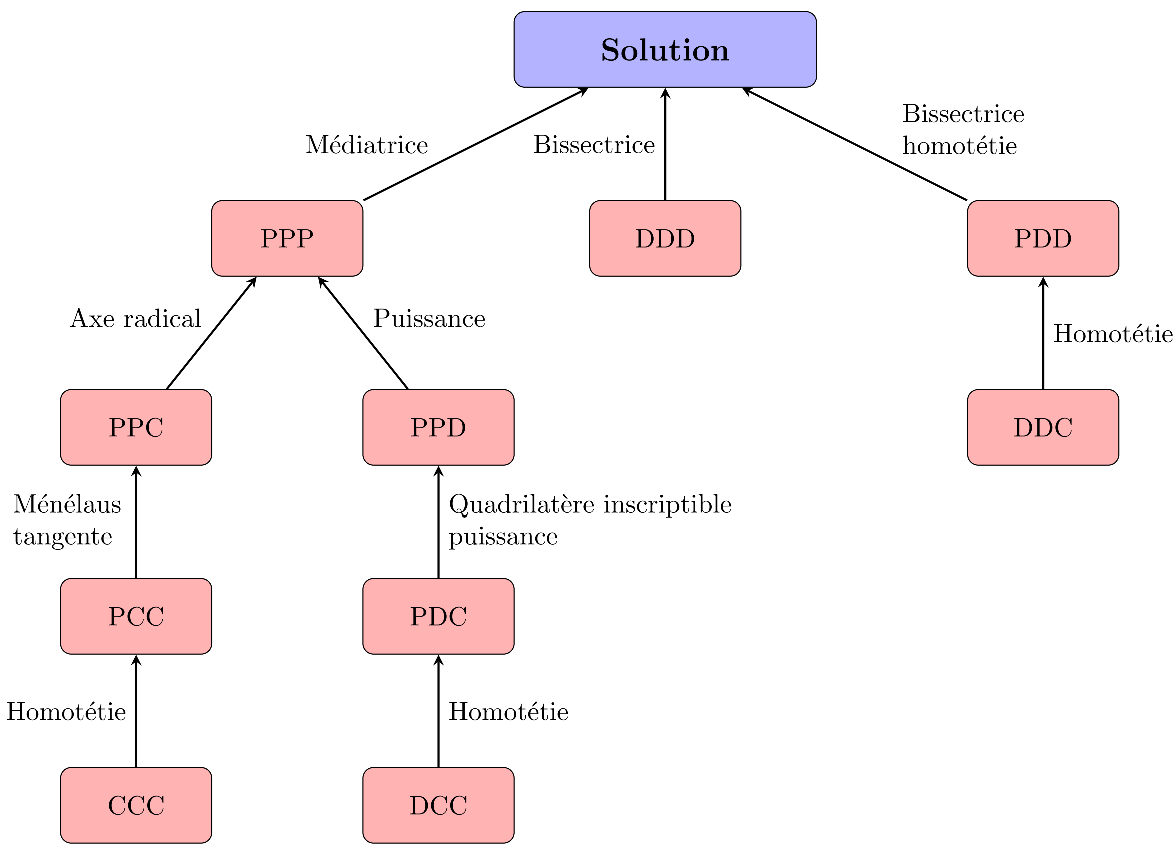
Deuxième méthode : Il est aussi possible de résoudre ce problème à l'aide de l'inversion. Si les deux cercles se coupent en un point O, on effectuant un inversion selon un cercle centré en O ce qui nous permet de transformer le problème en PDD. Si les deux cercles n'ont pas de point d'intersection, il faut premièrement effectuer un homothétie pour chacun des cercles ce qui transforme le problème en CCC, puis on effectue l'inversion selon un cercle centré sur l'un des points d'intersection ce qui nous permet de transformer le problème en DDC. Les détails vous sont laissé en exercices.

Construction 5.1.10. **(CCC)** À l'aide d'une règle et d'un compas, dessiner un cercle tangent à trois cercles donnés.

La méthode : Il s'agit de rapetisser le rayon de chacun des cercles par r_1 où r_1 est le rayon du plus petit cercle. Ceci nous permet de ramener le problème à PCC que nous savons déjà résoudre.

Résumé des 10 problèmes

Pour conclure cette section, voici un diagramme résumant les différentes méthodes que nous avons utilisé dans cette section pour résoudre les problèmes d'Appolonius.



5.2 Les trois problèmes des grecques

À ce point ci dans le cours, vous devriez être convaincu qu'il est possible de faire vraiment beaucoup de constructions intéressantes à l'aide uniquement d'une règle non gradué et d'un compas. En fait, on a l'impression qu'il est possible de construire essentiellement n'importe quoi à l'aide de ces deux outils.

Pourtant, durant l'antiquité, trois problèmes de construction à l'aide du compas et d'une règle non gradué ont causé beaucoup de mot de tête aux mathématiciens grecques. On surnommes aujourd'hui ces trois problème par l'expression **les 3 problèmes des grecs**. Il fallut attendre environ 2000 ans la découverte de l'algèbre moderne, et en particulier la théorème des extensions de corps, pour démontrer qu'aucune de ces trois constructions ne peuvent être réalisé à l'aide uniquement d'une règle non gradué et d'un compas. Ces trois problèmes sont les suivant :

1. **La trissection de l'angle :** Est-il possible de couper un angle en 3 angles congrus ? Il est facile de voir que dans certain cas bien particulier, par exemple s'il s'agit d'un angle de 90^o, la construction est possible. Par contre, dans la grand majorité des cas, et en particulier lorsque aucune information n'est connu sur l'angle, la construction est impossible.
2. **La duplication du cube :** Si un cube est donné, est-il possible de dessiner un autre cube ayant un volume deux fois plus grand ? Remarquer que ce problème revient en fait à ce demander s'il est possible de construire à l'aide d'une règle non gradué et d'un compas la racine cubique d'un nombre. Tout comme pour la trissection de l'angle, ce problème est impossible. Une légende attribue l'origine du problème aux habitants de Delos qui aurait consulté un oracle à Delphi à propos de vaincre une peste envoyé par Apollo. L'oracle leur aurait répondu qu'il devait doubler la taille d'une autel dédié à Apollo. L'autel ayant une forme cubique, le problème est donc équivalent à la duplication d'un cube.
3. **La quadrature du cercle** Si un cercle est donné, est-il possible de dessinez un carré ayant la même aire que le cercle. Ce problème revient en fait à ce demander s'il est possible de construire un segment de longueur π. Il s'agit du dernier des trois problèmes à avoir été complètement résolu, et comme pour les deux premiers, la réponse est négative.

Pour les trois problèmes, l'idée de la démonstration est la même. il est facile de voir que connaissant un segment de longueur 1, il est possible de construire un segment correspondant à la longueur de chacun des nombres rationnels positifs. On dira donc que $\mathbb{Q}$ est constructible. De plus, il est possible de construire la racine carré de 2, et donc tout les nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b rationnels. On dira donc que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est constructible. De la même manière, on peut aussi construire $\sqrt{3}$. On dira donc que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ est constructible. On obtient donc une suite de corps :

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \subseteq ...$$

C'est ce qu'on appelle des extensions de corps. On étudie ensuite les propriétés de ces extensions en terme de dimension d'espace vectoriel, ce qui nous permet éventuellement de démontrer que certain nombre ne peuvent pas être construit à l'aide uniquement d'une règle non gradué et d'un compas. Cette idée de démonstration est du à Wantzel (1837) et permis de résoudre entièrement les deux premiers problèmes. L'idée s'applique aussi au troisième problème, i.e. la quadrature du cercle, mais il fallu attendre que Ferdinand von Lindemann en 1882 démontre que π est transcendant pour que la démonstration soit vraiment complète. Noté qu'un nombre est transcendant par définition s'il n'est la racine d'aucun polynôme. La démonstration complète de ces résultats sont cependant trop avancé pour le cours. Les étudiants intéressé peuvent consulter des livres d'algèbre moderne pour trouver une démonstration complète.

5.3 Les polygones constructibles

Nous avons vu dans les chapitres précédents, ainsi qu'en devoir, qu'il est possible de construire plusieurs polygones réguliers. Par contre, nous n'avons toujours pas adressé la question de savoir comment construire un heptagone régulier, un ennéagone régulier, ainsi qu'un hendécagone régulier. La raison en est fort simple. Tout comme les trois problèmes de grecques, la construction de ces trois polygones régulier est impossible en faire en utilisant uniquement une règle non gradué et un compas. Parmi les polygones réguliers de 3 à 12 côtés, ces trois polygones sont d'ailleurs les seuls qui ne peuvent pas être construit. La question devient alors de savoir quel polygone régulier sont constructible à l'aide uniquement d'une règle non gradué et d'un compas. La méthode de résolution du problème utilise à nouveau de notion d'algèbre moderne et d'extension de corps malheureusement trop avancé pour le cours. Par contre, la solution mérite tout de même d'être mentionné.

Théorème 5.3.1. Un polygone régulier à n cotés est constructible si et seulement si $n = 2^k p_1 p_2 ... p_m$, où k est un entier positif (possiblement nul) et les p_i sont des nombres premier distincts de Fermat. Un nombre premier de Fermat est un nombre premier de la forme $2^{2^j} + 1$. Les seuls nombres premiers de Fermat connu sont : 3, 5, 17, 257 et 65537, mais nous ne savons toujours pas s'il en existe d'autre.

Il est intéressant de voir qu'il existe une relation curieuse entre la question d'être constructible et celle des nombres premiers. Nous avons vu que la construction du pentagone régulier, déjà connu à l'époque d'Euclide, a été tout un tour de force. Loin d'être évidente, cette construction est sans doute l'un des plus grand accomplissement des mathématiques de l'antiquité. La construction de l'heptadécagone (17 côtés) est encore plus difficile, et fut réalisé pour la première fois par le mathématicien Gauss à l'âge de 19 ans. Il s'agissait alors de la première découverte majeur concernant les constructions règles et compas depuis près de 2000 ans. Gauss était si fière de sa découverte qu'il demanda à ce qu'un heptadécagone soit gravé sur sa tombe après son décès. Cette demande fut cependant rejeté du à la grande difficulté à graver une telle figure.

5.4 Constructions avec seulement un compas ou seulement une règle

Depuis le début du cours, nous nous sommes intéressé à la question de construction à la règle (non gradué) et au compas. Il est maintenant temps de se poser une autre question importante. Qu'arrive-t-il à ces constructions si nous oublions l'un de ces deux outils. En d'autre mots, qu'elles sont les constructions qu'il est possible de faire en utilisant uniquement une règle non gradué, ou uniquement un compas. À la grande surprise de plusieurs, toutes les constructions réalisable à l'aide d'une règle et d'un compas peuvent être réaliser en utilisant uniquement un compas (théorème de Mascheroni). Ce n'est cependant pas le cas pour la règle, en effet il est facile de voir qu'il n'est pas possible de dessiner $\sqrt{2}$ en utilisant seulement une règle. Par contre, il est possible d'effectuer n'importe quelle construction réalisable avec règle et compas à l'aide seulement d'une règle à condition qu'un cercle (de rayon quelconque) et son centre nous soit fourni (Théorème de Steiner).

Il y a cependant quelques points important à mentionner. Il n'est certainement pas possible de dessiner un segment ou une droite en utilisant uniquement un compas, de même qu'il n'est certainement pas possible de dessiner un cercle en utilisant seulement une règle. En ce basant sur les axiomes d'Euclide, nous allons donc considérer qu'un segment (ou une droite) est définie du moment que nous avons trouver deux points. De même pour un cercle, nous considérons qu'il est définie du moment que nous connaissons son centre ainsi qu'un point du cercle.

Théorème 5.4.1. **(Théorème de Mascheroni)** Il est possible de construire à l'aide uniquement d'un compas toutes les constructions réalisable à l'aide d'une règle et d'un compas.

Démonstration. Il est facile de réaliser qu'une construction à l'aide d'une règle non gradué et d'un compas revient à effectuer les trois opérations suivantes :

1. Trouver l'intersection de deux droites.
2. Trouver l'intersection entre une droite et un cercle.
3. Trouver l'intersection entre deux cercles.

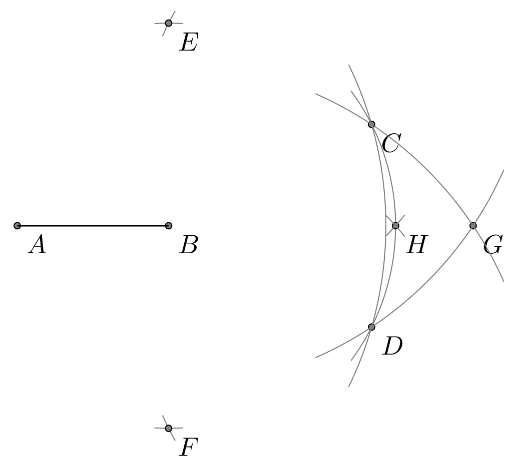
Le théorème de Mascheroni sera donc démontré si nous pouvons montrer que ces trois constructions sont réalisable à l'aide uniquement d'un compas. Il est évident qu'il est possible de trouver le point d'intersection de deux cercles en utilisant uniquement un compas. Ce sont donc les deux autres constructions qui nous intéresse. C'est ce que nous allons faire dans les prochaines constructions. □

Construction 5.4.1. Si des segments de longueurs a et b nous sont donné, construire à l'aide uniquement d'un compas un segment de longueur $a + b$.

La méthode : Supposons donné des segments de longueurs a et b respectivement.

1. Choisir des points A et B tel que la distance entre A et B est a.
2. Dessiner un arc de cercle de rayon b centré en B, et choisir un point C sur cet arc de cercle.
3. Dessiner un arc de cercle de rayon AC et centré en A. On dénote le (nouveau) point d'intersection avec l'arc de l'étape 2 par D.
4. On dessine un arc de cercle de rayon CD centré en B, ainsi que arc de cercle de rayon BD et centré en C. L'intersection de ces deux arcs est dénoté E.
5. On dessine un arc de cercle de rayon CD centré en B, ainsi que arc de cercle de rayon BC et centré en D. L'intersection de ces deux arcs est dénoté F.
6. On dessine un arc de cercle de rayon FC centré en F et un arc de cercle de rayon ED centré en E. Le point d'intersection des ces deux arcs est dénoté G.
7. On dessine un arc de rayon BG centré en F, et un arc de rayon BG centré en E. Le point d'intersection de ces deux arcs est dénoté H.
8. AH est un segment de longueur $a + b$.

Démontrer que la construction est correcte. Indice : Le point clé de la démonstration est de réaliser que $EBDC$ et $FDCB$ sont des parallélogrammes et $EFDC$ est un quadrilatère inscriptible. Il faut ensuite appliquer le théorème de Ptolémée.



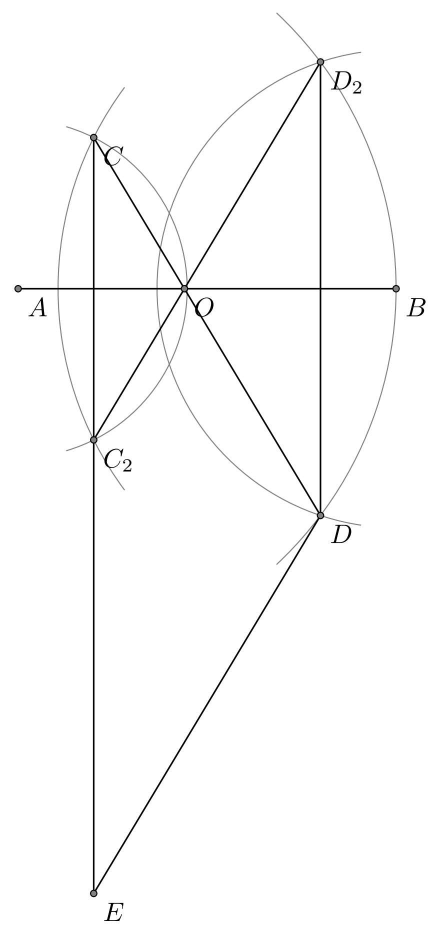
Construction 5.4.2. Si des segments de longueurs a, b et c respectivement nous sont donné, alors la construction ci-dessous nous permet de trouver un segment de longueur x où $\frac{x}{c} = \frac{a}{b}$.

La méthode : Supposons donné des segments de longueurs a, b et c.

1. Choisir un point O.
2. Dessiner un cercle Γ_1 de centre O et de rayon de longueur a
3. Dessiner un cercle Γ_2 de centre O et de rayon de longueur b
4. Choisir un point A sur le cercle Γ_2, et trouver à l'aide du compas un point B sur le cercle Γ_2 de sorte que la longueur du segment AB soit c.
5. Choisir un point C sur le cercle Γ_1 et trouver à l'aide du compas un point D sur Γ_1 de sorte que $AC \cong BD$.

6. Le segment CD est de longueur x.

Construction 5.4.3. Si des points A, B, C et D nous sont donné, trouver à l'aide uniquement d'un compas le point d'intersection des droites AB et CD.



La méthode :

1. Supposons que A, B, C et D sont 4 points donnés du plan.
2. On commence par dessiner la réflexion des points C et D par rapport à la droite AB, ce qui nous permet d'obtenir des points C_2 et D_2.
3. Trouver un point E de sorte que EC_2D_2D soit un parallélogramme.
4. Appliquer la construction précédente pour trouver x tel que $\dfrac{x}{CC_2} = \dfrac{CD}{CE}$
5. Dessiner des cercles centrés en C et C_2 tout deux de rayon x. Le point d'intersection O de ces deux cercles est le point d'intersection recherché.

La démonstration :

1. Le point clé est de réaliser que les triangles CC_2O et DD_2O sont semblable, et donc leur côtés sont proportionnels. On a donc $\dfrac{CC_2}{CO} = \dfrac{DD_2}{DO}$.
2. En remarquant que $DO = CD - CO$ et en remplaçant dans l'équation précédente, on obtient donc :
$$\frac{CC_2}{CO} = \frac{DD_2}{CD - CO} \quad \Rightarrow \quad \frac{CO}{CC_2} = \frac{CD}{CC_2 + DD_2}$$
3. Maintenant, comme $C_2E = DD_2$, on obtient donc :
$$\frac{CO}{CC_2} = \frac{CD}{CE}$$

Construction 5.4.4. Si des points A, B, C et D nous sont donné, trouver à l'aide uniquement d'un compas le point d'intersection du cercle centré en A et passant par B, et la droite passant par C et D.

La méthode : Cette construction vous est laissé en exercice.

Le théorème de Mascheroni que nous venons d'étudier nous affirme que toutes les constructions réalisable à l'aide d'une règle et d'un compas peuvent être réaliser à l'aide uniquement d'un compas. Le question se pose maintenant de savoir s'il est possible d'effectuer toutes ces construction à l'aide uniquement d'une règle non gradué. La réponse est bien entendu non car il est impossible en particulier d'effectuer une racine carré. Le théorème de Steiner que nous allons énoncé ci-dessous sans démonstration nous affirme cependant que ceci est presque possible.

Théorème 5.4.2. **(Théorème de Steiner)** Il est possible de construire à l'aide uniquement d'une règle non gradué toutes les constructions réalisable à l'aide d'une règle et d'un compas à condition qu'un cercle et son centre nous soit donné.

Chapitre 6

Vers la géométrie projective

6.1 Dessin en perspective

Depuis le début du cours, nous nous sommes intéressé à la géométrie euclidienne. Cette dernière établie à partir des 5 axiomes d'Euclide, qui mettent en évidence l'importance de la règle non gradué et du compas. Pourtant, au chapitre précédent, nous avons vu le théorème de Mascheroni (Théorème 5.4.1), qui nous affirme qu'il est possible de réaliser à l'aide uniquement d'un compas toute les constructions que nous pouvons faire à l'aide d'une règle non gradué et d'un compas. Le contraire n'est cependant pas vrai. Bien que le théorème de Steiner (Théorème 5.4.2) nous affirme que toutes les constructions que nous pouvons faire à l'aide d'une règle non gradué et d'un compas peuvent être réalisé à l'aide uniquement d'un compas à condition qu'un cercle et son centre nous soit donné, le problème générale n'est pas possible. Une simple règle non gradué n'est pas suffisante. La raison vient du fait que le compas est nécessaire pour mesurer une distance. Cette notion de distance est essentielle en géométrie euclidienne.

Pourtant, il y a de nombreuse construction qui peuvent être réalisé en utilisant uniquement une règle non gradué. En particulier des problèmes dans lesquels les distances et les parallèles sont déformés. C'est ce qu'ont découvert des artistes italiens au 15^e siècle. Si on dessine une scène en préservant les distances et les parallèles, la perspective sera incorrecte et le résultat obtenu n'aura rien de convainquant. Regarder par exemple le plancher en damier sur le dessin "The birth of St Edmund" [1] qui date du 15^e siècle, les droite sont dessinées parallèles et chaque carré de même grandeur, et pourtant la perspective 3 dimension n'a rien de convainquant.

Par contre, lorsque l'on regarde une photo réelle, comme la photo d'une rue à Halifax, on remarque que les droites sont bien traduite sous forme de droite, mais celle qui devraient normalement être parallèles se rencontre en fait à un point à l'horizon que l'on appelle point à l'infinie. Ceci n'est en fait qu'une conséquence de la projection d'un univers en 3 dimension sur le senseur d'un appareil photo. Pour étudier ce phénomène,

(a) The birth of St Edmund, Angleterre, 15^e siècle

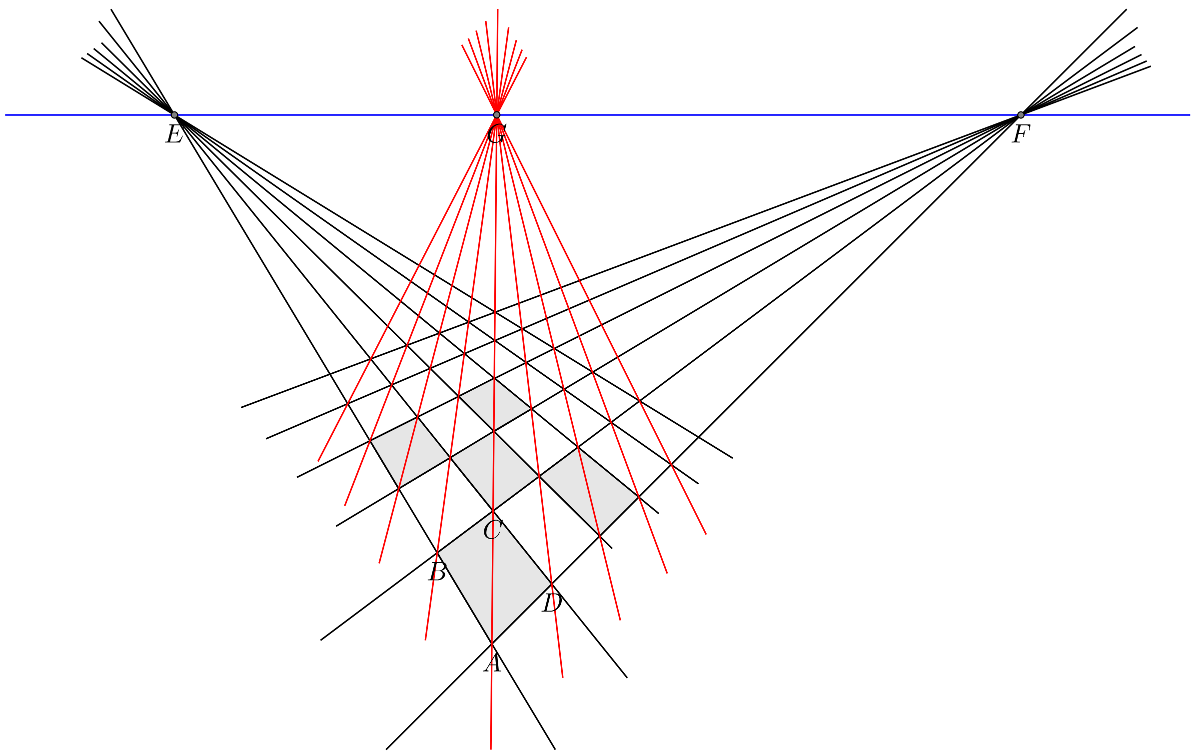
(b) Photo d'une rue à Halifax, NS

FIGURE 6.1 – Image sans perspective à gauche, puis avec perspective à droite

1. Bien que cette image soit libre de droit d'auteur, l'idée de l'utiliser pour illustrer l'absence de perspective provient de [11]

on est donc amener à étudier une géométrie différente de celle d'Euclide que l'on appelle géométrie projective. Une géométrie dans laquelle la mesure des distances n'est pas importante, et donc l'utilisation du compas n'est pas nécessaire.

Pour illustrer cette idée, nous allons donc regarder comment construire un damier en perspective en utilisant uniquement une règle non gradué.



L'idée est de commencer avec une quadrilatère A, B, C, D que nous allons prendre comme premier carré de notre damier. Étant donné la perspective, les côtés opposés ne peuvent pas être "réellement" parallèle. En prolongeant chacun des côtés opposés, on obtient donc des points d'intersection E et F qui représente les points d'intersection de nos droites "parallèles". Il s'agit donc de point à l'infinie, et la droite E, F sera donc une droite à l'infinie. Ensuite, remarquons que les diagonales sur un damier sont aussi parallèle, et donc doivent se rencontrer sur la droite à l'infinie. En dessinant la droite A, C, on peut donc obtenir le point G qui représente l'intersection des diagonales. Pour le reste de la construction, il suffit de dessiner des droites reliant respectivement les points E, F et G à chacun des points d'intersection sur notre damier.

Cette découverte par les peintres italiens est relativement simple, mais permet de créer des peintures beaucoup plus réaliste. D'un point de vu mathématiques, il est intéressant de voir que pour dessiner un damier en perspective, il n'est pas nécessaire de mesurer quoi que ce soit, alors que la figure réelle en trois dimension devrait avoir chacune des cases de même dimension. C'est cette idée qui mena au développement de la géométrie projective.

Avant de nous lancer dans la géométrie projective proprement parlé, nous allons commencer par étudier quelques théorèmes classique de la géométrie euclidienne qui sont de nature projective, c'est à dire ne nécessite pas l'utilisation du compas. Bien qu'il ne soit pas possible dans un contexte projectif de mesurer la longueur d'un segment, il est cependant possible de parler du ratio des longueurs de deux segments se trouvant sur une même droite. Cet outil nous sera essentiel dans le reste du chapitre.

6.2 Théorème de Ceva

L'une des différence importante entre la géométrie euclidienne synthétique et la géométrie vectorielle est la notion d'orientation. Bien qu'en géométrie euclidienne synthétique, la notion d'orientation pour un segment AB ne fait aucun sens, il y a tout de même une notion d'orientation intéressante lorsque l'on parle d'un ratio. Si A, B et C sont trois points se trouvant sur un même segment, alors on définit $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ comme étant :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{AB}{AC} \text{ si } B \text{ et } C \text{ se trouve du même côté de } A.$$

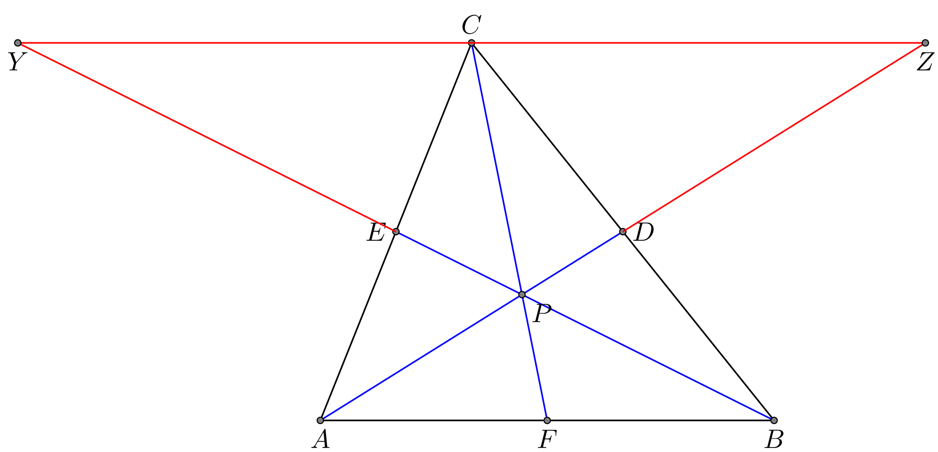
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = -\frac{AB}{AC} \text{ si } B \text{ et } C \text{ sont de côté opposé par rapport à } A.$$

Le théorème de Ceva, du nom du mathématicien italien Giovanni Ceva qui l'énonce et le démontre en 1678, est un théorème fournissant une condition nécessaire et suffisante pour déterminer si des droites passant par les sommets d'un triangle sont concourantes ou parallèles. Bien que le nom de Ceva soit resté attribué au théorème, le théorème avait été démontrer beaucoup plus tôt au XIe siècle par le roi de Zaragoza [2] Yusuf Al-Mu'taman ibn Hüd.

Théorème 6.2.1. **(Le théorème de Ceva)** Si ABC est un triangle et D, E, F sont des points se trouvant respectivement sur les côtés BC, AC et AB, alors les droites AD, BE et CF sont concourantes (i.e. se rencontre en un seul point) ou parallèle si et seulement si

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

Démonstration.
(⇒) Pour l'implication, nous avons deux cas à traiter. Commençons par supposer que les trois droites sont concourantes et nous traiterons ensuite le cas des parallèles. Dessinons une parallèle au segment AB et passant par le point C, et on dénote les points d'intersection de cette droite avec les droites BE et AD par les lettres Y et Z respectivement comme sur le schéma ci-dessous.



2. Zaragoza est une ville se trouvant dans l'actuelle Aragon en Espagne. Au XIe siècle, Zaragoza, ainsi qu'une part importante de l'Espagne, était musulmane ce qui explique que le résultat fasse partie des mathématiques arabes, mais soit rester inconnu du reste de l'Europe jusqu'à sa redécouverte par Ceva.

Comme le segment YZ est parallèle au segment AB, on peut affirmer que les triangles YCE et AEB sont semblables par AA. On peut donc affirmer que

$$\frac{YC}{AB} = \frac{CE}{EA}$$

De manière similaire, on peut affirmer que les triangles CDZ et ABD sont semblables, ce qui nous permet d'obtenir l'égalité

$$\frac{AB}{CZ} = \frac{BD}{DC}$$

Ensuite, en utilisant à nouveau le fait que YZ et AB sont des segments parallèles, par AA on peut aussi affirmer que les triangles YPC et FPB sont semblables, ainsi que les triangles ZPC et APF ce qui nous donne les égalités

$$\frac{CP}{PF} = \frac{YC}{FB} \text{ et } \frac{AF}{CZ} = \frac{PF}{CP}$$

En combinant ces quatre égalités, on peut maintenant effectuer le produit, ce qui nous donne :

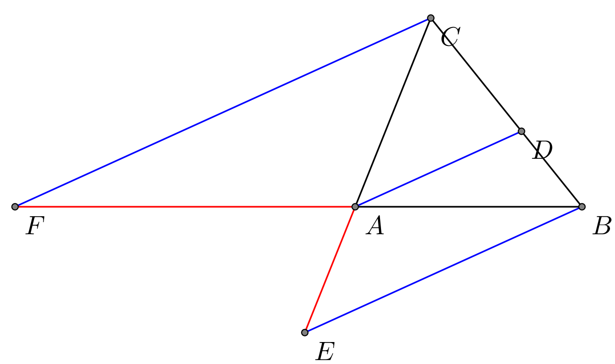
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{AB}{CZ} \cdot \frac{YC}{AB} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{YC}{CZ} = \frac{YC}{FB} \cdot \frac{AF}{CZ} = \frac{CP}{PF} \cdot \frac{PF}{CP} = 1$$

Il nous reste à vérifier que l'égalité est toujours vrai lorsque l'on considère des rapports orientés. Pour ce faire, il s'agit de remarquer que si le point P se trouve à l'intérieur du triangle, alors les trois rapports ci-dessous sont positifs.

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$$

Dans le cas contraire, quelques schémas nous permettent de se convaincre qu'exactement deux des trois rapports sont négatifs, ce qui signifie que le produit reste inchangé.

Considérons maintenant le cas où les trois droites sont parallèles, ce qui est représenté par le schéma suivant :



Comme le triangle BFC est semblable au triangle ABD, alors on a :

$$\frac{AB}{BF} = \frac{BD}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{BD}{BF} = \frac{AB}{BC}$$

De plus, comme les triangles EBC et ADC sont semblable, alors on a :

$$\frac{EC}{AC} = \frac{BC}{DC} \quad \Rightarrow \quad \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$$

Finalement, comme les triangles ACF et AEB sont semblable, alors on a :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AF}{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}$$

Ce qui nous permet d'effectuer le calcul suivant :

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{AE} \cdot \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CE}{DC} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

On peut ensuite vérifier que peut importe la configuration des parallèles, nous aurons toujours 2 des 3 ratios qui seront négatif, ce qui confirme l'égalité du théorème.

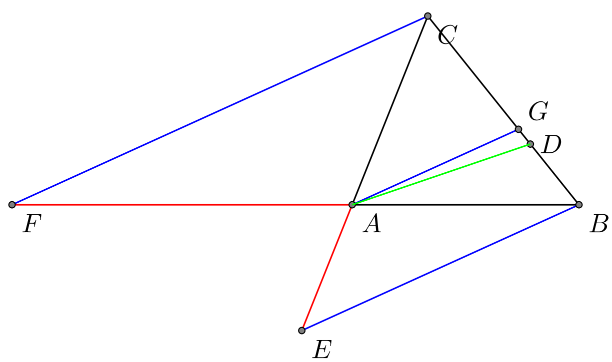
($\Rightarrow$) Pour l'autre direction, supposons que ABC est un triangle, et D, E, F des points sur les côtés BC, AC et AB respectivement. Supposons de plus que

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

On veut montrer que les droites AD, BE et CF sont concourante. Pour ce faire, nous devons à nouveau traiter deux cas. Dans un premier temps, supposons que les droites BE et CF sont parallèles, et prenons G un point de la droite BC pour lequel la droite AG est parallèle aux droites BE et CF. Par la première partie de la démonstration, nous devons donc avoir

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BG}}{\overline{GC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

En combinant les deux égalités, nous avons donc $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}$, ce qui nous permet d'affirmer (Exercice) que D et G sont en fait les mêmes points. On peut donc conclure que les droites AD, BE et CF sont parallèles.



Pour terminer la démonstration, il ne nous reste plus qu'à considérer le cas où les droites CF et BE ne sont pas parallèle, et donc possède un point d'intersection. Dans ce cas, appelons P le point d'intersection de ces deux droites, et appelons H le point d'intersection entre les droites AP et BC. Comme les droites AH, BE et CF sont concourante, la première partie du théorème de Ceva s'applique. On a donc :

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BH}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

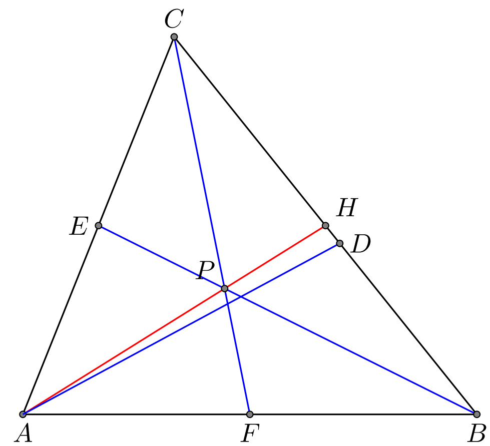
De plus, par hypothèse, nous avons aussi

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

En combinant ces deux équations, on obtient donc :

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

Ce qui nous permet d'affirmer (Exercice) que les points H et D sont en fait les mêmes points. On peut donc conclure que les droites AD, BE et CF sont parallèles.



□

Applications du théorème de Ceva

Le théorème de Ceva possède de nombreuses applications, parmis les plus notables notons entre autre le fait qu'il permet d'obtenir une démonstration alternative aux trois résultats suivant :

1. Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.
2. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
3. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

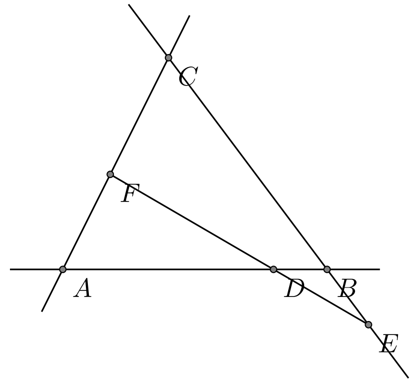
6.3 Théorème de Ménélaüs

Le théorème de Ménélaüs est sur plusieurs aspects très semblable au théorème de Ceva, mais plutôt que de permettre de vérifier que trois droites sont concourantes, il nous permet de vérifier que trois points sont alignés. Il s'agit en fait d'une des première illustration de la dualité qui existe en géométrie projective entre les droites et les points.

Théorème 6.3.1. **(Le théorème de Ménélaüs)** Si ABC est un triangle, et D, E et F des points sur les droites AB, BC et AC respectivement différent de A, B et C. Alors les points D, E et F sont aligné (i.e. sur une même droite) si et seulement si :

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = 1$$

Démonstration. Les détails de la démonstration vous sont laissé en exercice. Notez que pour l'implication, l'idée consiste à dessiner sur la figure ci-dessous une parallèle à la droite AC passant par le point B et d'utiliser les triangles semblables.



Pour l'autre direction, l'idée est semblable à ce que nous avons fait pour le théorème de Ceva. □

Applications du théorème de Ménélaüs

Tout comme le théorème de Ceva, le théorème de Ménélaüs possède de nombreuses applications. Parmi les plus importantes pour nous, on peut noter :

1. Il permet de démontrer que dans tout triangle, les points d'intersection entre les bissectrices extérieurs et leur côtés opposés sont alignés sur une même droite.
2. Il permet de démontrer le théorème de l'hexagone mystique de Pascal.
3. Il permet d'obtenir une démonstration alternative du théorème de la droite de Simson
4. Il permet de démontrer le théorème de Pappus.

6.4 Divisions et faisceaux harmoniques

Les divisions et faisceaux harmoniques jouent un rôle particulièrement important en géométrie projective. Ces derniers sont en fait relier à la notion de bi-rapport qui joue un rôle d'invariant, contrairement aux notions d'angle et de longueur qui ne sont généralement pas préservé (et n'ont d'ailleurs pas vraiment de sens) en géométrie projective.

Definition 6.4.1. Des points A, B, C et D sont dit en **division harmonique** si ces quatre points se trouvent sur une même droite et :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

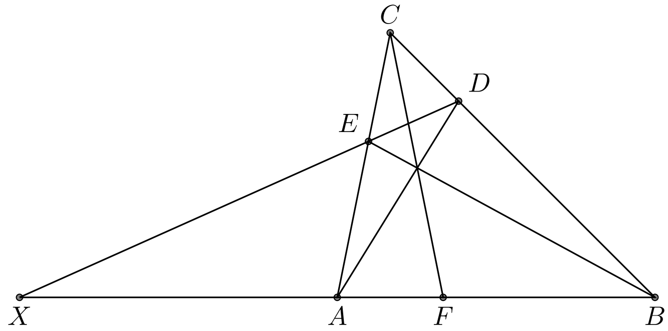
Théorème 6.4.1. Supposons que A, B, C et D sont 4 points sur une même droite et posons M le point milieu de AB. Alors, les énoncés suivants sont équivalent :

1. Les points A, B, C, D sont en division harmonique.
2. Exactement un des points C ou D est à l'intérieur du segment AB et $MB^2 = MC \cdot MD$.

Démonstration. Exercice. □

Théorème 6.4.2. Supposons que ABC est un triangle, prenons D un point sur la droite BC, E un point sur la droite AC et F un point sur la droite AB de sorte que les droites AD, BE et CF soient concourantes. Si on pose X comme étant le point d'intersection entre les droites AB et DE, alors les points A, B, F, X sont en division harmonique.

Démonstration. La démonstration vous est laissé en exercice. L'idée est d'appliquer le théorème de Ceva et le théorème de Menelaus à la figure ci-dessous.



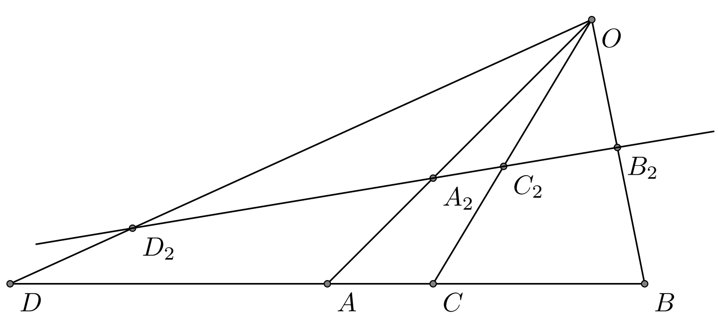
□

Definition 6.4.2. On dit que 4 droites concourantes ou parallèles forment un **faisceau harmonique** s'il existe (au moins) une droite qui leur est sécante et pour laquelle les points d'intersections forment une division harmonique.

Le théorème qui suit nous permet d'affirmer dans un faisceau harmonique, toute les sécantes traversant les 4 droites diviseront ces dernières sous forme de division harmonique. Il s'agit donc d'un invariant.

Théorème 6.4.3. Supposons que OA, OB, OC et OD sont quatre droite concourante en O et de sorte que A, B, C, D soient un division harmonique. Supposons que droite d coupe les droites OA, OB, OC et OD en des points A', B', C' et D' respectivement. Alors, les points A', B, C' et D' sont aussi en division harmonique.

Démonstration. La démonstration complète vous est laissé en exercice. L'idée est de montrer que le birapport $\dfrac{AC/BC}{AD/BD}$ peut s'écrire en terme d'aire de triangle, puis en terme de sinus. On fait ensuite de même pour le birapport $\dfrac{A'C'/B'C'}{A'D'/B'D'}$.



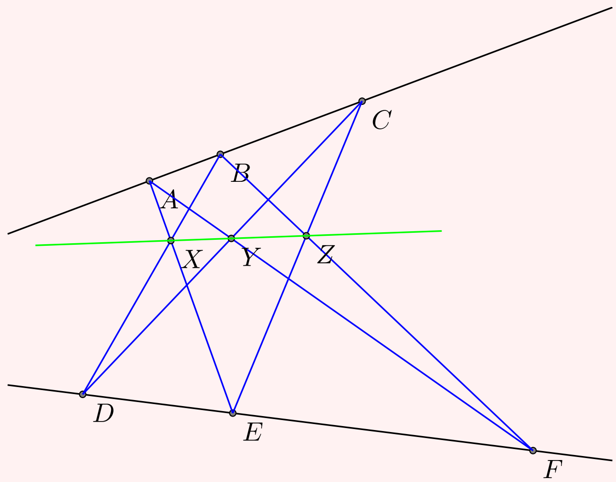
□

6.5 Théorèmes de Pappus

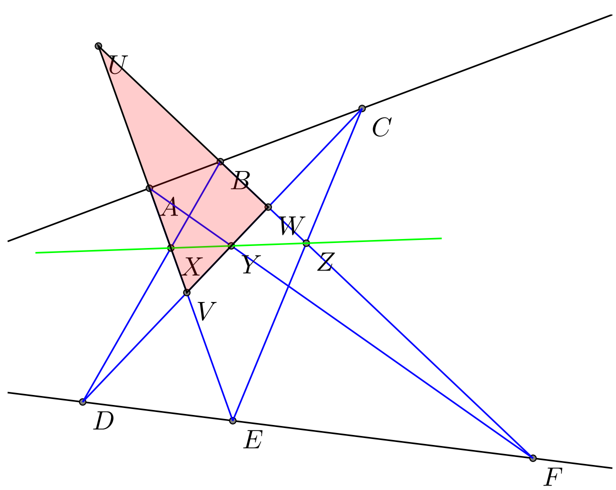
Le théorème de Pappus apparait pour la première fois dans sa forme originale dans le 7^e livre des collection de Pappus d'Alexandrie. Pappus est l'un des derniers grand mathématicien de tradition grecque de l'antiquité. Ce théorème est remarquable, car il s'énonce uniquement en terme d'intersection de droite.

Aucune référence aux angles, ou au longueur n'y apparait. Bien qu'énoncé originalement dans le contexte de la géométrie euclidienne, il s'agit donc en fait d'un théorème de géométrie projective.

Théorème 6.5.1. **(Théorème de Pappus)** Si A, B et C sont trois points d'une même droite, et de même pour D, E et F. Si on dénote par X le point d'intersection de AE et BD, on dénote par Y le point d'intersection de AF et CD, et on dénote par Z le point d'intersection de BF et CE, alors les points X, Y et Z sont sur une même droite.



Démonstration. Dans le cadre de la géométrie euclidienne, la démonstration complète est particulièrement technique du aux très nombreux cas à traiter. En effet, chaque paire de droite peuvent soit être concourante ou bien parallèle, ce qui donne lieu à plusieurs cas particulier. C'est la géométrie projective qui nous permet de grandement en simplifier la démonstration en ajoutant des points à l'infinie nous permettant donc d'affirmer que toute paires de droites ont un point d'intersection. Le démonstration vous est laissé en exercice. Considérez uniquement le cas où aucune des droites ne sont parallèle pour simplifier la démonstration. L'idée consiste à appliquer 5 fois le théorème de Ménélaus au triangle UVW illustré ci-dessous.



$\square$

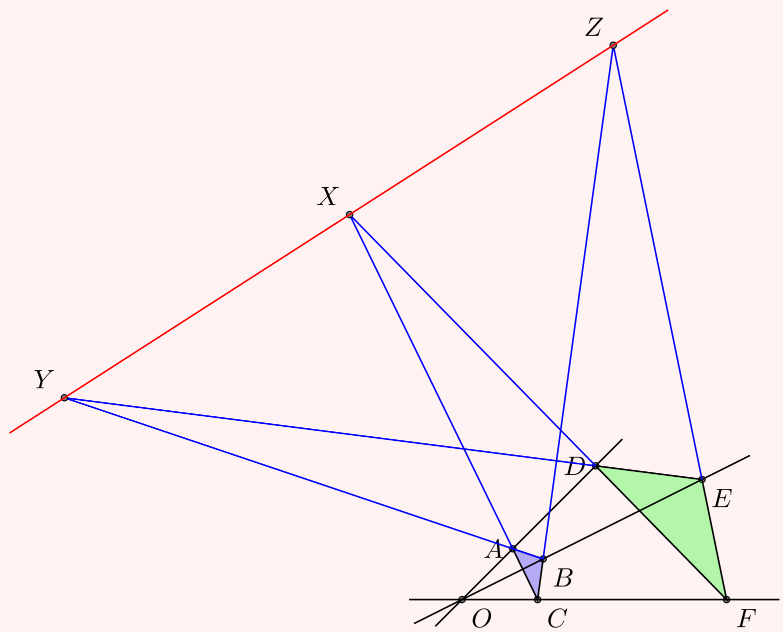
6.6 Théorème de Desargues

Le théorème de Desargues est une conséquence du théorème de Pappus qui fut découvert beaucoup plus tard dans l'histoire. Ce théorème est attribué au mathématicien Girard Desargues qui l'aurait découvert dans la première moitié du 17^e siècle, mais sans jamais le publié. Comme le théorème de Pappus, ce théorème fut originalement énoncé dans le contexte de la géométrie euclidienne, et comme ce dernier ne fait référence qu'au point d'intersection de droites, sans aucune référence aux longueurs ou aux angles. Il s'agit donc lui aussi d'un théorème qui appartient au domaine de la géométrie projective, et fait d'ailleurs directement référence à des triangles qui sont en perspective, soit selon une droite ou selon un plan.

Definition 6.6.1. On dit que des triangles ABC et DEF sont en perspective par rapport à un point si les droites AD, BE et CF s'intersectent en un point commun.

Definition 6.6.2. On dit que des triangles ABC et DEF sont en perspective par rapport une droite si les points X, Y et Z se trouve sur une même droite, où X dénote le point d'intersection de AC et DF, Y dénote le pont d'intersection de AB et DE, et finalement Z dénote le point d'intersection de BC et EF.

Théorème 6.6.1. **(Théorème de Desargues)** Si des triangles ABC et DEF sont en perspective par rapport à un point, alors ils sont en perspective par rapport à une droite.



Démonstration. La démonstration vous est laissé en exercices. Comme pour le théorème de Pappus, ne considérez que le cas où aucune droite n'est parallèle pour simplifier la démonstration. Notez que vous devez appliquer 3 fois le théorème de Pappus. Premièrement en utilisant les points BEO et SCA où S dénote le point d'intersection entre EF et AC. Ensuite vous devez appliquer Pappus en utilisant les points ADO et FSE. Finalement, vous devez appliquer Pappus aux points EAT et UPS où

1. P est le point d'intersection de DE et OS
2. T est le point d'intersection de AE et CF
3. U est le point d'intersection de AB et OS

□

6.7 La géométrie projective

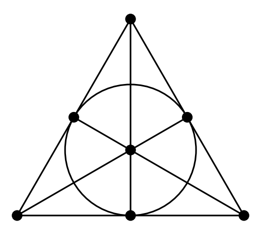
Depuis le début du chapitre, nous avons eu l'occasion de rencontrer quelques théorèmes qui sont de nature projective, mais nous n'avons pas encore proprement définie ce qu'est la géométrie projective. Seul quelque idée de base concernant la géométrie projective ont été mentionné dans le texte, comme la question des points à l'infinie, ou que toute les droites ont un point d'intersection. Pour conclure ce chapitre, nous allons finalement énoncé les axiomes du plan projectif, et mentionné quelques résultats important sans démonstration. Notez cependant que la géométrie projective est un sujet très riche, et qu'une étude complète nécessiterait au minimum quelques mois, même pour une véritable introduction au sujet.

Definition 6.7.1. Un plan projectif est un ensemble de point et de droite satisfaisant les 4 axiomes suivants :

1. Il existe (au moins) trois point qui ne sont pas sur la même droite.
2. Chaque droite contient au moins trois points.
3. Par deux points passe exactement une droite.
4. Chaque paire de droite possèdent un point en commun (i.e. un point d'intersection).

Il existe de nombreux exemples de géométrie satisfaisant les axiomes du plan projectif, mais nous en regarderons plus en détail seulement deux. Il y a cependant une remarque importante à faire avant. Il existe une conséquence importante des axiomes du plan projectif que l'on appelle le principe de dualité. De manière simplifié, ce principe nous affirme que pour tout théorème de géométrie projective, si on échange les termes points et droites (et faisons les autres ajustement nécessaire) on obtient un autre théorème valide en géométrie projective.

Exemple 6.7.1. L'exemple le plus simple de plan projectif est le plan de Fano. Il contient un ensemble de 7 points et 7 droites. C'est le nombre minimal pour satisfaire les axiomes de géométrie projective. Le plan de Fano est représenté ci-dessous, et vous devriez vous convaincre que les 4 axiomes sont bien satisfait, et qu'il s'agit bien de l'exemple de géométrie projective ayant le moins de points et droites possible.



Exemple 6.7.2. Le plan projectif réel est la géométrie obtenu en prenant tout les points et droites du plan euclidien, et en ajoutant un point à l'infini pour chacune des directions de droites. On ajoute ensuite une droite à l'infinie reliant tout les points à l'infinie. Cette géométrie ne satisfait clairement pas le 5^e axiomes d'Euclide, et n'est donc pas une géométrie euclidienne. Il est cependant facile de voir qu'il s'agit bien d'une géométrie projective. Les droites qui étaient parallèle dans le plan euclidien se rencontre maintenant à l'infinie.

Exemple 6.7.3. Le plan euclidien n'est pas un plan projectif. Le 5^e axiomes d'Euclide suppose l'existence de droite parallèle, qui par définition n'ont aucun point d'intersection. Ceci vient contredire le 3^e axiome d'un plan projectif.

6.8 De la géométrie à l'algèbre

Notre étude de la géométrie euclidienne depuis le début du texte c'est fait essentiellement de manière synthétique. C'est à dire à partir d'axiome. Bien qu'il s'agit probablement de l'approche la plus pure de la géométrie, il ne s'agit bien entendu pas de la seule. La contribution de Descartes à la géométrie euclidienne fut considérable. L'ajout d'un système de coordonné au plan et à l'espace euclidien permis d'utiliser tout les outils de l'algèbre pour l'étude de la géométrie.

Bien que nous ayons commencer notre étude de la géométrie projective aussi de manière synthétique, il est aussi possible d'introduire un système de coordonné à un plan projectif. L'idée est cependant un peu plus complexe que pour le cas euclidien. Nous allons illustré l'approche uniquement dans le cas du plan projectif réel.

Pour construire le plan projectif réel, on commence par prendre l'ensemble des points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ qui sont différent de l'origine. On introduit ensuite une relation d'équivalence $\sim$ sur cet ensemble :

$$(a, b, c) \sim (d, e, f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c}$$

Le plan projectif réel est alors l'ensemble des différentes classes d'équivalence ainsi obtenu. Les définitions analytique et synthétique du plan projectif sont bien entendu équivalente, mais cette démonstration dépasse le cadre du cours. Cette équivalence nous permet cependant d'obtenir un lien particulièrement intéressant entre géométrie et algèbre.

La procédure que nous venons d'appliquer pour construire la plan projectif réel de manière analytique peut aussi être renversé. À partir d'un plan projectif (définie synthétiquement), il est possible de construire un système de coordonné, et d'en extraire une structure algébrique. Dans le cas du plan projectif réel, il s'agit de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. C'est sur cette structure algébrique que l'on peut extraire d'un plan projectif que les théorèmes de Desargues et Pappus deviennent particulièrement intéressant. Les plans projectifs qui satisfont le théorème de Desargues sont précisément les plans projectifs qui sont obtenu à partir d'un anneau de division. Pour leur part, les plans projectifs satisfaisant le théorème de Pappus sont ceux étant obtenu à partir d'un corps.

Bien que nous ne soyons pas en mesure d'aller plus loin sur les liens entre la géométrie projective et l'algèbre moderne, nous allons tout de même mentionner sans démonstration deux théorèmes importants de géométrie projective.

Théorème 6.8.1. Si un plan projectif satisfait le théorème de Pappus, alors il satisfait le théorème de Desargues.

Théorème 6.8.2. Le plan projectif réel satisfait le théorème de Pappus.

Finalement, pour conclure ce chapitre, mentionnons qu'il n'est pas possible de démontrer les théorèmes de Pappus et Desargues pour un plan projectif quelconque, seulement dans certain cas particulier comme pour le plan projectif réel. Dans l'étude d'un plan projectif quelconque, on peut alors considérer le théorème de Desargues ou le théorème de Pappus comme axiome, ce qui nous permet d'obtenir une théorie plus riche.

Chapitre 7

Le problème du 5$^{\text{e}}$ postulat

7.1 Les axiomes d'Hilbert

Pendant plus de deux millénaires, les éléments d'Euclide étaient la référence universelle de géométrie. Aucun mathématicien sain d'esprit n'aurait osé les mettre en doute. Après tout Euclide est considéré comme le créateur de la méthode axiomatique que nous utilisons encore aujourd'hui. Pourtant, les choses ont changé au 19e siècle.

En lisant attentivement les éléments, on réalise qu'Euclide a fait plusieurs hypothèses qui semblent évidente, mais ne font pas partie des 5 postulats. Dès le premier théorème, Euclide construit un triangle équilatéral à l'une d'une règle non gradué et d'un compas. Pour ce faire, on choisit des points A et B que l'on relie en utilisant l'axiome 1. On dessine ensuite un cercle centré en A de rayon AB et un cercle centré en B de rayon AB. Ceci est permis par le 3e axiome. Ensuite, on prend C un des points d'intersection des deux cercles, puis on relie les points A et C en utilisant l'axiome 1, puis les points B et C en utilisant à nouveau l'axiome 1. Le triangle ABC est donc un triangle équilatéral. Mais pourquoi le point C existe-t-il en premier lieu ? Aucun des axiomes d'Euclide ne permettent de démontrer que les deux cercles possèdent au moins un point d'intersection. Euclide a donc fait des hypothèses autres que ces cinq postulats.

Le problème ne s'arrête pas là. Au début du premier livre, Euclide donne la définition des concepts de points et de droite (parmi d'autre).

1. Un point est ce dont la partie est nulle.
2. Une droite est une longueur sans largeur.

Bien qu'Euclide essaie de définir toute les notions qu'il utilisera, ce qui est une part importante de la méthode axiomatique, il faut admette que ces deux définitions apportent plus de questions que de réponses. Plusieurs mathématiciens du 19-20e siècle chercheront à réétablir la géométrie euclidienne sur une base solide, mais c'est l'approche d'Hilbert au tout début du 20e siècle qui eut le plus de succès.

Pour éviter le problème d'Euclide a eu avec la définition de points et de droites, Hilbert commence par identifier des classes d'éléments et des relation qui ne sont pas et ne peuvent pas être définie.

1. Les éléments :
   (a) Une classe d'objet que nous appelons points.
   (b) Une classe d'objet que nous appelons droites.
2. Les relations :
   (a) Incidence (être incident à, appartenir à, contenant, ...)
   (b) Ordre (être entre deux points)
   (c) Congruence (pour les segments et les angles)

Hilbert énonce ensuite ses axiomes qu'il regroupe en 5 catégories.

1. Les axiomes d'incidence :
   (a) Si A et B sont deux points, alors il existe une droite passant par A et B.

(b) Si A et B sont deux points distincts, alors il existe au plus une droite qui contient A et B.

(c) Une droite contient au moins deux points.

(d) Il existe au moins trois points qui ne sont pas sur une même droite.

2. Les axiomes d'ordre :

   (a) Si un point B est entre des points A et C, alors les points A, B et C sont trois points distincts d'une même droite, et B est entre C et A.

   (b) Si A et C sont des points, alors il existe un point B sur la droite AC tel que C est entre A et B.

   (c) Si trois points se trouve sur une même droite, alors il n'y a pas plus qu'un des trois points qui se trouve entre les deux.

   (d) (Axiome de Pasch) Si une droite traverse l'une des côtés d'un triangle, alors elle traverse aussi un des deux autres côtés du triangle.

3. Les axiomes de congruence :

   (a) Si A et B sont des points d'une droite a, et A' et point d'une droite a', alors il est toujours possible de trouver un point B' d'un côté de la droite de sorte que le segment AB soit congru au segment $A'B'$.

   (b) Si un segment AB est congru au segment $A'B'$ et le segment AB est aussi congru au segment $A''B''$, alors les segments $A'B'$ et $A''B''$ sont congru.

   (c) Si AB et BC sont deux segments sur une même droite n'ayant aucun point en commun sauf B, et supposons que $A'B'$ et $B'C'$ sont deux segments sur une même droite n'ayant aucun point en commun sauf B'. Si AB est congru à $A'B'$ et BC est congru à $B'C'$, alors AC est congru à $A'C'$.

   (d) Si ABC est un angle du plan et $B'C'$ une demi-droite, alors il existe deux et seulement deux demi-droites, $B'D$ et $B'E$ dans le plan telles que l'angle $DB'C'$ est congru à l'angle ABC et l'angle $EB'C'$ est congru à l'angle ABC.

   (e) Si des triangles ABC et $A'B'C'$ sont tel que AB est congru à $A'B'$, AC est congru à $A'C'$, et l'angle BAC est congru à l'angle $B'A'C'$, alors le triangle ABC est congru au triangle $A'B'C'$.

4. L'axiome des parallèles : Si d est une droite et A un point qui ne se trouve pas sur d, alors il existe au plus une droite passant par A et qui n'a aucun point en commun avec d.

5. Les axiomes de continuité :

   (a) (Axiome d'Archimède) Si AB et CD sont deux segment, alors il existe un entier n tel que n segments congru à CD construit de manière continue à partir de A sur la demi-droite AB va dépasser B.

   (b) (Axiome de complétude) Il n'existe aucune extension des points d'une droite qui satisfait les axiomes d'incidence, d'ordre, de congruence et l'axiome d'Archimède.

7.2 La géométrie neutre

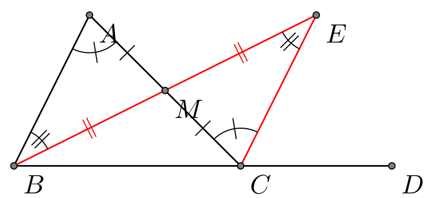
Par définition, un axiome doit être un résultat que l'on accepte sans démonstration, comme point de départ d'une théorie, car il nous parait fondamental, essentiel et surtout évident. C'est le cas des 4 premiers axiomes d'Euclide. Le cinquième postulat, celui des parallèles, est un peu différent. Il ressemble plus à un théorème que l'on doit démontrer plutôt qu'un simple axiome. Pendant des siècles, les mathématiciens on tenté de le démontrer à partir des 4 premiers axiomes. Ce n'est qu'en 1868 qu'Eugenio Beltrami démontra que l'axiome des parallèles est en fait indépendant des 4 premiers axiomes d'Euclide. Il n'est donc pas possible de le démontrer à partir des autres axiomes d'Euclide.

Avant de savoir que le 5e postulat était indépendant des autres, plusieurs tentative de démonstration eurent lieux. L'une des plus intéressante en ce qui nous concerne date du début du 19e siècle, Khayyám et Saccheri tentent de démontrer le 5e postulat par contradiction, c'est à dire en supposant sa négation. Bien que cette tentative fut infructueuse, l'idée amena Lobachevsky (1829) et indépendamment Bolyai (1831) à étudier plus en détail une géométrie dans laquelle la 5e postulat est remplacé par l'hypothèse qu'il existe plus qu'une parallèle passant par un point. Ce qu'il découvrirent fut une nouvelle géométrie, tout aussi cohérente que la géométrie euclidienne, mais possédant des théorèmes surprenant et très différent de la géométrie euclidienne.

Avant de nous lancé dans la géométrie hyperbolique, nous allons nous intéresser à la géométrie neutre. Il s'agit de l'ensemble des résultat pouvant être démontré en utilisant uniquement les 4 premiers axiomes d'Euclide. Il s'agit donc de résultat qui sont valide en géométrie euclidienne, mais aussi en géométrie neutre.

Théorème 7.2.1. La mesure d'un angle extérieur d'un triangle ABC est toujours plus grande que la mesure de chacun des angles opposés.

Démonstration. Supposons que ABC est un triangle, et D un point de la droite BC opposé au point B par rapport à C comme sur le schéma ci-dessous.



Posons M le point milieu du segment AC, et prolongeons le segment BM jusqu'à un point E de sorte que BM et ME soient congru. Par CAC, on remarque que les triangles ABM et CEM sont congrus. Les angles BAC et ACE sont congrus, ainsi que les angle ABE et BEC. On obtient donc :

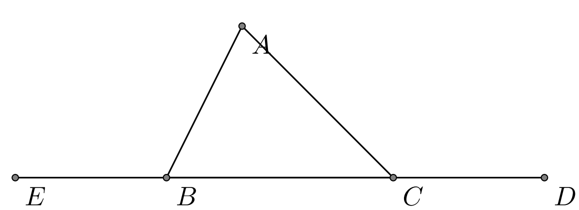
$$\angle ACD = \angle ACE + \angle ECD > \angle ACE = \angle BAC$$

De la même manière, on obtient que $\angle ACD > \angle ABC$. □

Corollaire 7.2.1. La somme des mesures de deux angles d'un triangles est toujours inférieur à 180^o.

Démonstration. Considérons un triangle ABC, et prolongeons le segment BC de chaque coté jusqu'à des points D et E respectivement. Par le théorème précédent, nous savons que $\angle EBA > \angle BCA$. Maintenant, en ajoutant $\angle ABC$ de chaque coté, on obtient :

$$180 = \angle EBA + \angle ABC > \angle BCA + \angle ABC$$



Maintenant, en appliquant à nouveau le théorème précédent, nous avons $\angle EBA > \angle BAC$. En additionnant de chaque côté par $\angle ABC$ nous obtenons :

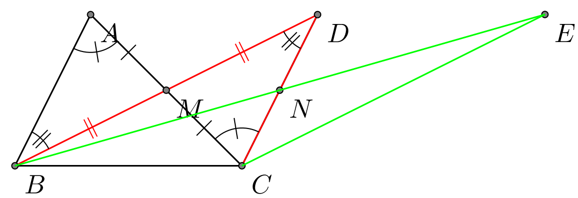
$$180 = \angle EBA + \angle ABC > \angle BAC + \angle ABC$$

De la même manière, on obtient la 3e inégalité ce qui complète la démonstration. □

Théorème 7.2.2. **(Théorème de Saccheri-Legendre)** La somme des angles d'un triangle est toujours inférieurs ou égal à 180^o.

Démonstration. Supposons que la somme des angles d'un triangle ABC est $180+p$ degré avec $p>0$. Comme la somme de deux angles d'un triangle est toujours inférieur à 180^o, un triangle peut avoir un maximum d'un angle obtenu. Sans perte de généralité nous allons supposé que l'angle ABC est aigu. Posons M le point milieu du segment AC, et trouvons un point D sur la droite BM tel que BM est congru à MD. Comme les triangles ABM et MCD sont congru par CAC, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
\text{Somme des angles}(\triangle ABC) &= \text{Somme des angles}(\triangle ABM) + \text{Somme des angles}(\triangle BMC) - 180 \\
&= \text{Somme des angles}(\triangle MDC) + \text{Somme des angles}(\triangle BMC) - 180 \\
&= \text{Somme des angles}(\triangle BDC)
\end{aligned}$$



De plus, remarquons que comme le segment BD divise l'angle ABC, nous avons soit $\angle BDC = \angle ABD \leq \frac{1}{2}\angle ABC$ ou $\angle DBC \leq \frac{1}{2}\angle ABC$. Dans les deux cas, ceci signifie que nous avons trouvé un triangle ayant la même somme des angles que $\triangle ABC$, et un angle ayant la moitié de la mesure de $\angle ABC$. En répétant le même processus au triangle BCD, on obtient donc un triangle BCE ayant la même somme des angles que le triangle ABC, mais cette fois un angle mesurant le quart de l'angle ABC. En continuant de la même façon, après n étapes nous obtenons donc un triangle ZBC ayant la même somme des angles que le triangle ABC et possédant un angles de mesure inférieur ou égal à $\frac{1}{2^n}\angle ABC$. D'après la propriété archimédienne réels, si n est suffisamment grand nous aurons $\frac{1}{2^n}\angle ABC < p$. Comme la somme des angles est par hypothèse $180+p$, ceci signifie que la somme des deux autres angles du triangle ainsi obtenu sera supérieur à 180^o ce qui contredit le corollaire. On peut donc conclure que la somme des angles d'un triangle est toujours inférieur ou égal à 180^o. □

7.3 La géométrie hyperbolique

Dans la section précédente, nous nous somme intéressé à la géométrie obtenu à partir des 4 premiers axiomes d'Euclide. Nous allons maintenant ajouter un nouvel axiome des parallèles à la géométrie neutre :

> **Axiome des parallèles de géométrie hyperbolique :** Si une droite et un point ne se trouvant pas sur la droite nous sont donné, alors il existe un infinité de droite parallèle passant par ce point.

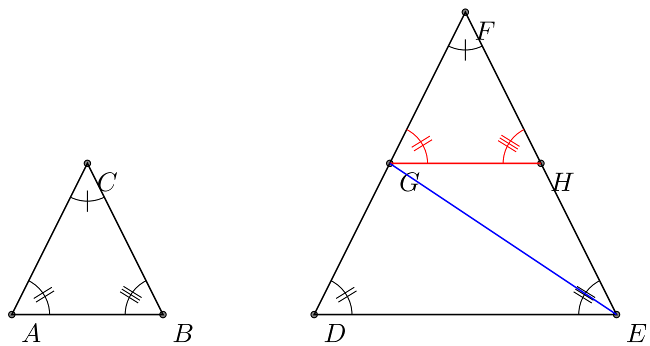
Le géométrie ainsi obtenu porte le nom de géométrie hyperbolique.

Théorème 7.3.1. La somme des angles d'un triangle est toujours strictement inférieurs à 180^o.

Démonstration. L'idée est de démontrer que s'il existe un triangle pour lequel la somme des angles est 180^o, alors la somme des angles de tous les triangles doit être 180^o. Ensuite, on démontre qu'il existe un rectangle si et seulement si il existe un triangle ayant une somme des angles 180^o. Finalement, on démontre que l'existence d'un rectangle est équivalent à l'existence d'une unique parallèle. Les détails vous sont laissé en exercice. □

Théorème 7.3.2. En géométrie hyperbolique, deux triangles sont congrus si et seulement si les angles correspondant sont congrus. En d'autre mot, en géométrie hyperbolique, deux triangles sont congrus si et seulement si AAA.

Démonstration. Prenons ABC et DEF deux triangles semblable par AAA, et supposons que ces deux triangles ne sont pas congrus. Choisissons un point G sur le segment FD de sorte que $FG \cong CA$ et choisissons un point H sur le segment FE de sorte que $FH \cong CB$. On a donc que les triangles ABC et GHF sont congru par CCC. On peut donc affirmer que $\angle FGH \cong \angle CAB \cong \angle FDE$ ainsi que $\angle FHG \cong \angle CBA \cong \angle FED$.



Maintenant, ceci signifie que $\angle DGH + \angle GDE = 180^o$ ainsi que $\angle DEH + \angle GHE = 180^o$. La somme des angles du quadrilatère $GHED$ est donc 360^o. Par le théorème précédent Nous savons que la mesure des angles du triangle $\triangle GDE$ est strictement inférieur à 180^o. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
& \text{Somme des angles}(\triangle GHE) \\
= \; & \angle HGE + \angle GEH + \angle EHG \\
= \; & \angle HGE + \angle GEH + \angle EHG + (\angle DGE + \angle GED + \angle EDG) - (\angle DGE + \angle GED + \angle EDG) \\
= \; & (\angle HGE + \angle DGE) + (\angle GEH + \angle GED) + \angle EHG + \angle EDG - (\angle DGE + \angle GED + \angle EDG) \\
= \; & (\angle HGD + \angle HED + \angle EHG + \angle EDG) - (\angle DGE + \angle GED + \angle EDG) \\
= \; & 360 - (\angle DGE + \angle GED + \angle EDG) \\
> \; & 360 - 180 = 180
\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu un triangle pour lequel la somme des angles est strictement plus grande que 180, ce qui est une contradiction. Les triangles ABC et DEF doivent donc être congrus. □

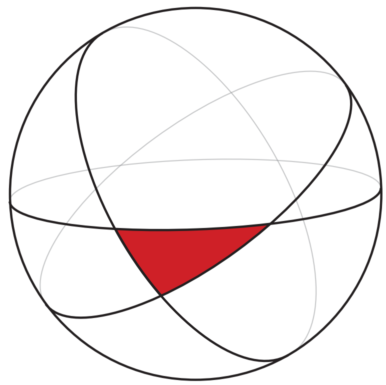
7.4 Trigonométrie sphérique

La géométrie sphérique est la géométrie obtenu lorsque l'on travaille sur la surface d'une sphère. Une telle géométrie est particulièrement importante du moment que l'on réalise que notre planète est une sphère. Il s'agit d'une géométrie particulièrement utile, entre autre dans le domaine de la navigation. Dans ce cas, il est nécessaire de redéfinir plusieurs des concepts de base de la géométrie.

- Un segment entre A et B est le plus court trajet (sur la sphère) entre ces deux points.
- Une droite est le prolongement dans les deux directions d'un segment.

Dans ce cas, on remarque qu'une droite sphérique a la particularité de n'être rien d'autre que l'un des grands cercles de la sphère. Notez que le complément d'un segment sur une droite sera lui aussi appelé segment, bien qu'il ne soit pas le plus court trajet entre deux points.

Une fois la notion de segment définie, on peut alors parler de triangle sphérique. Il s'agit alors comme en géométrie euclidienne d'une figure géométrique ayant trois sommets, et pour laquelle chacun des sommets est relié entre eux par un segment. Bien que nous ne le démontrerons pas ici, la somme des angles d'un triangle sphérique sera toujours strictement supérieure à 180 degré. Voici un exemple de triangle sphérique.



En géométrie sphérique, et plus précisément en trigonométrie sphérique, nous dénoterons pour les lettres majuscules A, B, C les trois sommets d'un triangle sphérique, et en même temps les angles formés à ces sommets. Pour ce qui est des côtés, nous les dénoterons par les lettres minuscules correspondantes a, b, c, et prenant pour convention que a est le côté opposé au sommet A, b est le côté opposé au sommet B, et de même pour c et C. De plus, par convention, toute les mesures seront donnés en radian, ce qui inclut la mesure des côtés. À noter que nous pouvons interpréter cette convention de deux manières différentes. Dans un premier temps, on peut le voir comme la véritable longueur du côté sur une sphère de rayon 1, ou de manière plus générale, on peut l'interpréter comme l'angle au centre de la sphère former par le côté du triangle.

Théorème 7.4.1. **(Loi des cosinus (I) pour les triangles sphériques)** Si A, B, C sont les trois sommets d'un triangle sphérique, et a, b, c les trois côtés tel que a, b, c sont opposés aux sommets A, B, C respectivement, alors :

- $\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$
- $\cos(b) = \cos(c)\cos(a) + \sin(c)\sin(a)\cos(B)$
- $\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C)$

Démonstration. Nous allons démontrer uniquement la première équation, mais notez que les deux autres se démontre exactement de la même façon. Prenons un triangle sphérique ayant pour sommet A, B et C. On dénote le centre de la sphère par O, et on dessine un plan tangent à la sphère passant par le point A. On dénote ensuite le point d'intersection entre la droite OB et le plan par la lettre D, et le point d'intersection entre la droite OC et le plan par la lettre E. On obtient donc des triangles planaires OAD, OAE, ODE et ADE. On remarque que les deux premiers sont des triangles rectangles, car le plan passant par les points A, D et E est tangent à la sphère. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore pour ces deux triangles, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} OD^2 &= OA^2 + AD^2 \\ OE^2 &= OA^2 + AE^2 \end{aligned}$$

Maintenant, pour les deux autres triangles, on applique la loi des cosinus pour les triangles planaires :

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE\cos(A) \\ DE^2 &= OE^2 + OD^2 - 2OD \cdot OE\cos(DOE) \end{aligned}$$

On peut maintenant comparer ces deux dernières équations, tout en notant que l'angle DOE est tout simplement a.

$$AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE\cos(A) = OE^2 + OD^2 - 2OD \cdot OE\cos(a)$$

En réarrangent les termes, on obtient ensuite :

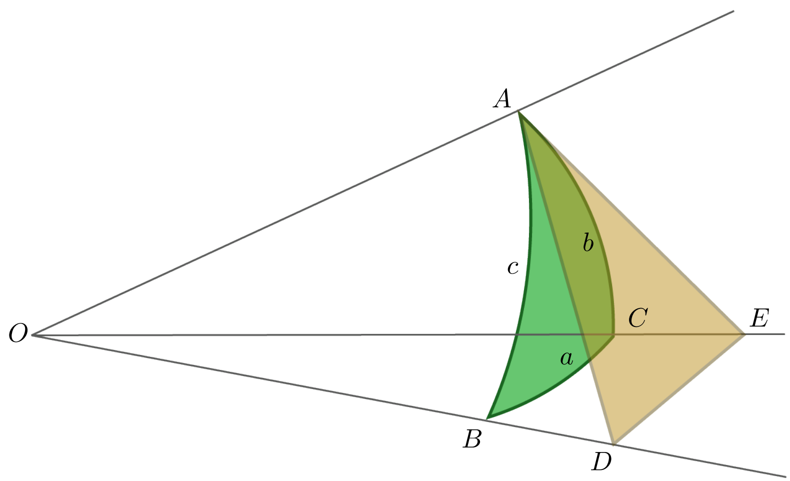
$$2OD \cdot OE\cos(a) = 2AD \cdot AE\cos(A) + (OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2)$$

En utilisant le théorème de Pythagore tel que mentionné plus haut, on peut maintenant simplifier cette équation :

$$OD \cdot OE\cos(a) = AD \cdot AE\cos(A) + OA^2$$

Et finalement, en isolant $\cos(a)$ et en utilisant les définitions des différents rapport trigonométriques, on obtient :

$$\cos(a) = \frac{OA}{OE} \cdot \frac{OA}{OD} + \frac{AD}{OD} \cdot \frac{AE}{OE}\cos(A) = \cos(b)\cos(c) + \sin(c)\sin(b)\cos(A)$$

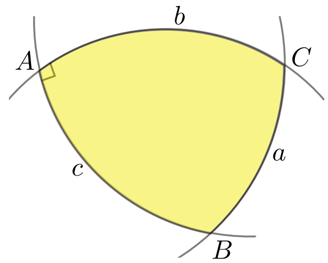


□

Théorème 7.4.2. **(Théorème de Pythagore sphérique (I))** Si A, B, C sont les trois sommets d'un triangle sphérique qui est rectangle au sommet A, alors $\cos(a) = \cos(b)\cos(c)$.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer la loi des cosinus pour les triangles sphériques que nous avons déjà démontrer, et remplacer l'angle A par $\frac{\pi}{2}$, ce qui nous donne :

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)\cos(b)$$



□

Pour chaque grand cercle d'une sphère, il existe exactement deux points opposés qui forme un angle de $\frac{\pi}{2}$ radian avec tout les points du grand cercle. Ces deux points portent le nom de **pôle** du grand cercle. Inversement, pour chaque point sur une sphère, on peut définir un unique grand cercle pour lequel le point est un pôle. Ce grand cercle porte le nom d'**équateur**. À partir des notions de pôle et d'équateur, il nous est maintenant possible de définir la notion de triangle dual, qui joue un rôle important dans la démonstration de la seconde loi des cosinus.

Definition 7.4.1. (Triangle dual) Si A, B, C sont les trois sommets d'un triangle sphérique, alors on définit A' comme étant le pôle du grand cercle passant par B et C, qui se trouve du même côté que A par rapport au grand cercle. De la même façon, on définit B' comme étant le pôle du grand cercle passant par A et C, qui se trouve du même côté que B, et de la même manière pour C'. Le triangle sphérique ayant pour sommet A', B', C' porte le nom de triangle dual.

Definition 7.4.2. (Semilune) Une semilune est un triangle sphérique pour lequel l'un des sommets est un pôle du côté opposé.

Lemme 7.4.1. Si deux des six mesures (les trois angles et trois côtés) d'un triangle sphérique sont $\frac{\pi}{2}$ radian, alors le triangle est une semilune.

Lemme 7.4.2. La mesure d'un angle d'un triangle sphérique, et la mesure du côté correspondant dans le triangle dual sont supplémentaires.

Théorème 7.4.3. (Loi des cosinus (II) pour les triangles sphériques) Si A, B, C sont les trois sommets d'un triangle sphérique, et a, b, c les trois côtés tel que a, b, c sont opposés aux sommets A, B, C respectivement, alors :

- $\cos(A) = -\cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos(a)$
- $\cos(B) = -\cos(C)\cos(A) + \sin(C)\sin(A)\cos(b)$
- $\cos(C) = -\cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)\cos(c)$

Démonstration. Nous allons démontrer seulement la première des trois lois, les deux autres se démontrant exactement de la même façon. Si ABC est un triangle sphérique, et $A'B'C'$ son triangle dual. On applique la première loi des cosinus au triangle $A'B'C'$, ce qui nous donne :

$$\cos(a') = \cos(b')\cos(c') + \sin(b')\sin(c')\cos(A')$$

Maintenant, on utilise le lemme précédent pour réécrire l'équation en terme du triangle ABC. On obtient donc :

$$\cos(\pi - A) = \cos(\pi - B)\cos(\pi - C) + \sin(\pi - B)\sin(\pi - C)\cos(\pi - a)$$

Maintenant, en se rapellant que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ pour tout x, alors l'équation peut être simplifier pour obtenir :

$$-\cos(A) = \cos(B)\cos(C) - \sin(B)\sin(C)\cos(a) \quad \Rightarrow \quad \cos(A) = -\cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos(a)$$

□

Théorème 7.4.4. **(Théorème de Pythagore sphérique (II))** Si A, B, C sont les trois sommets d'un triangle sphérique pour lequel le côté a mesure $\frac{\pi}{2}$, alors $\cos(A) = -\cos(B)\cos(C)$.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer la seconde loi des cosinus pour le triangle ABC tout en remplaçant la mesure du côté a par $\frac{\pi}{2}$. On obtient donc :

$$\cos(A) = -\cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos(a) = -\cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(B)\cos(C)$$

□

Lemme 7.4.3. **(Projection des angles)** La projection d'un triangle sphérique sur un plan passant par l'un des sommets du triangle préserve les angles droits. De plus, si A, B, C sont les trois sommets d'un triangle sphérique pour lequel l'angle B n'est pas droit, et A, B', C' la projection du triangle sur un plan tangent à la sphère au point A, alors

$$\tan(\angle B') = \tan(\angle B)\cos(AB)$$

Démonstration. Nous allons traiter séparément le cas des angles droits, et des angles quelconque.

1. Prenons un triangle sphérique ABD rectangle au sommet D, et dénotons le centre de la sphère par O. On dessine un plan tangent à la sphère passant par le point A, et on dénote par B' et D' la projection des points B et D sur le plan. On prolonge le segment (sur la sphère) BD jusqu'à un point C tel que $BD \cong DC$, et on dénote par C' la projection du point C sur le plan. Par construction, on a que les triangles sphériques ABD et ACD sont congrus par construction, ce qui nous permet d'obtenir que les triangles planaire $AB'D'$ et $AC'D'$ sont aussi congru. Les angles $B'D'A$ et $AD'C'$ sont donc supplémentaires et congrus, ils doivent donc être tout deux des angles droits. La projection sur un plan préserve donc les angles droits.
2. Prenons maintenant un triangle sphérique ABC quelconque (pas nécessairement les mêmes points que précédement), et dessinons un plan tangent à la sphère passant par le point A. On dessine une droite perpendiculaire à BC (sur la sphère) passant par A, et on dénote le point d'intersection avec BC par D. On dénote ensuite la projection des points B, C et D sur le plan par B', C' et D' respectivement. Par le loi des cosinus, nous savons que :

$$\cos(\angle ADB) = -\cos(\angle DAB)\cos(\angle B) + \sin(\angle DAB)\sin(\angle B)\cos(AB)$$

Comme l'angle ADB est droit, l'équation peut se simplifier :

$$0 = -\cos(\angle DAB)\cos(\angle B) + \sin(\angle DAB)\sin(\angle B)\cos(AB)$$

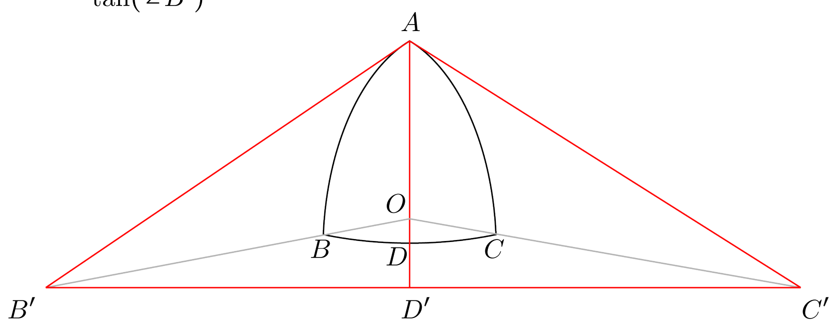
$$\cos(\angle DAB)\cos(\angle B) = \sin(\angle DAB)\sin(\angle B)\cos(AB)$$
$$1 = \tan(\angle DAB)\tan(\angle B)\cos(AB)$$

Maintenant, comme $\angle DAB \cong \angle D'AB'$, on a donc :

$$\tan(\angle DAB) = \tan(\angle D'AB') = \frac{\sin(\angle D'AB')}{\cos(\angle D'AB')} = \frac{\sin(\pi/2 - \angle B')}{\cos(\pi/2 - \angle B')} = \frac{\cos(\angle B')}{\sin(\angle B')} = \frac{1}{\tan(\angle B')}$$

En remplaçant dans l'équation précédente, ceci nous permet d'obtenir :

$$1 = \frac{1}{\tan(\angle B')}\tan(\angle B)\cos(AB) \quad \Rightarrow \quad \tan(\angle B') = \tan(\angle B)\cos(AB)$$



□

Théorème 7.4.5. **(Lois de Napier)** Si A, B, C sont les trois sommets d'un triangle sphérique qui est rectangle au sommet A, alors on a les identités suivantes :

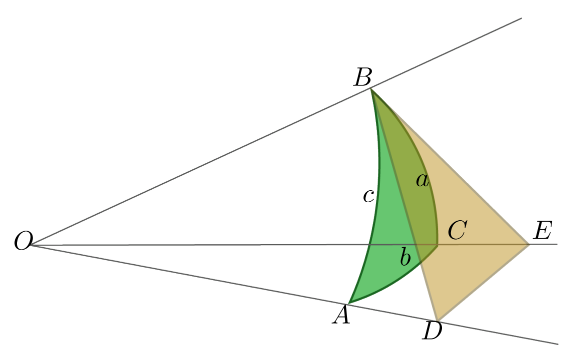
- $\sin(B) = \dfrac{\sin(b)}{\sin(a)}$
- $\cos(B) = \dfrac{\tan(c)}{\tan(a)}$
- $\tan(B) = \dfrac{\tan(b)}{\sin(c)}$
- $\sin(C) = \dfrac{\sin(c)}{\sin(a)}$
- $\cos(C) = \dfrac{\tan(b)}{\tan(a)}$
- $\tan(C) = \dfrac{\tan(c)}{\sin(b)}$

Démonstration.

Nous allons traiter uniquement le cas de $\sin(B)$, $\cos(B)$ et $\tan(B)$. Les démonstrations pour l'angle C sont essentiellement identique et vous sont laissé en exercices.

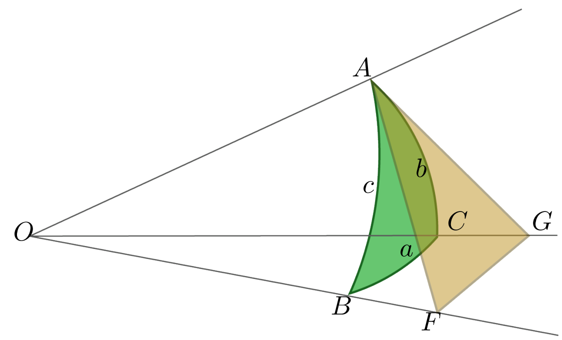
Prenons un triangle sphérique ABC rectangle en A, et projetons le triangle sur un plan tangent à la sphère passant par le point B. Dénotons par D et E la projection des points A et C respectivement sur le plan. On a donc :

$$\cos(B) = \frac{BD}{BE} = \frac{BD/OB}{BE/OB} = \frac{\tan(c)}{\tan(a)}$$



Considérons maintenant le même triangle ABC, mais projetons le sur un plan tangent à la sphère passant par le point A. Dénotons la projection de B et C par les lettre F et G respectivement. On a donc :

$$\begin{aligned}\tan(B) &= \frac{\tan(F)}{\cos(c)} = \frac{AG/AF}{\cos(c)} = \frac{AG}{AF\cos(c)} \\ &= \frac{AG/OA}{AF/OA\cos(c)} = \frac{\tan(b)}{\tan(c)\cos(c)} = \frac{\tan(b)}{\sin(c)}\end{aligned}$$



Finalement, pour $\sin(B)$, on utilise les deux identités qu'on vient de démontrer :

$$\sin(B) = \cos(B)\tan(B) = \frac{\tan(c)}{\tan(a)} \cdot \frac{\tan(b)}{\sin(c)} = \frac{\sin(c)}{\cos(c)} \cdot \frac{\cos(a)}{\sin(a)} \cdot \frac{\sin(b)}{\cos(b)} \cdot \frac{1}{\sin(c)} = \frac{\cos(a)}{\cos(b)\cos(c)} \cdot \frac{\sin(b)}{\sin(a)}$$

Maintenant, en utilisant le théorème de Pythagore pour les triangles sphériques, on obtient finalement :

$$\sin(B) = \frac{\sin(b)}{\sin(c)}$$

□

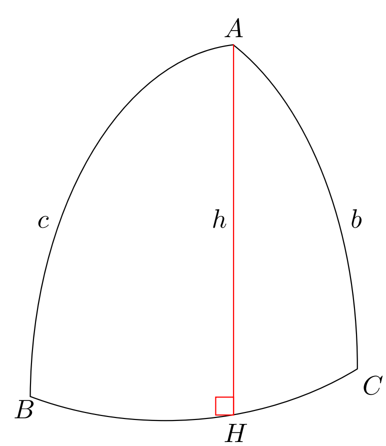
Théorème 7.4.6. **(Loi des sinus pour les triangles sphériques)** Si A, B, C sont les trois sommets d'un triangle sphérique, et a, b, c les trois côtés tel que a, b, c sont opposés aux sommets A, B, C respectivement, alors :

$$\frac{\sin(A)}{\sin(a)} = \frac{\sin(B)}{\sin(b)} = \frac{\sin(C)}{\sin(c)}$$

Démonstration.

Considérons un triangle sphérique ABC et dessinons une droite (sur la sphère) perpendiculaire à BC et passant par A. On obtient donc deux triangle sphérique rectangle. On peut donc appliquer les lois de Napier, ce qui nous donne :

$$\sin(B) = \frac{\sin(h)}{\sin(c)} \qquad \text{et} \qquad \sin(C) = \frac{\sin(h)}{\sin(b)}$$



En isolant $\sin(h)$ dans ces deux équations, et en les comparants, on obtient donc :

$$\sin(h) = \sin(B)\sin(c) = \sin(C)\sin(b) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin(B)}{\sin(b)} = \frac{\sin(C)}{\sin(c)}$$

On peut ensuite dessiner un autre perpendiculaire pour obtenir l'autre égalité.

□

Théorème 7.4.7. **(Aire d'un triangle sphérique)** L'aire d'un triangle sphérique d'angle A, B et C donné en radian et de rayon r est donné par la formule

$$\text{Aire} = r^2(A + B + C - \pi)$$

En particulier, on remarque que l'aire d'un triangle dépend uniquement de la mesure de ses angles et du rayon de la sphére.

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 7.4.1. Dans tous triangles sphériques, la somme des angles est strictement supérieur à π radian ou 180 degré.

Démonstration. Il s'agit de remarquer que l'aire d'un triangle ne peut jamais être 0 (si les sommets sont distincts) ni négative. Par le théorème précédent, si on dénote les trois angles du triangle par A, B et C, on doit donc avoir $A + B + C - \pi > 0$, ce qui nous donne directement le résultat en considérant la conversion entre degré et radian. □

Bibliographie

[1] *Euclid's Elements, all thirteen books complete in one volume.* Green Lion Press, 2002.

[2] Nathan Altshiller-Court. *College Geometry : An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle.* Dover Publication, 2007.

[3] Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum. *Projective geometry : from foundations to applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[4] Francis Borceux. *An algebraic approach to geometry—geometric trilogy. II.* Springer, Cham, 2014.

[5] Francis Borceux. *An axiomatic approach to geometry—geometric trilogy. I.* Springer, Cham, 2014.

[6] Francis Borceux. *A differential approach to geometry—geometric trilogy. III.* Springer, Cham, 2014.

[7] Robin Hartshorne. *Geometry : Euclid and beyond.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] Rob Johnson. Spherical trigonometry. West Hills Institute of Mathematics, https ://www.math.ucla.edu/ robjohn/math/spheretrig.pdf.

[9] I.E. Leonard, J.E. Lewis, A.C.F. Liu, and G.W. Tokarsky. *Classical Geometry : Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective.* Wiley, 2014.

[10] Alexander Ostermann and Gerhard Wanner. *Geometry by its history.* Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2012.

[11] John Stillwell. *The four pillars of geometry.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2005.

Index