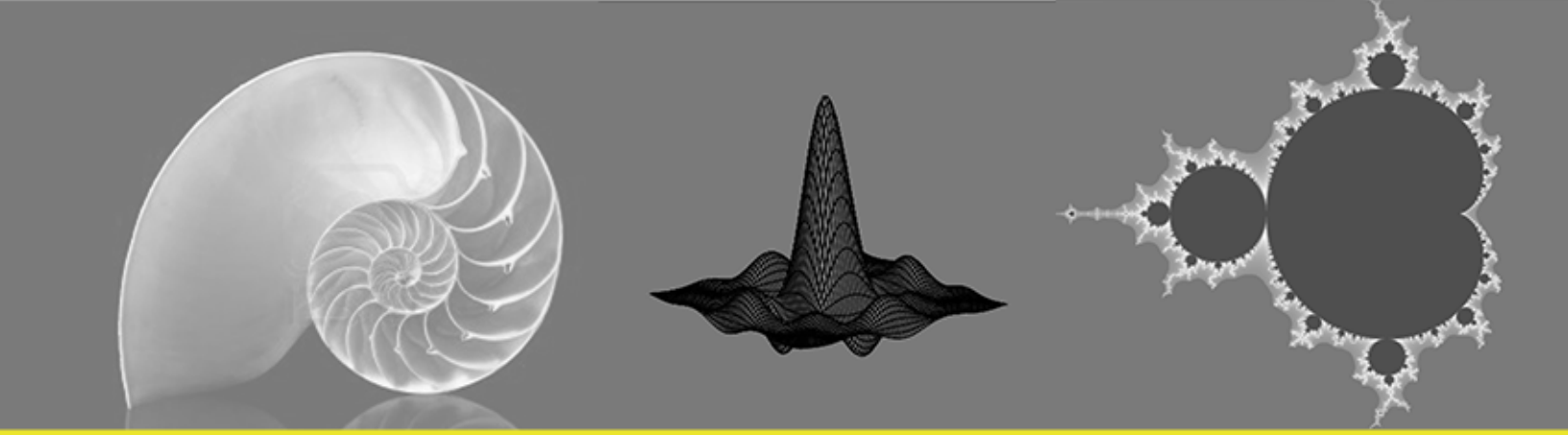


Combinatoire 1

Nicolas Bouffard

Hiver 2020

Université de Saint-Boniface
Une éducation supérieure depuis 1818

Dernière mise à jour :
15 décembre 2019 à 18:52

Table des matières

1 Les principes de base **5**
- 1.1 Introduction et méthodes élémentaires . . . 5
- 1.2 Multiplication : Le principe du produit . . . 5
- 1.3 Addition : Le principe de la somme . . . 6
- 1.4 Soustration : Le principe d'inclusion-d'exclusion . . . 7
- 1.5 Égalité : Le principe de la bijection . . . 8
- 1.6 Division : Le principe d'équivalence . . . 9
- 1.7 Existence : Le principe des nids de pigeons . . . 11
- 1.8 Récurrence : Le principe d'induction . . . 13

2 Quelques outils **17**
- 2.1 Les outils . . . 17
- 2.2 Les récurrences . . . 18
- 2.3 Les fonctions génératrices . . . 20
- 2.4 Problème de pièces de monnaie . . . 21
- 2.5 Les probabilités . . . 23

3 Choisir des objets **25**
- 3.1 Les 4 façons de choisir des objets . . . 25
- 3.2 Avec ordre / Avec remise . . . 25
- 3.3 Avec ordre / Sans remise . . . 26
- 3.4 Sans ordre / Sans remise . . . 27
- 3.5 Sans ordre / Avec remise . . . 29
- 3.6 Résumer des 4 façons de choisir des objets . . . 32
- 3.7 Le problème du MISSISSIPPI . . . 32
- 3.8 Quelques problèmes supplémentaires . . . 34
- 3.9 Le paradoxe des anniversaires . . . 35

4 Les problèmes d'occupation **37**
- 4.1 Les problèmes d'occupation . . . 37
- 4.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce . . . 38
- 4.3 Les nombres de partitions (d'un entier) . . . 41
- 4.4 Solutions des problèmes d'occupation . . . 44
- 4.5 Nombres de Bell . . . 45

5 Compter les fonctions **47**
- 5.1 Compter les fonctions : The twelvefold way . . . 47
- 5.2 Le problème de la NHL . . . 50
- 5.3 Le problème des chapeaux . . . 51
- 5.4 Le problème des rencontres . . . 52

6 De l'ordre dans les urnes **55**
6.1 Une dernière généralisation . . . 55
6.2 Les urnes contiennent exactement un objet . . . 55
6.3 L'ordre dans les urnes est importante . . . 56
6.4 Résumer des 20 problèmes de distribution . . . 58
6.5 Nombres de Stirling de première espèce . . . 59
6.6 Quelques identités sur les nombres de Stirling et de Lah . . . 60
6.7 Le problème des ménages . . . 62

7 Les récurrences **65**
7.1 Introduction . . . 65
7.2 Quelques outils . . . 65
7.3 La méthode des fonctions génératrices . . . 73
7.4 La méthode du polynôme caractéristique . . . 77
7.5 La méthode de dérivation symbolique . . . 80
7.6 La méthode des fonctions génératrices exponentielles . . . 82
7.7 Applications des récurrences . . . 83

8 Les problèmes d'existence **91**
8.1 Le principe des nids de pigeons généralisés . . . 91
8.2 Problème des amis et des étrangers . . . 92
8.3 Les nombres de Ramsey . . . 93

Bibliographie **93**

Index **95**

Chapitre 1

Les principes de base

1.1 Introduction et méthodes élémentaires

La combinatoire est une discipline des mathématiques qui consiste à étudier l'art de compter le nombre de possibilités d'avoir certaine configuration. Il s'agit d'une discipline directement relié à la théorie des probabilité, et en conséquence à la statistique. La combinatoire fait aussi sont apparition dans plusieurs autres domaines des mathématiques, comme par exemple en géométrie, analyse et algèbre.

La méthode la plus simple pour résoudre un problème de combinatoire consiste à énumérer toutes les possibilités, puis de compter directement combien nous en avons. Il s'agit bien entendu d'une méthode qui peut devenir rapidement très longue, mais elle reste néanmoins toujours (en théorie) possible à utiliser. Cette première méthode peut être grandement simplifié en organisant notre énumération de manière stratégique. Ceci peut être accomplie en particulier à l'aide de diagramme en arbre par exemple, ou tout simplement en notre liste en ordre croissant ou alphabétique.

Dans ce chapitre, nous allons cependant dès le départ chercher à aller plus loin en identifiant certain principe de base qui nous seront utile durant tout le cours. Il s'agit dans un premier temps de donner une signification combinatoire à chacune des opération arithmétique.

1.2 Multiplication : Le principe du produit

En combinatoire, la multiplication correspond à notre idée intuitive du ET. Il s'agit probablement du principe le plus simple, mais aussi le plus utile. Essentiellement, il nous affirme que s'il y a n_1 façons de compléter la tâche 1 et n_2 façons de compléter la tâche 2, alors il y a $n_1 n_2$ façons de compléter la tâche 1 et la tâche 2. Il est cependant plus pratique de l'énoncé dans le language de la théorie des ensembles. Pour ce faire, nous devons se rappeller la notion de produit cartésien, ce que nous allons faire immédiatement.

Definition 1.2.1. Si A et B sont des ensembles, alors on définit le produit cartésien $A \times B$ comme étant :

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Exemple 1.2.1. Si $A = \{1, 2, 3\}$, alors $A \times A$ est l'ensemble suivant :

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Exemple 1.2.2. Si $A = \{a, b\}$ et $B = \{1\}$, alors $A \times B$ et $B \times A$ sont les ensembles suivants :

$$A \times B = \{(a,1), (b,1)\}$$

$$B \times A = \{(1,a), (1,b)\}$$

Un point important à noter dans la définition du produit cartésien est que l'ordre des éléments dans un couple (a, b) est important. En effet, les couples $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont différent. Le produit cartésien introduit donc une notion d'ordre.

Théorème 1.2.1. **(Principe du produit)** Si A et B sont deux ensembles, alors le nombre de façon de choisir un éléments de l'ensemble A et un élément de l'ensemble B est le produit du nombre d'élément de chacun de ces deux ensembles. C'est à dire :

$$|A \times B| = |A|\,|B|$$

Exemple 1.2.3. Si une classe est composé de 25 femmes et 20 hommes, alors il y a $25 \times 20 = 500$ façons de choisir un homme et une femme parmi les étudiants de la classe. Pour l'interpréter en terme de théorie des ensembles, nous pouvons considérer l'ensemble F de toutes les femmes comme étant $F = \{F_1, F_2, F_3, ..., F_{25}\}$ l'ensemble H des hommes comme étant $H = \{H_1, H_2, H_3, ..., H_{20}\}$. L'ensemble de tout les couples formé d'une femme et d'un nombre est donc :

$$F \times H = \{(F_1, H_1), (F_1, H_2), (F_1, H_3), ..., (F_{25}, H_{20})\}$$

Le nombre de couple est donc : $|F \times H| = |F| \cdot |H| = 25 \times 20 = 500$.

Exemple 1.2.4. Dans une grande compagnie, on attribue à chaque employé un code d'identification. Ce code est formé de 2 lettres, suivi de 3 chiffres. Combien de code différent peut-on attribuer ? Pour ce faire, remarquons que le problème revient à choisir une lettre ET une lettre ET un chiffre ET un chiffre ET un chiffre. Il s'agit donc d'une application du principe du produit.

LETTRE - LETTRE - CHIFFRE - CHIFFRE - CHIFFRE

Comme il y a 26 lettres et 10 chiffres, on obtient donc :

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^2 \times 10^3 = 676\ 000 \text{ possibilités}$$

Remarquez qu'ici nous utilisons le principe du produit, car chaque code d'identification peut être cu comme un élément du produit cartésien $L \times L \times C \times C \times C$, où L est l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet, et $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1.3 Addition : Le principe de la somme

En combinatoire, l'addition correspond à notre idée intuitive du OU. Ici, il faut cependant faire attention car il existe en français deux types de OU. Le OU inclusif et le OU exclusif. Le principe de la somme s'applique uniquement dans le cas du OU exclusif. Aucun élément ne peut faire partie à la fois de la première tâche et de la seconde. Dans le langage de la théorie des ensembles on dit que l'intersection est vide.

Essentiellement, ceci revient à affirmer que si une tâche peut être complété soit de n_1 façons ou de n_2 façons, et aucune de ces méthodes sont en commun, alors il y a $n_1 + n_2$ façons de compléter la tâche. Ces la théorie des partitions qui nous permet d'énoncer le principe d'addition de manière plus élégante.

Definition 1.3.1. Si A est un ensemble et $B_1, B_2, B_3, ...B_n$ sont des sous-ensemble de A satisfaisant les deux propriétés suivante :

1. $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A$.
2. $B_i \cap B_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j$.

Alors on dit que les ensembles $B_1, B_2, B_3, ...B_n$ forment une partition de l'ensemble A. Alternativement, on dit que ces ensembles partitionnent A.

Théorème 1.3.1. **(Principe de la somme)** Si une collection d'objet A peut être partitionné en sous-ensembles $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$, alors le nombre d'élément dans A est la somme du nombre d'élément de chacun des sous-ensembles. C'est à dire :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} |B_i|$$

Exemple 1.3.1. Si une classe est composé de 25 femmes et 20 hommes, alors il y a $20 + 25 = 45$ façons de choisir un étudiant dans la classe.

Exemple 1.3.2. Pour satisfaire les exigences de son programme d'étude, un étudiant doit choisir un cours d'informatique, de mathématiques ou de statistique. S'il y a 10 cours d'informatique, 20 cours de mathématiques et 15 cours de statistiques (tous accessible à l'étudiant), combien y a-t-il de façon pour l'étudiant de choisir son cours ? Ici on remarque que l'étudiant doit en fait choisir un cours d'informatique OU un cours de mathématiques OU un cours de statistique. En faisant l'hypothèse qu'aucun cours n'appartient à plus qu'une discipline, on remarque donc qu'il s'agit d'une application du principe de la somme. On a donc :

$$10 + 20 + 15 = 45 \text{ possibilités}$$

Truc : Compter le complément

En combinatoire, la soustraction peut apparaître de différente façon. Le principe d'inclusion-d'exclusion que nous verrons à la prochaine section en est un exemple particulièrement important. La soustraction peut cependant apparaitre comme une application particulièrement utile du principe de la somme, ce que nous illustrons dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.3.3. Dans une classe de 30 étudiants, s'il y a 20 femmes, combien y a-t-il d'homme ? Posons H l'ensemble des hommes et F l'ensemble des femmes. Comme aucun étudiants n'est à la fois un homme et une femme, alors nous avons $H \cap F = \varnothing$. Nous pouvons donc appliquer le principe de la somme :

$$|H \cup F| = |H| + |F|$$

En remplaçant les valeurs donnés dans le problème, nous avons donc :

$$30 = |H| + 20 \quad \Rightarrow \quad |H| = 30 - 20 = 10$$

Bien que l'exemple ci-dessus peut sembler particulièrement simple, l'utilisation du complément peut nous permettre de résoudre une multitude de problème de combinatoire.

1.4 Soustration : Le principe d'inclusion-d'exclusion

Le principe de la somme est particulièrement utile, mais aussi très restrictif. En effet, beaucoup de problème de combinatoire nécessite de compter le nombre d'élément de l'union de deux ensembles, mais dans la plupart des cas il est absurde de faire l'hypothèse que l'intersection est vide. Le principe d'inclusion-d'exclusion vient remédier à ce problème. Pour le moment, nous énonçons le principe seulement dans le cas de deux ensembles, mais sachez que nous aurons l'occasion plus tard dans le cours de le généralisé à un nombre arbitraire d'ensemble, ce qui en fera un outil particulièrement puissant. Bien que nous ne le traiterons pas dans ce cours, sachez que dans le cours de combinatoire 2 une généralisation supplémentaire du principe d'inclusion-d'exclusion sera faites. L'idée est en fait de réaliser que le principe d'inclusion-d'exclusion est en fait un cas particulier de la théorie des relations d'ordre partielle.

Le principe d'inclusion-d'exclusion nous affirme essentiellement que si une tâche peut être complété soit de n_1 façons ou de n_2 façons, et qu'il y a n_3 de ces méthodes qui sont en commun, alors il y a $n_1 + n_2 - n_3$ façons de compléter la tâche. Il s'agit cependant de l'énoncé en terme de la théorie des ensembles qui sera le plus intéressant pour nous.

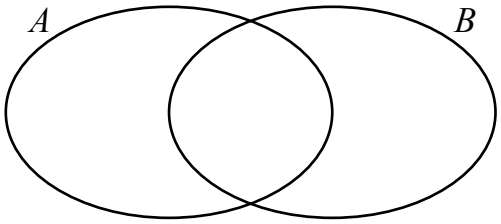
Théorème 1.4.1. **(Principe d'inclusion-d'exclusion)** Si A et B sont des ensembles, alors la cardinalité de l'union est la somme de la cardinalité de chacun des deux ensembles, moins la cardinalité de l'union. C'est à dire :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Démonstration. La démonstration du principe d'inclusion-d'exclusion repose sur l'idée suivante :

$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$

$B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$



Comme les ensembles $A\backslash B$, $B\backslash A$ et $A \cap B$ sont disjoint, le principe de la somme nous permet donc d'affirmer :

$$|A \cup B| = |A\backslash B| + |B\backslash A| + |A \cap B| = \Big(|A\backslash B| + |A \cap B|\Big) + \Big(|B\backslash A| + |A \cap B|\Big) - |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

□

Exemple 1.4.1. Combien y a-t-il de mots de 5 lettres commençant par A ou se terminant par ZZ ? Notez qu'ici un mot fait référence à un agencement de lettre quelconque et pas nécessairement un mot que l'on peut trouver dans un dictionnaire français ou anglais. Par exemple $ABCZZ$ serait un mot acceptable. Ici, le OU nous fait penser qu'il s'agit du principe de la somme. Mais en portant un attention particulière au problème, on réalise que ce n'est pas le cas, car il y a plusieurs mots qui comme par A et se termine par ZZ. Il s'agit donc d'une application du principe d'inclusion-d'exclusion. Le nombre de possibilité sera donc donné par :

(Nombre de mots commençant par A) + (Nombre de mots terminant par ZZ) - (Nombre de mots commençant par A et terminant par ZZ)

Maintenant, pour calculer chacune ces composantes, on remarque qu'il s'agit d'application du principe du produit. Pour le nombre de mot commençant par A, on a donc :

$$1 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^4 = 456\ 976 \text{ possibilités}$$

Pour le nombre de mots se terminant par ZZ, on a :

$$26 \times 26 \times 26 \times 1 \times 1 = 26^3 = 17\ 576 \text{ possibilités}$$

Puis le nombre de mots commençant par A et se terminant par ZZ est donné par :

$$1 \times 26 \times 26 \times 1 \times 1 = 26^2 = 676 \text{ possibilités}$$

Le principe d'inclusion-d'exclusion nous affirme donc que le nombre de mot commençant par A ou se terminant par ZZ est donné par :

$$26^4 + 26^3 - 26^2 = 456976 + 17576 - 676 = 473\ 876 \text{ possibilités}$$

1.5 Égalité : Le principe de la bijection

En combinatoire, il est souvent pratique de démontrer que deux problèmes ont en fait la même solution. Ceci est accompli par le principe de la bijection. Ceci nous permet entre autre de résoudre un problème potentiellement difficile, et ensuite d'utiliser ce résultat pour d'autre problème qui sont en apparence très différent, mais qui ont en fait la même solution. Ceci nous évite donc de devoir à chaque fois recommencer à zéro. Il est plus difficile de voir l'intérêt directe de ce principe que de ceux que nous avons vu précédemment, mais nous auront à plusieurs reprise dans le cours l'occasion de l'utiliser.

Étant donné que le principe repose sur la notion de fonction bijective, nous allons donc premièrement rappeler certaine définitions :

Definition 1.5.1. Si A et B sont des ensembles et $f : A \to B$ est une fonction, alors on dit que

1. f est une fonction injective si $f(x) = f(y)$ implique que $x = y$ pour tout $x, y \in A$.
2. f est une fonction surjective si pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.
3. f est une fonction bijective si f est à la fois injective et surjective.

Théorème 1.5.1. **(Le principe de la bijection)** Deux ensembles ont la même cardinalité si et seulement s'il existe une bijection entre les deux ensembles.

Notez que bien que la plupart des problèmes de combinatoire que nous allons rencontrer dans le cours utilise des ensembles de cardinalité fini, le principe est en fait applicable à n'importe quel ensemble, peut importe leur cardinalité. Ces d'ailleurs ce principe qui nous permet d'affirmer qu'il y a autant de nombres naturels que de nombres entiers et de nombres rationnels.

Exemple 1.5.1. Si A est un ensemble de n éléments et k un nombre naturel, alors il y a autant de sous-ensembles de A ayant k éléments que de sous-ensemble de A ayant $n-k$ éléments. Pour pouvoir le montrer, il nous faut donc trouver une bijection entre les sous-ensembles de k éléments, et les sous-ensembles de $n-k$ éléments. C'est à dire qu'il nous faut trouver une façon de transformer un ensemble de k éléments en un ensemble de $n-k$ éléments de sorte que le processus soit inversible.

$$\boxed{\text{Sous-ensembles de } k \text{ éléments}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{Sous-ensembles de } n-k \text{ éléments}}$$

Pour ce faire, il suffit de remarquer que si $B \subseteq A$ est un ensemble de k éléments, alors $A \backslash B$ sera un ensemble de $n-k$ éléments. Il est facile de voir que ce processus est inversible, il s'agit donc d'une bijection. On peut donc conclure qu'il y a autant de sous-ensemble de k éléments que de sous-ensemble de $n-k$ éléments.

Truc : Méthode de l'élément distingué

Exemple 1.5.2. Si A est un ensemble de n éléments, alors A possède autant de sous-ensemble ayant un nombre pair d'élément que de sous-ensemble ayant un nombre impair d'éléments. Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la méthode de l'élément distingué. Pour ce faire, fixons un élément $a \in A$, et définissons la fonction suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l} B \text{ un sous-ensemble de } A \text{ ayant un} \\ \text{nombre pair d'élément} \\ \\ B = \begin{cases} B' \backslash \{a\} \text{ si } a \in B' \\ B' \cup \{a\} \text{ si } a \notin B' \end{cases} \end{array}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} B' \text{ un sous-ensemble de } A \text{ ayant un} \\ \text{nombre impair d'élément} \\ \\ B' = \begin{cases} B \backslash \{a\} \text{ si } a \in B \\ B \cup \{a\} \text{ si } a \notin B \end{cases} \end{array}}$$

Il est facile de voir qu'il s'agit bien d'une bijection car le processus est inversible. On peut donc conclure qu'il y a autant de sous-ensembles ayant un nombre pair d'élément que de sous-ensembles ayant un nombre impair d'élément.

1.6 Division : Le principe d'équivalence

Nous avons déjà vu que l'addition, la soustraction et la multiplication peuvent s'interpréter de manière intéressante dans le contexte de la combinatoire. Nous allons maintenant voir qu'il en est de même pour la division. Ceci peut être obtenu à partir du principe de la somme et de la notion de relation d'équivalence.

Definition 1.6.1. Si R est une relation sur un ensemble A, alors on dit que :

1. R est une relation réflexive si xRx pour tout $x \in A$.
2. R est une relation symétrique si pour tout $x, y \in A$ tel que xRy, alors yRx.
3. R est une relation antisymétrique si pour tout $x, y \in A$ tel que xRy et yRx, alors $x = y$.

4. R est une relation transitive si pour tout $x, y, z \in A$ tel que xRy et yRz, alors xRz.
5. R est une relation d'équivalence si R est une relation réflexive, symétrique et transitive.
6. R est une relation d'ordre partielle si R est une relation réflexive, antisymétrique et transitive.

Bien que pour le moment ce soit les relations d'équivalence qui nous intéressent, nous avons inclut la notion de relation d'ordre partielle dans la définition ci-dessus car ces dernière jouent aussi un rôle intéressant en combinatoire. Avant d'énoncer le principe d'équivalence, nous allons maintenant montrer que les relations d'équivalence sur un ensemble A et les partitions d'un ensemble A sont en fait deux interprétation d'un même concept.

Théorème 1.6.1. Si A est un ensemble, alors il existe autant de relation d'équivalence sur A que de partition de A. En particulier, nous avons :

1. Si R est une relation d'équivalence sur A, alors les différents ensembles de la forme $A_x = \{y \in A : xRy\}$ forment une partition de A. Les ensembles A_x portent le nom de classe d'équivalence.
2. Si $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ est une partition de A, alors l'ensemble $R = \{(a, b) : a, b \in B_i \text{ pour un } i\}$ est une relation d'équivalence sur A.

Démonstration. Exercice. □

Théorème 1.6.2. **(Principe d'équivalence)** Si R est une relation d'équivalence sur un ensemble A et si chacune des classes d'équivalence contiennent exactement k éléments, alors il y a $\frac{|A|}{k}$ classes d'équivalence.

Démonstration. Une relation d'équivalence R sur un ensemble A partitionne l'ensemble en classe d'équivalence $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ comme nous l'affirme le théorème précédent. Par définition d'une partition, nous avons donc $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout $i \neq j$. Il nous est donc possible d'appliquer le principe de la somme, ce qui nous donne :

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_n| = |A|$$

Comme par hypothèse chacune des classes d'équivalence contient exactement k élément, ceci nous permet donc d'affirmer que $nk = |A|$, c'est à dire $n = \frac{|A|}{k}$. □

Exemple 1.6.1. Dans une école, il y a 60 élèves de 5e année qui doivent être réparti entre 3 classes contenant toutes le même nombre d'élève. Combien y aura-t-il d'élève dans chacune des trois classes ? Ici, il est facile de remarquer qu'il s'agit d'une application directe du principe d'équivalence. Le fait de répartir les étudiants en 3 classes revient à faire une partition de l'ensemble des étudiants car aucun étudiant ne peut faire parti de deux classes en même temps, et l'union de l'ensemble des trois classes nous donne l'ensemble de tous les étudiants. Par le théorème nous savons qu'une partition nous permet de définir une relation d'équivalence. Dans ce cas la relation d'équivalence nous dit que des étudiants x et y sont équivalent s'il appartiennent à la même classe. De plus, nous savons que toutes les classes d'équivalence possèdent le même nombre d'élément, car le nombre d'étudiants dans chacune des trois classes doit être le même. Par le principe d'équivalence, si k dénote le nombre d'étudiant dans chaque classe, alors nous avons $\frac{60}{k} = 3$. C'est à dire nous avons $k = \frac{60}{3} = 20$ élèves dans chacune des classes.

Exemple 1.6.2. De combien de façon différente un groupe de n personnes peuvent s'assoir autour d'une table ronde ? À première vu, le problème est une application directe du principe du produit et nous avons $n!$ façons d'assoir les n personnes. Par contre, il faut remarquer que l'emplacement exacte d'une personne

n'a pas vraiment d'importance pour le problème. Tout ce qui compte est de savoir quel personne est à notre gauche, et quel personne est à notre droite. En d'autre mot, faire une rotation de la table ne change rien à la configuration. Il s'agit donc d'une application du principe d'équivalence. Comme chacune des configurations possède en fait n configuration équivalence (Les n rotations de la table), la solution du problème est donc : $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ façon d'assoir les n personnes autour d'une table ronde.

Exemple 1.6.3. De combien de façon différente peut-on choisir 3 billes parmi 10 billes toutes de couleurs différentes ? Premièrement, remarquons que d'après le principe du produit il y a $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ façons de choisir une première bille, puis une deuxième et finalement une troisième (c'est à dire avec ordre...). Par contre, on remarque que changer l'ordre des trois billes nous donne une configuration équivalente. Pour chaque choix ordonné de trois bille, nous avons donc 3! configuration qui sont équivalente. Le principe d'équivalence nous permet donc d'affirmer qu'il y a $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$ façons de choisir les trois billes (Sans ordre).

Exemple 1.6.4. De combien de façon différente une classe de 10 étudiants peut être divisé en 5 équipes de 2 personnes ? Premièrement, remarquons que d'après le principe du produit il y a 10! façons d'ordonnés les 10 étudiants. On forme ensuite les 5 équipes en groupant les deux premiers étudiants ensembles, les deux suivants, etc.

$$\underbrace{x_1, x_2}, \underbrace{x_3, x_4}, \underbrace{x_5, x_6}, \underbrace{x_7, x_8}, \underbrace{x_9, x_{10}}$$

Maintenant, remarquons qu'échanger l'ordre des deux premiers étudiants nous donne une configuration équivalence, de même si on change l'ordre des deux suivants, etc. De plus, échanger l'ordre de deux groupes nous donne aussi une configuration équivalente. On a donc que chaque configuration nous donne une classe contenant $2^5 \cdot 5!$ éléments. Le principe d'équivalence nous permet donc d'affirmer qu'il y a $\frac{10!}{2^5 \cdot 5!}$ façons différentes de diviser une classe de 10 étudiants en 5 groupes de deux étudiants.

Comme pour le cas du principe d'inclusion-d'exclusion, le principe d'équivalence sera aussi généralisé dans le cours de combinatoire 2. Ici, c'est la théorie des groupes qui nous permet de compter selon une relation d'équivalence dans toute sa généralité. Le point clé est la notion d'action de groupe, qui nous permet de démontrer le théorème de Burnside, et ainsi de construire la théorie de Polya. Un problème type de la théorie de Polya est de compter le notre de collier différent que l'on peut faire avec des billes de différentes couleurs.

1.7 Existence : Le principe des nids de pigeons

Le principe des nids de pigeons, aussi appelé principe des tiroirs de Dirichlet ou principe du pigeonnier, est un principe mathématiques particulièrement simple à énoncer et à comprendre, et qui a plusieurs application particulièrement intéressante en mathématiques. Dans le contexte de la combinatoire, il nous permet de répondre aux questions de la forme «Il existe au moins un...».

Théorème 1.7.1. **(Principe des nids de pigeons)** Si on souhaite placer $n+1$ objets ou plus dans n boites, alors au moins une boite contiendra deux objets ou plus.

Exemple 1.7.1. On veut montrer que dans une classe de 13 élèves, au moins deux élèves sont né le même mois. Pour ce faire, commençons par identifier nos boites et nos objets. On a donc :

Objets : Les élèves (13)
Boites : Les mois de l'année (12)

Comme nous avons plus d'objets que de boites, le principe des nids de pigeon nous affirme donc qu'au moins une boite contiendra plus qu'un objet, c'est à dire qu'au moins deux élèves sont né le même mois.

Exemple 1.7.2. Dans le cours MATH-1234, les résultats de l'examen final sont des entiers entre 0 et 100. Combien d'étudiants sont nécessaire pour être certain que deux étudiants obtiennent le même résultat ?

Premièrement, remarquons qu'il y a 101 entiers entre 0 et 100, car les deux extrémités sont incluse. Il est possible qu'un étudiant obtienne 0%, et il est possible qu'un étudiant obtienne 100%. Intuitivement, le nombre minimal d'étudiant nécessaire devrait donc être 102. Nous allons donc le démontrer en deux étapes :

1. Premièrement, nous voulons montrer que 101 étudiants n'est pas suffisant. Pour ce faire, un exemple est suffisant (Penser au démonstration par contre-exemple). Donc si on a 101 étudiants et que leur résultats sont respectivement :

   $$\{0\%, 1\%, 2\%, 3\%, 4\%, ..., 99\%, 100\%\}$$

   alors tout les étudiants ont obtenues des résultats différent. On peut donc affirmer que dans une classe de 101 étudiants on ne peut pas être certain que deux étudiants obtiennent le même résultat.

2. Dans un deuxième temps, on veut montrer qu'avec 102 étudiants on peut être certain que deux étudiants obtiennent le même résultat. Pour ce faire, on applique le principe des nids de pigeon :

   Objets : Les étudiants (102)
   Boites : Les différents résultats possible (101)

Par le principe des nids de pigeon, comme nous avons plus d'objet que de boite, au moins une boite contiendra plus qu'un objet, c'est à dire qu'au moins deux étudiants auront le même résultat.

Exemple 1.7.3. Supposons que vous possédez exactement 8 paires de bas bleus, et 10 paires de bas rouges, et supposons qu'après avoir fait votre lavage, vous décidé de former des paires aléatoirement, sans tenir compte de la couleur de chaque bas. Démontrer qu'on peut être certain qu'au moins une des paires formé contiendra deux bas de la même couleur. Premièrement, remarquer qu'il est tout à fait possible qu'aucune pair ne contienne deux bas bleus (pouvez-vous trouver un exemple ?), on va donc chercher à démontrer qu'au moins une paire contiendra deux bas rouge. Pour ce faire, on applique le principe des nids de pigeons.

Objets : Les bas rouges (20)
Boites : Les paires de bas (18)

Par le principe des nids de pigeon, comme il y a plus d'objet que de boite, alors au moins une boite contiendra deux objets. Dans ce cas, ceci signifie qu'au moins une paire de bas contiendra deux bas rouges.

Exemple 1.7.4. Lors d'une soirée, 20 personnes sont invités. Au début de la soirée, un certain nombre de poignées de main sont échangé. Bien entendu, personne ne se sert la main à lui même. Démontrer qu'on peut être certain qu'au moins deux des invités on serré la main au même nombre de personnes. Ici le problème est un peu plus difficile. Il est facile d'identifier que nos objets devrait être les différents invités, mais que sont nos boites ? Comme nous voulons montrer que deux invités on serré le même nombre de poignées de main, nous allons donc choisir le nombre de poignée de main comme nos objet. Une personne pourra donc avoir serré 0 poignée de mains, 1 poignée de mains, 2 poignée de mains, ... etc, jusqu'à 19 poignées de mains. il y a donc 20 possibilités pour le nombre de poignées de main. On a donc :

Objets : Les invités (20)
Boites : Le nombre de poignées de main (20)

Le problème étant que nous avons autant d'objet que de boite. Le principe des nids de pigeons ne peut donc pas s'appliquer directement. Pour remédier au problème, il s'agit de remarquer qu'il est impossible qu'un invité n'est serré aucune poignée de mains, alors qu'un autre invité est serré la main à tout le monde. On va donc pouvoir séparer le problème en deux cas disjoint.

1. Dans un premier temps, supposons que tout les invitées ont serrés au moins une poignée de main. Donc la boite correspondant aux personnes ayant serré aucune poignée de mains est disparu. On a donc :

   Objets : Les invités (20)
   Boites : Le nombre de poignées de main (19)

   Donc si tout les invitées on serré au moins une poignée de main, par le principe des nids de pigeons on peut être certain qu'au moins deux invités ont serré le même nombre de poignées de main.

2. Dans un deuxième temps, supposons qu'au moins un invité n'a serré aucune poignée de main. Donc la boite correspondant aux personnes ayant serré la main de tous les autres invités est disparu. On a donc :

   Objets : Les invités (20)
   Boites : Le nombre de poignées de main (19)

   Donc si au moins un invité n'a serré la main à personne, par le principe des nids de pigeons on peut être certain qu'au moins deux invités ont serré le même nombre de poignées de main.

En combinant ces deux résultats, on peut donc conclure qu'au moins deux invités on serré la main au même nombres de personnes.

1.8 Récurrence : Le principe d'induction

Le dernier principe que nous allons étudier dans ce chapitre est le principe d'induction, ainsi que l'une de ses versions généralisés (il en existe en fait plusieurs autres...). Ce dernier est en fait un peu différent des précédents, car contrairement aux autres principes, il ne permet pas de répondre directement à une question de combinatoire. Il s'agit en fait d'un principe permettant de version un hypothèse. L'idée est que pour plusieurs problèmes il nous est possible de deviner la solution. Le principe d'induction nous permet alors de démontrer que notre solution est bel et bien correcte.

Théorème 1.8.1. (Principe d'induction) Si P est une propriété satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. La propriété P est vraie pour un entier a.
2. En faisant l'hypothèse que la propriété P est vraie pour un entier k (avec $k \geq a$), on peut démontrer qu'elle est aussi vraie pour l'entier $k+1$.

Alors on peut conclure que la propriété P est vraie pour tous les entiers plus grand ou égal à a.

Notez que nous ne fourniront pas de démonstration du principe d'induction. Le difficulté vient du fait que dépendant du contexte, il peut s'agir soit d'un axiome, ou d'un théorème. Les nombres naturels sont fréquemment définie à partir des axiomes de Peano. Dans ce contexte, le principe d'induction est le 5e axiome. Dans les cours de calcul et d'analyse, le point de départ choisi est habituellement les nombres réels. Dans ce contexte, on accepte habituellement l'axiome de complétude (Tout ensemble non vide de nombre réel borné supérieurement admet une plus petite borne supérieure). Dans ce contexte, le principe d'induction devient une conséquence de l'axiome de complétude. Étant donné le contexte discret de la combinatoire, le supposer comme un axiome semble donc plus raisonnable.
À partir du théorème, on remarque donc qu'une démonstration par induction doit se faire en 3 étapes :

1. On commence par choisir l'entier de départ a. Il s'agit du premier entier pour lequel on veut montrer que la propriété est vraie. On doit alors démontrer que la propriété est vraie pour l'entier a.
2. On fait l'hypothèse que la propriété est vraie pour un entier $n \in \mathbb{Z}$
3. On démontre que la propriété est encore vraie pour $n+1$.

Si on parvient à compléter les trois étapes, on peut alors conclure que la propriété est vraie pour tout entier plus grand ou égal à a. Nous allons maintenant voir quelques exemples d'application du principe d'induction.

Exemple 1.8.1. On veut démontrer que pour tout nombre naturel n, on a :

$$1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ou écrit de manière symbolique, on veut démontrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour ce faire, nous allons appliquer le principe d'induction.

1. On doit démontrer que la propriété est vraie lorsque $n = 1$. Pour ce faire, on remarque que :

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

   donc la propriété est vraie lorsque $n = 1$.

2. Supposons maintenant que la propriété est vraie lorsque $n = k$, où k est un entier plus grand ou égal à 1. C'est à dire, on suppose que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

3. On veut maintenant vérifier que la propriété est vraie pour $n = k + 1$. On a donc :

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

   Donc à partir de notre hypothèse, on a bien que la propriété est vraie pour $n = k + 1$.

Par le principe d'induction, on peut donc conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.8.2. Démontrer que $x_n = 3 \cdot 5^n + 1$ pour tout $n \geq 0$ est la solution explicite de la récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 4, & \forall n \geq 1 \\ x_0 = 4 \end{cases}$$

Pour ce faire, appliquons les 3 étapes de l'induction.

1. Si $n = 0$, la récurrence nous donne $x_0 = 4$ et la solution explicite nous donne $x_0 = 3(5^0) + 1 = 4$. L'égalité est donc satisfaite pour $n = 0$.
2. Supposons que l'égalité est satisfaite pour $n = k$. C'est à dire supposons que $x_k = 3 \cdot 5^k + 1$.
3. Si $n = k + 1$, on a donc :

$$x_{k+1} = 5x_k - 4 = 5(3 \cdot 5^k + 1) - 4 = 15 \cdot 5^k + 5 - 4 = 3 \cdot 5^{k+1} + 1$$

   Ce qui est exactement ce que nous voulions.

Comme les trois étapes de l'induction sont satisfaite, on peut donc conclure que $x_n = 3 \cdot 5^n + 1$ pour tout $n \geq 0$.

Dans certain cas, le principe d'induction, tel que nous l'avons énoncé, n'est pas suffisant pour démontrer un résultat. Lorsqu'on applique de manière stricte le principe d'induction, on utilise uniquement la valeur précédente pour démontrer qu'une propriété est vraie pour une certaine valeur. Nous allons maintenant énoncer une version généralisée du principe d'induction qui nous permettra d'utiliser plusieurs valeurs précédentes pour démontrer un énoncé.

Théorème 1.8.2. (Principe d'induction généralisé) Si P est une propriété satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. La propriété est vraie pour tous les entiers entre a et b (avec $a \leq b$).
2. En faisant l'hypothèse que la propriété est vraie pour tous les entiers entre a et k (avec $k \geq b$), on peut démontrer qu'elle est aussi vraie pour l'entier $k + 1$.

Alors on peut conclure que la propriété P est vraie pour tous les entiers plus grand ou égal à a.

Exemple 1.8.3. Nous allons maintenant nous intéressé au problème des pièces de monnaies de Frobenius. Au Royaume-Unis, les pièces de monnaie ont les dénominations 1 penny, 2 pence, 5 pence, 10 pence, 20 pence, 50 pence, 1 pound et 2 pounds. En utilisant seulement des pièces de 2 pence et 5 pence, quel est le plus grand montant d'argent qu'il est impossible de faire ?

Par essaie et erreur, on peut facilement construire le tableau suivant :

Montant	Représentation
1	impossible
2	2
3	impossible
4	2 + 2
5	5
6	2 + 2 + 2
7	5 + 2
8	2 + 2 + 2 + 2
9	5 + 2 + 2

Nous allons maintenant utiliser le principe d'induction généralisé pour montrer qu'il est possible de réaliser tous les entiers supérieurs ou égal à 4 (donc 3 est le plus grand montant qu'il est impossible à faire). Nous savons déjà qu'il est possible de faire 4 et 5. Supposons qu'il est possible de réaliser tous les montants d'argent entre 4 et k avec $k \geq 6$. On veut maintenant montrer qu'il est possible de faire $k+1$. Pour ce faire, il suffit de remarquer que par hypothèse il est possible de faire $k-1$, et qu'en ajoutant une pièce de 2 pence, on obtient $k+1$. Il est donc possible de réaliser $k+1$. Par le principe d'induction généralisé, il est donc possible de faire tous les montants d'argent supérieur ou égal à 4 pence.

Exemple 1.8.4. Considérons la suite de nombres naturels définie par la relation

$$x_n = 7x_{n-1} - 10x_{n-2} \text{ avec } x_0 = 1 \text{ et } x_1 = 2$$

Utilisez l'induction pour démontrer que $x_n = 2^n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a bien l'égalité. Remarquez que l'on doit vérifier les deux premières valeurs car nous utilisons les deux valeurs précédentes dans notre troisième étape.
2. Supposons que $x_n = 2^n$ pour tout $n \leq k$
3. On veut maintenant montrer que l'équation est vrai pour $n = k+1$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 7x_k - 10x_{k-1} \\ &= 7(2^k) - 10(2^{k-1}) \\ &= 2^{k-1}(7 \cdot 2 - 10) \\ &= 2^{k-1}(2^2) \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration.

Chapitre 2

Quelques outils

2.1 Les outils

À la base, tous les problèmes (ou presque) de combinatoire peuvent être résolu par une simple énumération. Placer les éléments en ordre croissant, ordre alphabétique ou faire un diagramme en arbre sont certes des idées pouvant simplifier le travail, mais il reste néanmoins que cette approche possède beaucoup de désavantage. La principale étant tout simplement le temps nécessaire pour faire une énumération complète lorsque le nombre de possibilités est élevé. Un autre désavantage important est le risque élevé d'oublié un cas, ou bien d'en énumérer un deux fois.

Au chapitre 1, nous avons introduit un ensemble de principes de base nous permettant de simplifier les choses. Ces principes nous permettre entre autres d'interpréter les différentes opérations arithmétiques en termes de problème de combinatoire, de sorte que nous pouvons les utiliser directement pour calculer le nombre de possibilité. Par la même occasion, nous avons introduit un principe nous permettant d'établir que deux problèmes ont autant de possibilité, ou bien qu'il existe au moins une possibilité. Ces principes sont à la base de toute les questions de la combinatoire et sont probablement les premiers à avoir été développer historiquement.

Question d'améliorer nos compétences en combinatoire, dans les chapitres 3 à 6 nous développeront la théorie des distributions. Il s'agit d'ensemble de problèmes types qui arrivent souvent en combinatoire et qui peuvent servir de modèle pour toute une variété de situation. Ces modèles incluront la question de savoir combien y a-t-il de façon de choisir des objets, la question de placer des objets dans des urnes, et aussi la question de compter les fonctions ayant certaines propriétés. Ces distributions formes la deuxième étape de notre étude de la combinatoire. Cet outil, bien que particulièrement important, reste cependant limité. Qu'arrive-t-il lorsqu'un problème ne fait pas parti d'aucun de ces modèles ?

C'est pour cela qu'une troisième approche de la combinatoire sera étudiée au chapitre 7. En étudiant les diverses distributions de la combinatoire, nous allons réaliser que la plupart peuvent être exprimer en termes de récurrence. L'idée d'étudier les récurrences est en fait beaucoup plus puissance et permet de résoudre de nombreux problèmes qui ne peuvent pas être traiter facilement à l'aide des distributions ou des principes de base.

Bien que les récurrences nous permettent de résoudre beaucoup de problème, trouver une formule explicite pour les résoudre est généralement difficile. À la base, il s'agit d'un problème de devinettes pour lequel nous pouvons vérifier notre hypothèse à l'aide du principe d'induction. Bien que certaines formules puissent être développé relativement facilement, les fonctions génératrices deviennent indispensables dans la majorité des cas. Ceci nous amène à une quatrième approche de la combinatoire. Serait-il possible de résoudre un problème directement à partir des fonctions génératrices, sans devoir préalablement passer par les récurrences, ou bien les problèmes de distributions ? Cette idée sera étudiée en parti au chapitre 7, et plus en détail dans le cours de combinatoire 2.

L'idée de ce chapitre est de faire un lien entre ces différentes approches, tout en développant certain concept important de la combinatoire. Plutôt que de traiter les différentes approches de manière complètement indépendante, à chaque fois qu'une nouvelle distribution sera étudié, nous regarderons la possibilité de réécrire le problème sous forme de récurrence ou bien de fonctions génératrices. Par la même

occasion, nous allons dans ce chapitre définir la notion de probabilité. La combinatoire et les probabilités étant intimement relié, nous pourrons donc régulièrement faire un lien entre les deux, de sorte qu'en même temps que nous développerons les différentes distributions de la combinatoire, nous pourront établir les lois des probabilités qui s'y rapporte.

2.2 Les récurrences

Definition 2.2.1. Si n est un entier positif, alors on définit la factorielle de n, dénoté par $n!$ comme étant :

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n & \text{si } n \geq 1 \\ 1 \quad \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.2.1. La factorielle d'un nombre entier positif n possède une définition sous forme de récurrence. En effet, de manière tout à faire équivalente à la définition donné plus haut, nous aurions pu définir la factorielle de n comme étant :

$$\begin{cases} n! = n(n-1)! & \forall n \geq 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

Problème de chaines binaires

Exemple 2.2.2. Combien y a-t-il de chaines binaires de longueur 10 ne contenant pas deux 0 consécutifs. Pour ce faire, nous pourrions bien évidement énumérer toutes les possibilités, mais à première vu il semble y en avoir beaucoup. Nous allons donc plutôt prendre l'approche de définir une relation de récurrence. Posons a_n le nombre de chaine binaire de longueur n ne contenant pas deux 0 consécutif. Il est facile de voir que $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$. Maintenant, remarquons qu'une chaine binaire de longueur n avec $n \geq 2$ doit soit se terminer par un 0 ou bien par un 1. Pour toutes les chaines de longueur $n-1$, il est toujours possible d'ajouter un 1 à la fin pour obtenir une chaine binaire de longueur n satisfaisant le problème, par contre ceci n'est pas possible avec 0 car on risquerait d'obtenir une chaine qui se termine par 00. Donc si une chaine binaire de longueur n ne contient pas pas deux 0 consécutif et se termine par 0, alors elle doit obligatoirement se terminer par 10. On remarque alors qu'il que ceci correspond en fait au nombre de chaine de longueur $n-2$ qui satisfait le problème. On obtient donc la récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, & \forall n \geq 3 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

À partir de la récurrence, il devient maintenant beaucoup plus simple de répondre à la question. Ceci peut être accompli en faisant par exemple un tableau.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

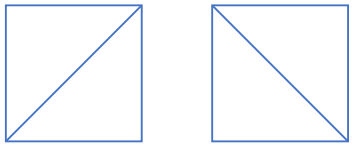
On obtient donc que le nombre de chaines binaires de longueur 10 qui ne contient pas deux 0 consécutifs est 144.

Notez qu'il est possible, et même relativement facile, d'utiliser Excel ou un logiciel semblable pour compléter le tableau de l'exemple précédent. Il s'agit d'un exercice que vous devriez faire.

Problème de triangulation

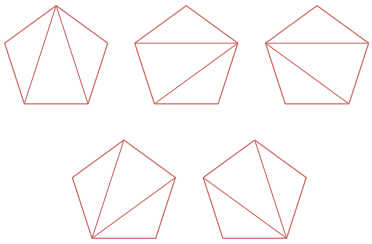
Exemple 2.2.3. De combien de façon différente un polygone à n côtés peut-il être divisé en triangle ? La solution de ce problème a été trouvé par Léonard Euler est donné par les nombres de Catalan. Cette suite de nombres apparait dans plusieurs problèmes de combinatoires. Ils sont nommés en l'honneur du mathématicien belge Eugène Charles Catalan (1814-1894) qui les a étudié. Il s'agit de l'une des suites de nombres parmi les plus importante de la combinatoire. Nous allons donc définir C_n comme étant le nombre de façon de trianguler un polygone à $n+2$ côtés, et chercher une relation de récurrence nous permettant de les calculer.

Pour ce faire, commençons par regarder quelques cas particulier. Il est facile de voir qu'il n'y a qu'une seule façon de trianguler un triangle, on a donc $C_1 = 1$. Dans le cas d'un quadrilatère, il y a deux possibilités comme illustré ci-contre. On écrira donc $C_2 = 2$.



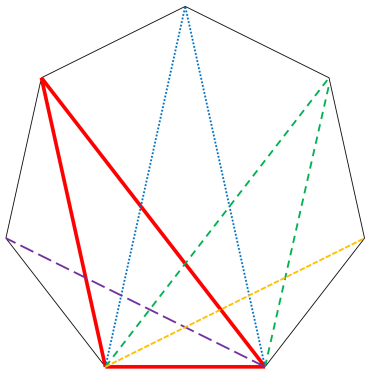
Triangulation d'un quarilatère

Pour le pentagone, un peu plus de travail est nécessaire, mais comme l'illustre la figure ci-contre, il n'est pas très difficile d'obtenir qu'il y a un total de 5 possibilités. On dira donc que $C_3 = 5$



Triangulation du pentagone

À partir de l'hexagone, les choses commence à ce compliquer un peu, et le nombre de cas augmente rapidement. Nous allons donc chercher à établir une relation de récurrence. L'idée est d'utiliser à nouveau la méthode de l'élément distingué. Prenons un polygone à $n+2$ côtés, et choisissons un côté quelconque. Ce côté doit obligatoirement faire partie d'un des triangles de notre triangulation. Si le polygone possède $n+2$ côtés, nous aurons donc n choix de triangle qui peuvent contenir le côté choisis.



Chacun de ces triangles divise le polygone original en trois régions. Au centre un triangle, à gauche et à droite deux nouveaux polygones que nous devons trianguler. Par exemple, le triangle en rouge ci dessus, nous donne un triangle à sa gauche, et un pentagone à sa droite. Donc une fois que le triangle rouge est fixé, d'après le principe du produit, il y a C_1C_3 façons de trianguler la figure en incluant ce triangle (le rouge). Maintenant il faut considérer tout les triangles pour lesquels un côté est le côté choisi. Le principe de la somme nous affirme donc dans le cas précis de l'heptagone ci-dessus que :

$$C_5 = C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0$$

Cette récurrence peut bien entendu être généralisé à tout les polygônes à $n+2$ côtés, on obtient donc :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1}$$

Il reste cependant un problème important. Quelle est la valeur de C_0 ? C'est à dire, combien y a-t-il de façon de trianguler un polygone à 2 côtés ? Le problème n'ayant pas de sens précis géométriquement, nous allons

utiliser les valeurs que nous avons déjà trouvé pour la calculer. En utilisant la valeur de C_3, on obtient donc :

$$\begin{aligned} C_3 &= C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 \\ 5 &= 2C_0 + 1 + 2C_0 \\ 4C_0 &= 4 \\ C_0 &= 1 \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la valeur de C_n pour différentes valeurs de n. On obtient donc :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430

Notez que les nombres de Catalan possède une formule explicite relativement simple. Cette dernière est cependant hors de notre porter pour le moment. Nous aurons cependant l'occasion d'y revenir plus tard.

2.3 Les fonctions génératrices

Les fonctions génératrices sont un outils particulièrement utile dans l'étude de la combinatoire. Ils nous permettent en particulier d'appliquer les techniques de l'analyse et de l'algèbre au problème de combinatoire, en particulier dans le contexte des récurrence.

L'idée est de transformé une suite (qui décrit la solution d'un problème) sous forme de série. Par exemple, la solution de l'exemple de la chaine binaire de la section précédente nous a permis d'obtenir la suite

$$a_n = (2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...)$$

Nous pouvons alors penser à ces nombres comme les coefficients d'un polynôme de degré infinie (i.e. une série). On obtient donc la série :

$$2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + 21x^6 + 34x^7 + 55x^8 + 89x^9 + 144x^{10} + ...$$

Notez que les exposants dans notre série représente la position du coefficient dans notre suite. L'intérêt des séries génératrices vient du fait qu'il est souvant possible de trouver une forme condensé avec laquelle il est plus facile de travailler.

Séries géométriques : approche analytique

Exemple 2.3.1. On veut trouver la fonction génératrice de la suite $(1, 1, 1, 1, ...)$. Il est facile de voir que cette dernière est tout simplement $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Nous voulons maintenant chercher une forme condensé de notre fonction génératrice. Pour ce faire, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$. On a donc :

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n \\ xS &= x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + x^{n+1} \end{aligned}$$

Ceci nous permet donc d'obtenir $xS_n - S_n = x^{n+1} - 1$. En isolant le S_n, on obtient donc :

$$S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Finalement, pour trouver la fonction génératrice, il ne nous reste plus qu'à prendre la limite quand n tend vers l'infinie, ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \quad \text{si } |x| < 1$$

La fonction génératrice de la suite $(1,1,1,1,...)$ est donc $\frac{1}{1-x}$. Remarquez cependant qu'en prenant la limite, nous avons du ajouter la condition $|x| < 1$. Cette condition est nécessaire avec une approche analytique, car autrement la série est divergente. Remarquez cependant que dans le contexte des série génératrice, il est possible d'ignorer complètement cette condition. Ceci est possible grace à une approche algébrique.

Séries géométriques : approche algébrique

Bien que l'approche analytique que nous venons de voir nous permet de traiter une fonction génératrice comme une véritable fonction et d'appliquer les techniques du calcul différentiel et intégrale tel que calculer les limites, dérivées et intégrale d'une fonction génératrice, le rayon de convergence qui apparait peut sembler un peu étrange. La raison vient du fait qu'en réalité une fonction génératrice n'est pas une série au sens analytique, mais plutôt une série formelle. C'est l'algèbre moderne, et en particulier la théorie des espaces vectoriel et la théorie des anneaux qui nous permet de leur donner un sens précis.

L'idée d'une série formelle est de définir un nouvel objet, muni d'opérations d'addition et de multiplication, et d'en étudier leur propriété. Ceci est fait sans donner un sens aux x. Il n'est donc pas possible de remplacer x par un valeur, car il ne s'agit non pas d'une variable, mais d'un objet quelconque. L'avantage de cette approche est quel nous permet d'éviter complètement la question de convergence. Nous n'irons pas ici dans beaucoup de détail.

Exemple 2.3.2. Nous voulons maintenant utiliser une approche algébrique pour retrouver la fonction génératrice de la suite $(1,1,1,1,...)$. Pour ce faire, remarquons que si on pose $S = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$, alors on obtient :

$$S - xS = (1 + x + x^2 + x^3 + ...) - x(1 + x + x^2 + x^3 + ...) = 1$$

En isolant le S, on obtient alors le même résultat que précédement.

Remarquez que bien que ces deux approches soient tout à fait interchangeable dans le contexte de la combinatoire, il existe tout de même des différences importantes dans leur interprétation. Ceci signifie entre autre que ces deux approches ne doivent pas être confondu dans les cours d'analyse et d'algèbre. En analyse, la valeur du x joue un rôle important, ce qui rend la seconde approche incorrecte. Par contre, la seconde approche ne permet techniquement pas de calculer la dérivée ou l'intégrale, ce qui nous sera essentiel. En combinatoire, ces théoriquement la seconde approche qui est correcte, mais nous allons librement combiner ces deux techniques pour éviter de devoir définir une dérivée et intégrale formelle. De manière concrète, les deux résultats seraient les mêmes de toute façon, c'est au niveau des démonstrations que ce trouve les difficultés.

2.4 Problème de pièces de monnaie

Au chapitre 1, nous avons vu que pour tout entier $n \geq 4$, il est possible de faire un montant de n pence en utilisant uniquement des pièces de 2 et 5 pence. Nous allons maintenant nous intéresser à une question légèrement différente basé sur le même problème. Si $n \geq 4$, de combien de façon différente peut on former un montant de n pence en utilisant uniquement des pièces de 2 et 5 pence ? Pour ce faire, nous allons considerer deux approches différentes. La première en utilisant les récurrences, et la seconde en utilisant les fonctions génératrices. Pour conclure cette section, nous allons faire quelque commentaires concernant des différences importantes entre les deux méthodes.

Solution à l'aide d'une récurrence

Dans un premier temps, remarquons qu'il est impossible de faire un montant de 1 penny et de 3 pence. De plus, il existe exactement une façon de faire un montant de 2, 4 et 5 pence. Ces valeurs nous servirons de valeur initiale pour notre problème.

Maintenant, remarquons que pour faire un montant de n pence, on peut prendre un montant de $n-2$ pence et ajouter une pièce de 2 pence, ou prendre un montant de $n-5$ pence et ajouter une pièce de 5 pence. On obtient donc la récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 1 \\ x_n = x_{n-2} + x_{n-5}, \quad \forall n \geq 6 \end{cases}$$

À partir de cette récurrence, il nous est maintenant facile d'ajouter quelque valeurs, ce qui nous permet d'obtenir le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_n	0	1	0	1	1	1	2	1	3	2	4	4	5	7	7

Solution à l'aide des fonctions génératrices

Pour résoudre le problème avec les fonctions génératrices, nous allons commencer par trouver une fonction génératrice correspondant aux pièces de 2 pence, puis pour les pièces de 5 pence séparément, et finalement combiner les deux séries génératrices ensembles pour obtenir notre solution.

En utilisant uniquement les pièces de 2 pences, il existe aucune façon de faire une montant impair, et exactement une façon de faire un montant pair. Ceci nous donner donc la fonction génératrice suivante :

$$1 + 0x^1 + 1x^2 + 0x^3 + 1x^4 + 0x^5 + 1x^6 + 0x^7 + ... = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{1}{1-x^2}$$

Pour les pièces de 5 pence, l'idée est semblable. Il existe exactement une façon de faire tout les multiples de 5, et aucune pour les autres valeurs. La fonction génératrice est donc :

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^{5k} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^5)^k = \frac{1}{1-x^5}$$

Maintenant, pour obtenir le nombre de façon de faire un montant de n pence en utilisant des pièces de 2 pence et de 5 pence, il nous faut tout simplement multiplier les deux fonctions génératrices et prendre les coefficients de la série. Le problème ici est que le produit des deux fonctions génératrices nous donner la fonction $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)}$, et que nous n'avons aucune façon, du moins pour le moment, de réécrire cette fonction sous forme de série. L'idée de prendre les coefficients n'est donc pas possible pour le moment. En se limitant à un montant de 15 pence comme nous l'avons fait avec les récurrences, il nous est cependant possible de résoudre le problème en effectuant uniquement la multiplication de deux polynômes. On a donc :

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14})(1 + x^5 + x^{10} + x^{15}) =$$

$$1 + x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + 2x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + x^{13} + 2x^{14} + 2x^{15} + ... + x^{27} + x^{29}$$

Nous pouvons ignorer les termes de degré supérieur, car il ne peuvent pas contribuer au coefficient de x^k pour des valeur de $k \leq 15$. En prenant les coefficients, nous obtenons donc le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_n	0	1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2

Remarquez qu'il nous faut ignorer le coefficient de x^k pour les valeurs de $k \geq 16$, car nous ne les avons pas considéré dans nos fonctions génératrices pour 2 et 5 pence.

Comparaison des deux méthodes et conclusion

En comparant les tableaux que nous avons obtenu pour chacune des deux méthodes, vous devriez remarquez un problème évident. Les valeurs ne sont pas identique. Ceci n'a aucun sens, sauf si nous avons interpréter le problème de deux façons différentes. Ces exactement ce qui c'est produit ici. Dans la méthode avec les récurrences, l'ordre était importante. Un montant de 7 pence peut être obtenu en faisant $2+5$ ou $5+2$. Il y a donc deux possibilités. Ceci ce justifie en remarquant que notre récurrence nous affirme que pour faire 7 pence, on peut prendre un montant de 2 pence et ajouter 5 pence, ou prendre un montant de 5 pence et ajouter 2 pence.

Dans la méthode avec les fonctions génératrices, les choses sont un peut différente. En effectuant le produit des deux polynômes, nous avons systématiquement pris les pièces de 2 pence et premier, puis les pièces de 5 pence. La conséquence est que l'ordre de pièce n'était pas importante.

Conclusion : Les deux méthodes sont tout à fait correcte, et permettent toutes les deux de résoudre le problème original. La différence était qu'une information importante était manquante dans la question, et les deux méthodes nous ont permis de résoudre chacune une interprétation différente du problème.

Laquelle des deux solutions est la meilleure ? Ceci dépend bien sur de l'interprétation du lecteur, mais règle générale nous considérerons la seconde interprétation plus intéressante. La raison est qu'en pratique, l'ordre de pièce que vous remettez au caissier est rarement importante, tout ce qui compte est d'avoir le bon montant. Il n'y a aucune raison que le caissier compte vos pièces exactement dans le même ordre que vous l'avez fait.

2.5 Les probabilités

La combinatoire, les probabilités et les statistiques sont trois disciplines ayant de très nombreux liens. En effet, lorsque l'on fait des test d'hypothèse ou des intervalles de confiances, nous cherchons à déterminer des probabilités. Pour calculer une probabilité, on fait le quotient entre le nombre de façon d'obtenir un événement souhaité et le nombre d'événement total. Bien que notre cours ce concentre essentiellement sur la combinatoire, il nous sera donc intéressant d'appliquer nos connaissances à des problèmes de probabilités.

Definition 2.5.1. On définit la probabilité d'un événement comme étant :

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{Nombre de façon d'obtenir un événement souhaité}}{\text{Nombre total d'événement possible}}$$

On remarque facilement qu'un probabilité doit obligatoirement être une valeur entre 0 et 1. On la dénote souvent en terme de pourcentage, mais ce n'est pas obligatoire. De plus, la somme de toute les probabilités doit obligatoirement être 1.

Exemple 2.5.1. Parmi un groupe de 7 hommes et 8 femmes, on souhaite élire un comité de 4 personnes. Quelle est la probabilité que ce comité soit mixte ? Pour ce faire, commençons par calculer le nombre de comité total possible. Comme nous avons un total de 15 personnes, il y a d'après le principe du produit $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$ façon de choisir 4 personnes (de manière ordonné), et pour chacune des configurations, il y a 4! façons de les réarranger. Par le principe du quotient nous avons donc $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!} = 1365$ comités possible. Maintenant, nous devons déterminer parmi tout les comités, combien y en a-t-il qui sont mixtes. Pour ce faire, il est plus facile de considérer le complément. On a donc en applicant la même technique que précédemment :

1. Comités formés de 4 hommes : $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$.
2. Comités formés de 4 femmes : $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$.

Il y a donc un total de $1365 - 35 - 70 = 1260$ comités mixte. Maintenant, il ne nous reste plus qu'à déterminer la probabilité que le comité soit mixte. En applicant la définition d'une probabilité, on a donc :

$$\text{Probabilité} = \frac{1260}{1365} \approx 0,923 = 92,3\%$$

Chapitre 3

Choisir des objets

3.1 Les 4 façons de choisir des objets

Nous allons maintenant nous intéresser au problème de choisir des objets. Parmi un ensemble de n objets, nous souhaitons en choisir k. Selon le contexte ceci donne lieux à un ensemble de 4 problèmes de niveau de difficulté différent. Les 4 problèmes peuvent être obtenu en considérant la réponse aux deux questions suivantes :

1. Est-ce que l'ordre des objets est important ? (Oui / Non)
2. Est-ce qu'il y a remise ? (Oui / Non)

La seconde question, celle de la remise, peut être réécrite en se demandant si nous pouvons choisir à plusieurs reprise le même objet. Les quatre problèmes sont en fait très courant dans la pratique, et nous pouvons considérer par exemple les quatre problèmes concrets suivant :

1. Dans une classe de 2e année à l'élémentaire contenant 30 étudiants, chaque matin un étudiant est choisit au hasard pour prendre les présences. De combien de façon différente les élèves peuvent être choisit sur une période d'une semaine (Lundi au vendredi) ?
2. Aux olympiques, 8 coureur participe à la final du 100 mètre. De combien de façons différentes les médaille d'or, d'argent et de bronze peuvent elle être distribué ?
3. Dans une classe de 25 étudiants, un comité de 3 personnes doit être formé. De combien de façon différente ceci peut être accomplie ?
4. De combien de façon différente pouvez vous choisir une douzaine de beigne si 5 sorte de beigne sont disponible, toutes en très grande quantité ?

Nous allons traiter chacun de ces 4 problèmes en détail dans les sections qui suivent. Pour le moment, vous devriez cependant commencer par vous questions sur l'ordre et la remise dans chacun des cas.

3.2 Avec ordre / Avec remise

Le plus simple des quatre problèmes consiste à choisir k objets parmi n avec ordre et avec remise. Dans ce cas, il s'agit d'une simple application du principe du produit. On a donc n options pour le premier objet ET n options pour le deuxième objet ET n option pour le troisième objet ET ..... ET n options pour le k-ième objet, ce qui nous fait un total de n^k façon de choisir k objets.

Exemple 3.2.1. Dans une classe de 2e année à l'élémentaire contenant 30 étudiants, chaque matin un étudiant est choisit au hasard pour prendre les présences. De combien de façon différente les élèves peuvent être choisit sur une période d'une semaine (Lundi au vendredi) ? Dans ce cas, on remarque que le problème se fait avec ordre et avec remise, ce qui nous permet d'affirmer qu'il y a 30^5 = 24 300 000 façons de choisir les étudiants.

3.3 Avec ordre / Sans remise

Comme pour le cas précédent, choisir k objets parmi n avec ordre et sans remise est une simple application du principe du produit. On a donc n options pour le premier objet ET $(n-1)$ options pour le deuxième objet ET $(n-2)$ option pour le troisième objet ET ..... ET $(n-k+1)$ options pour le k-ième objet, ce qui nous fait un total de $\frac{n!}{(n-k)!}$ façon de choisir k objets.

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times (n-k+1) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times (n-k-2) \times ... \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple 3.3.1. Aux olympiques, 8 coureurs participent à la final du 100 mètre. De combien de façons différentes les médaille d'or, d'argent et de bronze peuvent elle être distribué ? Dans ce cas, on remarque que le problème se fait avec ordre et sans remise, ce qui nous permet d'affirmer qu'il y a $\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$ façons de distribuer les médailles.

Les factorielles tombantes et montantes

Nous allons maintenant introduire une notation $n^{\underline{k}}$ pour représenter $\frac{n!}{(n-k)!}$. Cette notation est motivé du à de nombreuse similarité avec la fonction x^k. Cette notation porte le nom de factorielle tombante et peut être définit sans faire appelle à la notion de factorielle, ce qui nous permet d'étendre la notation à des valeurs de n qui ne sont pas nécessairement entière.

Definition 3.3.1. Si $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, alors on définit la factorielle tombante comme étant :

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$$

De la même façon, on définit la factorielle montante comme étant :

$$x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)(x+3)...(x+k-1) = \prod_{i=0}^{k-1}(x+i)$$

Les différences finis

Nous voulons maintenant motivé la notation utilisé pour les factorielles tombantes en illustrant un lien important avec le calcul différentielle. Pour ce faire, rappellons que la dérivé d'une fonction $f(x)$ est définie comme étant :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dans le contexte des mathématiques discrètes, il n'est pas vraiment intéressant de considérer des valeurs de h qui tendent vers 0. Après tout, nous travaillons la majorité du temps avec des entiers. Nous allons donc fixer h comme étant le plus petit entier positif différent de 0, c'est à dire 1. Ceci nous amène à la définition suivante :

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

Cet opération porte le nom de différence fini. En applicant cet opérateur à nos factorielles tombantes, nous obtenons donc dans le cas où x et k sont des entiers positifs : :

$$\begin{aligned} \Delta x^{\underline{k}} &= (x+1)^{\underline{k}} - x^{\underline{k}} = \frac{(x+1)!}{(x+1-k)!} - \frac{x!}{(x-k)!} = \frac{(x+1)x!}{(x-k+1)!} - \frac{(x-k+1)x!}{(x-k+1)!} \\ &= \frac{x!}{(x-k+1)!}\left[(x+1) - (x-k+1)\right] = k\frac{x!}{(x-k+1)!} = k\frac{x!}{(x-(k-1))!} = kx^{\underline{k-1}} \end{aligned}$$

Comme vous devriez pouvoir le remarquer relativement facilement, la formule ainsi obtenu ressemble étrangement à la formule pour calculer la dérivé de la fonction x^k. C'est cette anologie, et de nombreuse autre similaire, qui ont motivé la notation.

3.4 Sans ordre / Sans remise

Nous sommes maintenant intéressé au problème de choisir k objets parmi n sans ordre et sans remise. Nous savons déjà qu'il y a $n^{\underline{k}}$ façon de choisir k objets parmi n avec ordre et sans remise. De plus, on remarque qu'une fois les k objets choisit, il y a $k!$ façon de les ordonnés. En utilisant le principe d'équivalence, on obtient donc que le nombre de façon de choisir k objet parmi n sans ordre et sans remise est donné par la formule suivante :

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cette valeur porte le nom de coefficient binomial. On le dénote par $\binom{n}{k}$. En l'écrivant en terme de factorielle, il est bien entendu supposé que les valeurs de n et k sont des entiers positifs. Il faut cependant noté qu'en le définissant en terme de factorielle tombante, le n peut très bien être n'importe quel nombre réel. C'est donc cette dernière que nous utiliserons comme définition du coefficient binomial.

Definition 3.4.1. Si n est un nombre réel et k un entier positif, on définit le coefficient binomial comme étant :

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Dans le cas particulier où n est un nombre entier positif, le coefficient binomial peut être réécrit sous la forme :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exemple 3.4.1. Dans une classe de 25 étudiants, un comité de 3 personnes doit être formé. De combien de façon différente ceci peut être accomplie ? Comme dans un comité, il n'est pas possible de répéter plus d'une fois le même étudiant, et de plus l'ordre des trois étudiants n'a pas d'importance, la solution est donné par le coefficient binomial. On a donc :

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = 2\ 300$$

Il y a donc 2300 façons différentes de formé un comité de 3 étudiants parmi une classe de 25 étudiants.

Une relation de récurrence

En applicant **la méthode de l'élément distingué** au problème de choisir des objets sans ordre et sans remise, il nous est possible d'obtenir une formule de récurrence particulièrement utile. L'idée est la suivante : Supposons que nous devons choisir k objets parmi n sans ordre et sans remise. Fixons un élément x quelconque parmi les n. Alors x peut faire parti de k éléments choisi ou non. S'il fait parti des k éléments, alors il nous en reste $k-1$ à choisir, ce qui peut être fait de $\binom{n-1}{k-1}$ façon. D'un autre côté, si x ne fait pas parti des k objets choisi, alors il y a $\binom{n-1}{k}$ façons de choisir les k objets. En combinant ces deux valeurs, on obtient :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Cette formule est bien entendu valide si $n \geq 2$ et $1 < k < n$. Il nous faut donc chercher les valeurs au limite. Pour ce faire, il est facile de remarquer que :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1$$

Cette relation de récurrence nous permet de calculer facilement les petites valeurs du coefficient binomial. Ceci est accompli à l'aide du triangle de Pascal.

Triangle de Pascal

$n = 0$:					1					
$n = 1$:				1		1				
$n = 2$:			1		2		1			
$n = 3$:		1		3		3		1		
$n = 4$:	1		4		6		4		1	
$n = 5$:	1	5		10		10		5		1

La triangle est obtenu en plaçant premièrement un 1 sur la première ligne, et toutes les autres lignes sont obtenues en commençant et terminant par un 1, et les autres valeurs sont la somme des deux valeurs qui se trouve immédiatement au dessus. Le triangle de Pascal n'est en fait qu'une manière visuelle de représenter la formule de récurrence. Si on souhaite trouver la valeur de $\binom{4}{2}$, on regardera dans la ligne identifié $n = 4$, puis on prendra le 3^e élément. Attention, il ne s'agit pas d'un typo. Le premier élément de chaque ligne est l'élément $i = 0$. On aura donc :

$$\binom{4}{2} = 6$$

Ce qui correspond à la valeur que vous auriez obtenu en calculant les factoriels (vous devriez le vérifier!!!).

Compter les sous-ensembles

Combien y a-t-il de sous-ensembles de A si A est un ensemble de n éléments ? Pour trouver la réponse, nous allons appliquer deux approches différentes, ce qui nous permettra par la même occasion d'obtenir une formule intéressante pour les coefficients binomiaux.

Comme première méthode pour compter le nombre de sous-ensemble, nous allons appliquer le principe du produit. Pour ce faire, remarquer que pour former un sous-ensemble de A, il suffit de déterminer pour chacun des n éléments s'il fait parti du sous-ensemble ou non. On a donc 2 options pour chacun des n éléments de A, ce qui nous donne 2^n possibilités.

Comme deuxième approche, remarquons qu'en comptant le nombre de façon de choisir k éléments parmi les n éléments de l'ensemble A, nous avons en fait déterminer le nombre de sous-ensemble de A contenant exactement k éléments. Maintenant, comme un sous-ensemble peut avoir un nombre d'éléments allant de 0 jusqu'à n, il suffit d'appliquer le principe de la somme pour obtenir $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ sous-ensemble de A.

Comme nous avons compter deux fois exactement le même chose, on note que ces deux valeurs doivent être égale. On obtient donc l'égalité suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

De plus, au chapitre 1 nous avons démontré en utilisant le principe de la bijection qu'il y a autant de sous-ensemble de A contenant k éléments que de sous-ensemble de A contenant $n - k$ éléments. Ceci nous donne donc la formule :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

La fonction génératrice

Nous voulons maintenant trouver une fonction génératrice pour les coefficients binomiaux. Cette dernière est particulièrement facile à trouver moyennant une petite observation. Considérons le polynôme $(1 + x)^n$. On a donc un produit de n facteurs :

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)...(1+x)}_{n \text{ fois}}$$

De combien de façon peut ton choisir un terme de chacun des facteurs pour obtenir x^k ? Il s'agit de remarquer que pour obtenir x^k il faut choisir exactement k fois un x, et $n-k$ fois un 1. Comme l'ordre n'est pas important, et qu'il n'est pas possible de choisir plusieurs fois le même x, la solution est donné par le coefficient binomial $\binom{n}{k}$. En effectuant le produit on obtiendra donc $\binom{n}{k}$ fois un x^k, ce qui sera donc le coefficient de x^k après avoir effectué le produit. Ceci nous permet donc d'obtenir la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

Maintenant en se rappelant que le coefficient binomial devient 0 si $k > n$, on peut étendre notre somme jusqu'à l'infinie pour obtenir la fonction génératrice.

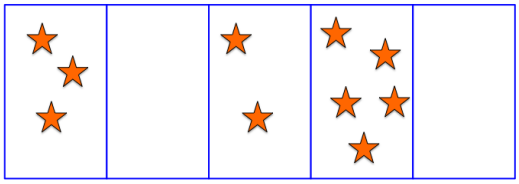
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

3.5 Sans ordre / Avec remise

Le dernier des 4 problèmes consiste à trouver le nombre de façon de choisir k objets parmi n sans ordre et avec remise. Il s'agit du plus difficile des 4 problèmes. Nous allons dénoté la solution du problème par $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ et étudier les différentes propriétés de ce coefficient.

Une formule explicite

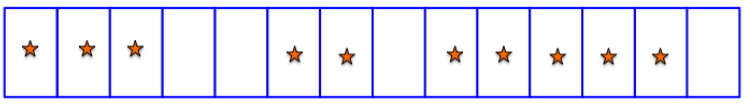
Pour trouver une formule explicite pour le coefficient $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, nous allons commencer par regarder un cas particulier, puis revenir à la solution générale par la suite. Supposons qu'on veut choisir 10 objets parmi 5 types différent, avec remise et sans ordre. C'est à dire nous voulons calculer la valeur de $\left\langle {5 \atop 10} \right\rangle$. La première étape de la résolution consiste à réaliser que le problème est en fait équivalent à celui de placer 10 étoiles dans 5 cases différentes. En effet, chaque case correspond à un type d'objet, et les étoiles consiste à choisir un objet de ce type. Voici un exemple de l'une des configurations possible.



Ensuite, il s'agit de remarquer que la configuration ci-dessus peut être réécrite de manière symbolique sous la forme :

$$***||**|*****|$$

Ou chaque $*$ représente une étoile, et les barres verticales $|$ représentent la délimitation entre chacune des cases. Notez qu'il est inutile de placer une barre verticale au tout début et à la toute fin, car celle-ci serait fixe pour chacune des configuration possible. Donc seule les délimitations entre deux cases sont notés. Le problème est donc équivalent à trouver combien il y a de façon d'arranger 10 étoiles et 4 barres verticales. C'est ici le point le plus intéressant. Ce dernier problème est en fait équivalent à sélectionner 10 emplacement pour nos étoiles, sur une possibilité de 14 emplacement au total. Notre configuration qui nous a servi d'exemple peut donc être illustré comme suit :



Il s'agit donc de choisir 10 cases parmi 14, sans ordre et sans remise, ce que nous savons déjà faire. Le nombre de possibilité est donc :

$$\binom{14}{10} = \frac{14!}{10!\ 4!}$$

Maintenant, pour le problème général de choisir k objets parmi n sans ordre et avec remise, la solution est très semblable. Il faudra donc trouvé combien il y a de façon d'arranger k étoiles et $n-1$ barres verticales. Le $n-1$ venant du fait que si nous avons n cases, alors il doit y avoir $n-1$ délimitations entre les cases. Ensuite, on réalise que le problème revient donc à placer k étoiles dans $k+n-1$ emplacement, sans ordre et sans remise. Par le principe de la bijection, la solution générale doit donc être :

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

Exemple 3.5.1. Au Canada, les billets de banques viennent en dénomination de 5\$, 10\$, 20\$, 50\$ et 100\$. Combien y a-t-il de façon de choisir 4 billets de banques (pas nécessairement différent) ? Comme il est tout à fait acceptable de choisir plusieurs fois la même dénomination, le problème est avec remise. Par contre, l'ordre dans lequel les billets sont choisir n'a pas d'importance, le problème est donc sans ordre. On peut donc appliquer la formule que nous venons de développer. On a donc :

$$\frac{(4+5-1)!}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4!\ 4!} = \frac{5\times 6\times 7\times 8}{2\times 3\times 4} = \frac{1680}{24} = 70 \text{ possibilités}$$

Exemple 3.5.2. Une usine produit des crayons de 10 couleurs différentes. Chacune de ces couleurs sont disponible en très grande quantité. De combien de façon un client peut-il choisir 7 crayons de sorte qu'au moins deux d'entre eux soient de la même couleur ? On remarque ici qu'il est plus facile de compter le complément plutôt que de répondre directement à la question. il est facile de voir que le problème se fait sans ordre. Nous allons donc commencer par compter le nombre de façon de choisir 7 couleurs parmi 10 avec remise, et soustraire le nombre de façon de choisir 7 couleurs parmi 10 sans remise. On a donc :

$$\left\langle {10 \atop 7} \right\rangle - \binom{10}{7} = \frac{(10+7-1)!}{7!(10-1)!} - \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{16!}{7!\cdot 9!} - \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 11\ 440 - 120 = 11\ 320$$

Il y a donc 11 320 façon différente de choisir 7 crayons de sorte qu'au moins deux d'entre eux soient de la même couleur.

Exemple 3.5.3. Combien de mots de 8 lettres ne contiennent pas la combinaison AB ?

Première méthode : Pour répondre à la question, commençons par considérez tout les mots de 8 lettres. Ceci est facile à calculer, il s'agit de 26^8. Maintenant, nous allons soustraire tout les mots qui contiennent la séquence AB. Pour ce faire, on doit premièrement choisir les 6 lettres manquantes, ce qui peut être fait de 26^6 façon, puis pour chacune des lettres choisir si elles vont avant ou après le AB, ce qui peut peut être fait de $\left\langle {2 \atop 6} \right\rangle$ façons. On remarque maintenant que les mots contenant deux fois la suite AB ont été soustrait deux fois, il nous faut donc les ajouter à nouveau. En suivant la même idée, on choisit les 4 lettres manquantes, ce qui peut être fait de 26^4 façons, puis on choisit à quel endroit les placer, soit avant, entre ou après les deux AB, ce qui peut être fait de $\left\langle {3 \atop 4} \right\rangle$ façons. En continuant de la même façon, on obtient finalement :

$$26^8 - 26^6\left\langle {2 \atop 6} \right\rangle + 26^4\left\langle {3 \atop 4} \right\rangle - 26^2\left\langle {4 \atop 2} \right\rangle + 26^0\left\langle {5 \atop 0} \right\rangle$$

Deuxième méthode : On peut aussi résoudre le problème à l'aide d'une récurrence. Dénotons par a_n le nombre de mots de n lettre qui ne contiennent pas la suite AB. On remarque premièrement que pour tout les mots de longueur $n-1$, on peut toujours ajouter une lettre quelconque, sauf dans le cas ou le mot se terminerais par AB. On a donc la récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 26a_{n-1} - a_{n-2}, & \forall n \geq 3 \\ a_1 = 26 \\ a_2 = 26^2 - 1 = 675 \end{cases}$$

Exemple 3.5.4. Combien de mots de 8 lettres ne contiennent pas la combinaison AA ? Dans ce cas, bien que le problème puisse à première vu sembler très semblable à l'exemple ci-dessus, la solution reste très différente. Le fait que les deux lettres soient identiques veut dire qu'il est possible que la suite AA apparaisse deux fois dans le même mot de manière disjointe, par exemple $AABCAADE$ ou sous la forme d'une suite AAA. Le truc ici est d'utiliser une récurrence. L'idée est très semblable à la récurrence que nous avons obtenu pour les chaines binaires au chapitre précédent. On a donc :

$$\begin{cases} a_n = 25a_{n-1} + 25a_{n-2}, & \forall n \geq 3 \\ a_1 = 26 \\ a_2 = 26^2 - 1 = 675 \end{cases}$$

Lien avec les factorielles montantes

Le coefficient pour compter des objets avec remise et sans ordre possède plusieurs similarité avec le coefficient binomial. Nous avons déjà rencontrer une formule pour le calculer en terme du coefficient binomial, mais les similarités ne s'arrête pas là.

$$\begin{aligned} \left\langle {n \atop k} \right\rangle &= \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)(n+2-3)...3\cdot 2\cdot 1}{k!(n-1)(n-2)(n-3)...3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)(n+k-3)...(n+1)n}{k!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)...(n+k-1)}{k!} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} \end{aligned}$$

Remarquer que cette dernière formule peut être évalué pour tout nombre réel n et va donc nous servir de définition. On a donc les deux formules très similaire suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \qquad \text{et} \qquad \left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}$$

Une relation de récurrence

Nous allons maintenant nous intéresser à trouver une relation de récurrence pour les coefficients $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$. Pour ce faire, commençons par trouver des valeurs initiales. Il est facile de voir qu'il y a n façon de choisir 1 objets parmi n. Dans ce cas l'idée de avec ou sans remise, ainsi qu'avec ordre ou sans ordre n'a pas d'importance. De plus, il n'y a qu'une seule façon de choisir k objets parmi 1. Ceci nous donne donc les valeurs initiales suivantes :

$$\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = n \quad \text{et} \quad \left\langle {1 \atop k} \right\rangle = 1$$

Maintenant pour la récurrence, nous allons utiliser la méthode de l'élément distingué. Parmi les n éléments, fixons un élément x. En choisissant les k éléments parmi n, l'élément x peut faire parti ou ne pas faire parti de notre choix. Si x ne fait pas partie de notre sélection, alors les k éléments ont été choisi parmi $n-1$ ce qui nous donne $\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle$ possibilité. Maintenant, si l'élément x fait parti de notre sélection, il ne nous reste plus que $k-1$ éléments à choisir, qui peuvent être choisis parmi les n éléments car il y a remise. Nous avons donc dans ce cas $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ possibilité. En applicant le principe de la somme, on obtient donc :

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$$

La fonction génératrice

Pour trouver la fonction génératrice de la distribution $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, l'idée est de commencer par la série géométrique, puis de la dériver.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$
$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)x^k = \frac{2}{(1-x)^3}$$
$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)x^k = \frac{d}{dx}\frac{2}{(1-x)^3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(k+2)x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)(k+3)x^k = \frac{3!}{(1-x)^4}$$

Ceci nous amène à faire l'hypothèse suivante :

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n-1)!}{k!}x^k = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{(1-x)}$$

Cette dernière égalité peut être démontré facilement à l'aide du principe d'induction. En réarrageant les termes on obtient donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

qui est la fonction génératrice que nous cherchions.

3.6 Résumer des 4 façons de choisir des objets

Les 4 façons de compter que nous avons étudié dans cette section sont résumé dans le théorème ci-dessous sous forme d'un tableau.

Théorème 3.6.1. Les 4 façons de choisir des objets que nous avons étudier dans les sections précédentes peuvent être résumé dans le tableau ci-dessous :

Combien y a-t-il de façon de choisir k objets parmi n ?

	Sans remise	Avec remise
Sans ordre	$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Avec ordre	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Avec les relations de récurrence suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{et} \quad \left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$$

De plus, nous avons obtenu les deux séries génératrices suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

3.7 Le problème du MISSISSIPPI

Nous allons maintenant nous pencher sur la question de savoir de combien de façon différente peut-on ordonné les lettres du mot MISSISSIPPI. Comme le mot contient 11 lettres, à première vu la solution

semble être 11!. Le problème ici est que plusieurs des lettres sont identiques, nous avons donc compter plusieurs configuration deux fois (ou plus). Il nous faut donc appliquer le principe d'équivalence. Pour ce faire, commençons par faire un tableau indiquant la fréquence de chacune des lettres.

Lettre	**Fréquence**
M	1
I	4
S	4
P	2
Total	11

Comme les 4 I peuvent être permutés de 4! façon, les 4 S peuvent être permutés de 4! façons, et les deux P peuvent être permuté de 2 façons, on a donc que chacune des configurations donne lieu à $4! \cdot 4! \cdot 2 = 1152$ configurations équivalentes. Le principe d'équivalence nous donne donc que le nombre de configuration est donné par :

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2} = \frac{39\ 916\ 800}{1152} = 34\ 650 \text{ configurations}$$

Le problème du MISSISSIPPI peut en fait être généralisé à la question de savoir de combien de façon différente peut-on ordonné n objets si parmi les n objets il y a n_1 objets de type 1, n_2 objets de type 2, n_3 objets de type 3, ..., n_k objets de type k. La solution de ce problème porte le nom de coefficient multinomial. En utilisant la même méthode que précédement, ce dernier nous est donné par la formule suivante :

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3\ \dots\ n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Plutôt que d'utiliser le principe d'équivalence, il nous est aussi possible d'utiliser ce que nous avons vu dans ce chapitre sur les coefficients binomiaux. Nous allons maintenant étudier une approche alternative pour résoudre le problème, en illustrant la méthode à l'aide de seulement 3 types d'objets différents. Supposons que nous avons n_1 objets de type 1, n_2 objets de type 2 et n_3 objets de type 3. Combien y a-t-il de façon d'ordonner ces $n_1 + n_2 + n_3$ objets ? Pour ce faire, on commence par placer les objets de type n_1. Pour ce faire, il s'agit de choisir n_1 positions parmi $n_1 + n_2 + n_3$ emplacement possible sans ordre et sans remise. On a donc :

$$\frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1!(n_1 + n_2 + n_3 - n_1)!} = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1!(n_2 + n_3)!}$$

Maintenant, il nous reste $n_2 + n_3$ emplacement vide pour les objets restant. Nous allons placer les objets de type 2. On doit donc choisir n_2 emplacement parmi un total de $n_2 + n_3$ emplacement restante. On a donc :

$$\frac{(n_2 + n_3)!}{n_2!(n_2 + n_3 - n_2)!} = \frac{(n_2 + n_3)!}{n_2!\ n_3!}$$

On remarque ensuite que les n_3 emplacement restante doivent être remplie par les objets de type 3. Il y a donc seulement une possibilité pour placer les objets de ce type. Finalement, remarquons que nous avons placer les objets de type 1 ET les objets de type 2 ET les objets de type 3. Il s'agit donc d'appliquer le principe du produit pour compléter le problème. On a donc :

$$\frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1!(n_2 + n_3)!} \cdot \frac{(n_2 + n_3)!}{n_2!\ n_3!} = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}$$

Cette formule est exactement la même que nous avons déjà obtenu.

Théorème 3.7.1. Le nombre de permutation de n_1 objets de type 1, n_2 objets de type 2, n_3 objets de type 3,...,n_k objets de type k est donné par le coefficient multinomial qui peut être évalué par la formule :

$$\binom{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}{n_1\ n_2\ n_3\ \dots\ n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k)!}{n_1!\ n_2!\ n_3!\ \dots\ n_k!}$$

3.8 Quelques problèmes supplémentaires

Dans cette section, nous voulons regarder quelques problèmes supplémentaires, qui en apparence se ressemble beaucoup. L'important ici est de porter une attention particulière aux différences entre chacun, et ce qui nous amène à utiliser une méthode ou une autre pour résoudre chacun de ces problèmes.

Exemple 3.8.1. Un sac contient 10 billes, toutes de couleurs différentes. De combien de façon différente Mélanie, Julie et Anne peuvent-ils choisir chacun une bille ? Pour répondre à la question, au moins deux approches sont possible. Premièrement, nous pouvons utiliser le principe du produit, ce qui nous donne directement $10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités. Nous pouvons aussi regarder le problème en terme d'objets que nous voulons choisir. Dans ce cas, il s'agit de choisir 3 objets parmi 10 avec ordre et sans remise, ce qui nous donne :

$$10^{\underline{3}} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \times 9 \times 10 \text{ possibilités}$$

À noter que les deux méthodes sont bien entendu complètement équivalentes.

Exemple 3.8.2. Un sac contient 10 billes, toutes de couleurs différentes. De combien de façon différente René peut-il choisir 3 billes ? L'idée est très semblable à l'exemple précédent, mais cette fois comme une seule personne doit choisir les billes, l'ordre n'est pas importante. On doit donc choisir 3 objets parmi 10 sans ordre et sans remise, ce qui nous donne :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\ 7!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 120 \text{ possibilités}$$

Exemple 3.8.3. Un sac contient 40 billes. Parmi les 40 billes, 10 sont bleus, 10 sont jaunes, 10 sont vertes et 10 sont rouges. De combien de façon différente René peut-il choisir 3 billes ? Dans ce cas, comme nous avons plus de billes de chaque couleur que de billes que nous souhaitons choisir, le problème se fait avec remise. On doit donc choisir 3 objets parmi 4 sans ordre et avec remise. On a donc :

$$\left\langle {4 \atop 3} \right\rangle = \frac{(4+3-1)!}{3!(4-1)!} = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 20 \text{ possibilités}$$

Exemple 3.8.4. Un sac contient 40 billes. Parmi les 40 billes, 10 sont bleus, 10 sont jaunes, 10 sont vertes et 10 sont rouges. De combien de façon différente Loïk, Isabelle et Élise peuvent-ils choisir chacun une bille ? Dans ce cas, le problème revient à choisir 3 objets parmi 4 avec ordre et avec remise. On a donc $4^3 = 64$ possibilités.

Exemple 3.8.5. Un sac contient 10 billes, toutes de couleurs différentes. De combien de façon différente Michel, René et Marie peuvent-ils choisir chacun 2 billes ? Dans ce cas, nous allons utiliser le principe du produit. Michel doit choisir 2 billes parmi 10 choix sans ordre et sans remise **ET** René doit choisir 2 billes parmi 8 choix sans ordre et sans remise **ET** Marie doit choisir 2 billes parmi 8 choix sans ordre et sans remise. On obtient donc :

$$\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2} = \frac{10!}{2!\ 8!} \cdot \frac{8!}{2!\ 6!} \cdot \frac{6!}{2!\ 4!} = \frac{10!}{2!\ 2!\ 2!\ 4!} = 18900 \text{ possibilités}$$

Exemple 3.8.6. Un sac contient 32 billes. Parmi les 32 billes, 10 sont bleus, 10 sont jaunes, 10 sont vertes et 2 sont rouges. De combien de façon différente Sarah peut-elle choisir 3 billes ? Dans ce cas, le problème revient essentiellement à choisir 3 objets parmi 4, sans ordre et avec remise. On a donc :

$$\left\langle {4 \atop 3} \right\rangle = \frac{(4+3-1)!}{3!(4-1)!} = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 20 \text{ possibilités}$$

Par contre, il est impossible d'avoir 3 billes rouges, car il n'y en a pas suffisamment. Il faut donc retiré une possibilité de la réponse. On a donc $20 - 1 = 19$ possibilités. À noter qu'ici une deuxième approche peut s'avérer intéressante et serait particulièrement intéressante dans le cas où nous aurions plus de contrainte. Il s'agit d'utiliser les fonctions génératrices. On peut en effet choisir $0, 1, 2$ ou 3 billes bleus, ce que l'on peut dénoter à l'aide de la fonction génératrice $(1 + x + x^2 + x^3)$. Il en est de même pour les billes jaunes et les

billes vertes. Pour ce qui est des billes rouges, nous pouvons choisir $0, 1$ ou 2 billes rouges seulement, ce qui nous donne la fonction génératrice $(1 + x + x^2)$. En multipliant le tout, on obtient donc :

$$(1 + x + x^2 + x^3)^3(1 + x + x^2) = x^{11} + 4x^{10} + 10x^9 + 19x^8 + 28x^7 + 34x^6 + 34x^5 + 28x^4 + 19x^3 + 10x^2 + 4x + 1$$

Notre réponse sera donc le coefficient de x^3, ce qui correspond au nombre de façon de choisir 3 billes. On obtient donc à nouveau 19.

Exemple 3.8.7. Un sac contient 25 billes. Parmi les 25 billes, 3 sont bleus, 5 sont jaunes, 7 sont vertes, 10 sont rouges. De combien de façons différentes peut-on distribuer les billes parmi 25 enfants si chaque enfant reçoit exactement une bille ? Dans ce cas, deux idées sont possibles. Dans un premier temps nous allons utiliser le principe du produit :

• Distribuer les billes bleus sans ordre et sans remise (3 parmi 25)

ET

• Distribuer les billes jaunes sans ordre et sans remise (5 parmi 22)

ET

• Distribuer les billes vertes sans ordre et sans remise (7 parmi 17)

ET

• Distribuer les billes rouges sans ordre et sans remise (10 parmi 10)

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\binom{25}{3}\binom{22}{5}\binom{17}{7}\binom{10}{10} = \frac{25!}{3!\ 5!\ 7!\ 10!} 1\ 177\ 930\ 353\ 600 \text{ possibilités}$$

Nous pouvons aussi de manière complètement équivalente interpréter le problème comme le problème du MISSISSIPPI, ce qui nous donne la réponse un peu plus rapidement.

Exemple 3.8.8. Un sac contient 40 billes. Parmi les 40 billes, 10 sont bleus, 10 sont jaunes, 10 sont vertes, et 10 sont rouges. De combien de façon différente John peut-il choisir 3 billes si parmi les 3 billes au moins une est verte ? De ce cas, nous allons procéder en calculant le complément, ce qui nous simplifiera grandement le travail. Nous allons donc compter le nombre total de possibilité, puis soustraire celle qui n'ont aucune bille verte. On a donc :

$$\left\langle\!\!\binom{4}{3}\right\rangle\!\! - \left\langle\!\!\binom{3}{3}\right\rangle\!\! = \frac{(4+3-1)!}{3!(4-1)!} - \frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = \frac{6!}{3!\ 3!} - \frac{5!}{3!\ 2!} = 20 - 10 = 10 \text{ possibilités}$$

Ici, la méthode des fonctions génératrices peut à nouveau s'avérer intéressant. En effet, la fonction génératrice correspondante aux billes bleus, aux billes jaunes et aux billes vertes est dans chacun des cas $(1 + x + x^2)$. À noter que nous n'avons pas mis le terme x^3, car il est impossible de choisir 3 billes de l'une de ces couleurs. Par contre, celle correspondante aux billes vertes sera $(x + x^2 + x^3)$, car nous devons en choisir au moins une. En multipliant le tout nous obtenons donc :

$$(1 + x + x^2)^3(x + x^2 + x^3) = x^9 + 4x^8 + 10x^7 + 16x^6 + 19x^5 + 16x^4 + 10x^3 + 4x^2 + x$$

La réponse chercher sera donc le coefficient de x^3, qui est bien entendu 10 comme nous l'avions déjà trouvé.

3.9 Le paradoxe des anniversaires

Le paradoxe des anniversaires n'est pas vraiment un paradoxe, mais plutôt un résultat surprenant et considéré par plusieurs comme étant contre intuitif. La question est de savoir combien de personne au minimum est-il nécessaire d'avoir dans une même pièce pour avoir au moins 50% de chance qu'au moins

deux personnes soit né la même journée. Avant d'attaquer ce problème, nous allons commencé par un problème relié, mais plus simple.

Combien de personne au minimum est-il nécessaire d'avoir dans une même pièce pour être certain qu'au moins deux personnes soit né la même journée ? En incluant les années bixectiles, le principe des nids de pigeons nous affirme que 367 personnes sont nécessaire pour être certain que deux personnes soient nées la même journée. Ceci correspond à la question de savoir combien de personne est-il nécessaire d'avoir dans une même pièce pour avoir au moins 100% de chance qu'au moins deux personnes soit né la même journée.

Basé sur notre réponse précédente, au a donc que la solution du problème avec 50% doit être entre 2 et 367 personnes. Pour trouver la solution exacte, le plus simple est de travailler avec le complément. Il est facile de voir que dans un groupe de n personnes, il y a 365^n façon de distribuer leur anniversaire durant l'année. De plus, il y a $\frac{366!}{(366-n)!}$ façon de distribuer les anniversaires de sorte que nous n'avons pas deux personnes ayant la même anniversaire. La probabilité que dans un groupe de n personnes, il n'y ait pas deux personnes ayant la même anniversaire est donc :

$$\frac{366!}{366^n(366-n)!}$$

Puis en prenant le complément, on obtient que la probabilité qu'il n'y ait pas deux personnes ayant le même anniversaire est donné par :

$$1-\frac{366!}{366^n(366-n)!}$$

La difficulté apparait lorsque vient le temps de trouver la valeur de n qui nous permet d'obtenir une probabilité de 50%. Il n'est pas possible d'isoler le n dû à la présence des factorielles. Pour trouver la valeur de n, il nous est donc nécessaire de faire des approximations à l'aide par exemple de la formule de Stirling, ou bien utiliser un logiciel comme Excel. Pour les besoins de notre cours, nous allons prendre la seconde approche.

C'est alors que le second problème apparait. Excel n'est pas capable d'évaluer directement cette formule du au fait que 366! est un très grand nombre. Pour remédier au problème, nous allons chercher à évaluer les différentes valeurs de notre suite à l'aide d'une récurrence. Si on dénote par x_n la probabilité que les n personnes aient des anniversaires différentes, on a donc :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{366!}{366^n(366-n)!} = \frac{366\cdot 365\cdot 364...(366-n+1)}{366\cdot 366\cdot 366\cdot ...\cdot 366} \\ &= \left(\frac{366}{366}\right)\left(\frac{365}{366}\right)\left(\frac{364}{366}\right)...\left(\frac{366-n+1}{366}\right) \\ &= \left(\frac{366-n+1}{366}\right)x_{n-1}, \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

En utilisant cette récurrence avec la valeur initiale $x_1 = 1$, on obtient le tableau ci-contre. Il ne nous reste plus qu'à prendre le complément et à chercher dans notre tableau la valeur de n correspondant à 50%. On obtient donc qu'il faut un minimum de 23 personnes pour avoir une probabilité de 50% d'avoir au moins deux personne né la même journée.

n	x_n	1-xn
1	100,00%	0,00%
2	99,73%	0,27%
3	99,18%	0,82%
4	98,37%	1,63%
5	97,29%	2,71%
6	95,96%	4,04%
7	94,39%	5,61%
8	92,59%	7,41%
9	90,56%	9,44%
10	88,34%	11,66%
11	85,92%	14,08%
12	83,34%	16,66%
13	80,61%	19,39%
14	77,74%	22,26%
15	74,77%	25,23%
16	71,71%	28,29%
17	68,57%	31,43%
18	65,39%	34,61%
19	62,17%	37,83%
20	58,94%	41,06%
21	55,72%	44,28%
22	52,52%	47,48%
23	49,37%	50,63%
24	46,27%	53,73%
25	43,23%	56,77%

Chapitre 4

Les problèmes d'occupation

4.1 Les problèmes d'occupation

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés à résoudre les problèmes d'occupation. De manière générale, le problème s'énonce comme suit :

Combien y a-t-il de façon de placer k boules dans n urnes ?

Les problèmes d'occupation consistent donc à déterminer le nombre de façon de placer k boules dans n urnes. Nous parlons des problèmes d'occupation au pluriel, car il s'agit en fait d'un ensemble de 8 problèmes tournant autour de la même question. Ceci est du au fait que les boules peuvent être soit identique ou différente, les urnes peuvent être identique ou différente, et finalement dans certain cas on accepte qu'une ou plusieurs urnes soient vides, alors que dans d'autre cas ceci n'est pas acceptable.

Dans les problèmes d'occupation, nous sommes donc amener à ce poser les trois questions suivantes :

1. Les boules sont-elles différentes ?
2. Les urnes sont-elles différentes ?
3. Les urnes peuvent-elles être vide ?

Comme la réponse à chacune de ces questions est oui ou non, nous sommes donc amener à résoudre un total de 8 problèmes différent. La bonne nouvelle est que le chapitre précédent nous permet immédiatement d'obtenir la réponse à 3 de ces 8 problèmes.

Problème 1 : Boules et urnes différentes, les urnes peuvent être vide

Combien y a-t-il de façon de placer k boules de couleurs différentes dans n urnes numéroté de 1 à n si on suppose que les urnes peuvent être vide ?

Dans ce cas, pour la première boule, nous avons n possibilité, pour la seconde boules nous avons à nouveau n possibilités, pour la troisième n possibilités, etc et donc par le principe du produit on a un total de n^k possibilités.

Problème 2 : Boules identiques, urnes différentes, les urnes ne peuvent pas être vide

Combien y a-t-il de façon de placer k boules identiques dans n urnes numéroté de 1 à n si on suppose que les urnes ne peuvent pas être vide ?

Pour résoudre ce problème, il s'agit d'imaginer les boules comme étant des étoiles comme ci-dessous :

* * * * * * * * * * * * * *

puis de choisir n espace dans lesquels placer des barres. Notez qu'étant donner que les boules sont toutes identiques, il n'est pas nécessaire de faire la distinction laquelle est la première, seconde, etc... Par contre, en

plaçant les barres, le premier groupement d'étoile sera dans la première urnes, le second groupement dans la seconde urnes, etc...

$$* * * * *| * *| * * * *| * | * *$$

Notez que pour avoir n groupement, il nous faut placer $n-1$ barres. Aucune des barres ne peut être placer avant la première étoile ou après la dernière, et au plus une barre peut être placé dans un espace. Ceci est du au fait que par hypothèse les urnes ne peuvent pas être vide. Comme il y a un total de $k-1$ espace, le problème revient donc à choisir $n-1$ est espace parmi $k-1$ sans ordre et sans remise. La solution est donc donné par le coefficient binomial $\binom{k-1}{n-1}$.

Problème 3 : Boules identiques, urnes différentes, les urnes peuvent être vide

Combien y a-t-il de façon de placer k boules identiques dans n urnes numéroté de 1 à n si on suppose que les urnes peuvent être vide ?

Ce problème est en fait très semblable au précédent. Par contre, comme les urnes peuvent être vide, nous allons donc considérez le problème avec remise, c'est à dire qu'il est possible de placer plus qu'une barre dans un espace. De plus, cette fois il est possible de placer une barre avant la première étoile ou après la dernière de sorte que la première urne et la dernière urnes peuvent être vide. On doit donc à nouveau choisir $n-1$ espace mais cette fois parmi $k+1$ et ce sans ordre, mais avec remise. En ce basant sur ce que nous avons trouvez dans le chapitre précédent, la solution est donc :

$$\left\langle {k+1 \atop n-1} \right\rangle = \frac{(k+1+n-1-1)!}{(n-1)!(k+1-1)!} = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \left\langle {n \atop k} \right\rangle$$

En se basant sur les notions que nous avons vu au chapitre précédent, nous avons donc réussi à résoudre 3 des 8 problèmes d'occupation. Par résoudre les 5 autres problèmes, nous allons devoir introduire les nombres de Stirling de deuxième espèce, et les nombres de partitions. Ces ce que nous allons faire dans les sections suivantes.

4.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce

Problème 4 : Boules différentes, urnes identiques, les urnes ne peuvent pas être vide

Combien y a-t-il de façon de placer k boules différentes dans n urnes identique si on suppose que les urnes ne peuvent pas être vide ?

Ce problème est considérablement plus difficile que les trois premier. Nous allons donc prendre une approche un peu différente en donnant un nom à la réponse, puis par la suite étudier ses propriétés.

Nous allons définir les nombres de Stirling de deuxième espèce, dénoté $\left\{ {k \atop n} \right\}$, comme étant le nombre de façon de placer k boules différentes dans n urnes identiques sans qu'aucune urnes ne soit vide à la fin [1]. Il est facile dans ce cas de remarquer que :

$$\left\{ {k \atop 1} \right\} = \left\{ {k \atop k} \right\} = 1$$

Ceci est du au fait que si nous avons 1 seule urnes, toutes les boules doivent aller dans cette urnes. D'un autre côté, si nous avons autant de boules que d'urnes, alors chacune des urnes doit recevoir exactement une boule. Comme les urnes sont identique, ça ne fait aucune différence dans quelle urnes une boule particulière a été placé. Pour calculer les autres valeurs, nous allons chercher une relation de récurrence.

Pour obtenir cette récurrence, il s'agit de remarquer que pour placer k boules dans n urnes, il nous faut premièrement placer $k-1$ boules, puis placer la dernière. Remarquons que deux cas peuvent se poser. Premièrement, on peut placer $k-1$ boules dans $n-1$ urnes, et dans ce cas il nous reste seulement une option pour la dernière boule, car aucune urne ne peut être vide, ou bien nous pouvons placer $k-1$ boules dans

1. Notez que certain auteur préfère la notation $S(n,k)$, avec un S majuscule pour les différentier des nombres de Stirling de première espèce.

n urnes, et dans ce cas nous avons n possibilité pour la dernière boule. En écrivant ceci sous forme d'une équation avec les nombres de Stirling de deuxième espèce, on obtient la relation suivante :

$$\left\{ {k \atop n} \right\} = \left\{ {k-1 \atop n-1} \right\} + n \left\{ {k-1 \atop n} \right\}$$

Exemple 4.2.1. Combien y a-t-il de façon de séparer 8 personnes en 3 groupes ? Pour ce faire, remarquons que la solution est donné par le nombre de Stirling de 2e espèce $\left\{ {8 \atop 3} \right\}$. Nous allons maintenant utiliser la récurrence pour trouver sa valeur.

$$\begin{aligned}
\left\{ {8 \atop 3} \right\} &= \left\{ {7 \atop 2} \right\} + 3 \left\{ {7 \atop 3} \right\} \\
&= \left\{ {6 \atop 1} \right\} + 2 \left\{ {6 \atop 2} \right\} + 3 \left(\left\{ {6 \atop 2} \right\} + 3 \left\{ {6 \atop 3} \right\} \right) = 1 + 5 \left\{ {6 \atop 2} \right\} + 9 \left\{ {6 \atop 3} \right\} \\
&= 1 + 5 \left(\left\{ {5 \atop 1} \right\} + 2 \left\{ {5 \atop 2} \right\} \right) + 9 \left(\left\{ {5 \atop 2} \right\} + 3 \left\{ {5 \atop 3} \right\} \right) = 6 + 19 \left\{ {5 \atop 2} \right\} + 27 \left\{ {5 \atop 3} \right\} \\
&= 6 + 19 \left(\left\{ {4 \atop 1} \right\} + 2 \left\{ {4 \atop 2} \right\} \right) + 27 \left(\left\{ {4 \atop 2} \right\} + 3 \left\{ {4 \atop 3} \right\} \right) = 25 + 65 \left\{ {4 \atop 2} \right\} + 81 \left\{ {4 \atop 3} \right\} \\
&= 25 + 65 \left(\left\{ {3 \atop 1} \right\} + 2 \left\{ {3 \atop 2} \right\} \right) + 81 \left(\left\{ {3 \atop 2} \right\} + 3 \left\{ {3 \atop 3} \right\} \right) = 333 + 211 \left\{ {3 \atop 2} \right\} \\
&= 333 + 211 \left(\left\{ {2 \atop 1} \right\} + 2 \left\{ {2 \atop 2} \right\} \right) = 333 + 211(3) = 966
\end{aligned}$$

Il y a donc 966 façons de séparer 8 personnes en 3 groupes.

Exemple 4.2.2. Combien y a-t-il de relation d'équivalence sur un ensemble de 8 éléments contenant exactement 3 différente classe d'équivalence ? La solution de ce problème est en fait la même que pour l'exemple précédent. On a donc :

$$\left\{ {8 \atop 3} \right\} = 966$$

Problème 5 : Boules et urnes différentes, les urnes ne peuvent pas être vide

Combien y a-t-il de façon de placer k boules différentes dans n urnes différentes si les urnes ne peuvent pas être vide ?

Pour ce faire, commençons par remarquer qu'il y a n^k façons de placer k boules différentes dans n urnes différentes, s'il n'y a aucune autre condition. Le problème étant que ceci inclut le cas ou au moins une urnes est vide. Comme il y a $\binom{n}{1}$ façons de choisir une urnes pour quelle soit vide, et $(n-1)^k$ façons de placer les k boules dans les $n-1$ urnes restantes. On a donc :

$$n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k$$

Le problème est maintenant que nous avons retirer deux fois les cas ou au moins deux urnes sont vide. Il faut donc les ajouter à nouveau. Pour ce faire, on choisit les deux urnes qui sont vide en calculant $\binom{n}{2}$ puis on place les k boules dans les $n-2$ urnes restante. On a donc :

$$n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k$$

Cette fois ce sont les cas où au moins trois urnes qui sont vide qui nous crée des maux de tête. Nous les avons ajouter deux fois, ce qui signifie que nous devons à nouveau les retirer. En continuant de la même façon, on obtient finalement la formule suivante pour le nombre de façons de placer k boules différentes dans n urnes différentes si les urnes peuvent être vide :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k$$

Retour sur les nombres de Stirling de deuxième espèce

Nous avons définit les nombres de Stirling de deuxième espèce $\left\{ {k \atop n} \right\}$ comme étant le nombre de façon de placer k boules différentes dans n urnes identiques sans qu'aucune urnes ne soit vide. Nous avons vu que le problème peut être résolu à l'aide d'une récurrence, ce qui nous a donné :

$$\left\{ {k \atop n} \right\} = \left\{ {k-1 \atop n-1} \right\} + n \left\{ {k-1 \atop n} \right\}$$

Avec les conditions initiales $\left\{ {k \atop 1} \right\} = \left\{ {k \atop k} \right\} = 1$. Remarquons que nous pouvons aussi résoudre le problème en considérant le nombre de façon de placer k boules différentes dans n urnes différentes sans qu'aucune urne ne soient vide, puis en retirant l'ordre des urnes, ce qui revient à les considérer identiques. On obtient donc la formule explicite suivante pour les nombres de Stirling de deuxième espèce :

$$\left\{ {k \atop n} \right\} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k$$

Remarquez que par la même occasion, nous pouvons réécrire la solution du problème 5 comme étant :

$$n! \left\{ {k \atop n} \right\}$$

Remarquez que l'origine des nombres de Stirling nous vient d'une question complètement différente à celle que nous avons utilisé comme définition. Les factorielles tombante $x^{\underline{k}}$ est la fonction génératrice de quelle suite ? Nous allons dénoté la solution du problème par $s(k.n)$ et appeller ces dernier les nombres de Stirling (signé) de première espèce. On a donc :

$$\sum_{i=0}^{\infty} s(k,n) x^i = x^{\underline{k}}$$

On peut alors se poser la question inverse et chercher les coefficients de x^k qui nous donne une somme de $x^{\underline{k}}$. La solution est donné par le nombre de Stirling de deuxième espèce. On a donc :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ {k \atop n} \right\} x^{\underline{i}} = x^k$$

Cette équation joue le rôle d'une fonction génératrice pour les nombres de Stirling de deuxième espèce. Les nombres de Stirling de première espèce pour leur part reviendront un peu plus tard dans le cours, mais uniquement en valeur absolue, ce qui leur donne une interprétation combinatoire plus intéressante. On définit alors :

$$\left[{k \atop n} \right] = |s(k,n)|$$

Problème 6 : Boules différentes, urnes identiques, les urnes peuvent être vide

Combien y a-t-il de façon de placer k boules différentes dans n urnes identiques si les urnes peuvent être vide ?

Considérant ce que nous avons fait depuis le début de la section, il nous est maintenant facile de résoudre le problème. Ce problème reviens à ce demander combien il y a de façon de placer k boules différentes dans 1 urnes puis le nombre de façon de les placer dans 2 urnes, puis le nombre de façon de les placer dans 3 urnes, etc.... Ce qui nous donne la formule $\sum_{i=1}^{n} \left\{ {k \atop i} \right\}$.

Démonstration de la fonction génératrice

Nous avons déjà vu qu'originalement, les nombres de Stirling de deuxième espèce (et de première espèce) ont été définit en terme d'une expression similaire à une fonction génératrice. Nous allons maintenant démontrer que notre définition, ainsi que la définition originale, sont en fait équivalente. Ces à dire, nous voulons démontrer l'égalité ci-dessous en utilisant notre formule de récurrence pour les nombres de Stirling de deuxième espèce :

$$\sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} = x^k$$

Pour ce faire, remarquons que la somme utilise la valeur de $\left\{ {k \atop 0} \right\}$ que nous n'avons pas définie. Comme il est impossible de placer k boules dans 0 urnes, nous allons définir cette valeur comme étant 0 pour tout $k > 0$. La démonstration de la fonction génératrice se fait alors par induction.

Si $k = 1$, nous avons :

$$\sum_{i=0}^{1} \left\{ {1 \atop i} \right\} x^{\underline{i}} = \left\{ {1 \atop 0} \right\} x^{\underline{0}} + \left\{ {1 \atop 1} \right\} x^{\underline{1}} = 0x^{\underline{0}} + 1x^{\underline{1}} = x$$

Supposons maintenant que l'équation est vraie pour un entier k, et vérifions pour $k+1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} \left\{ {k+1 \atop i} \right\} x^{\underline{i}} &= \sum_{i=1}^{k+1} \left\{ {k+1 \atop i} \right\} x^{\underline{i}} = \sum_{i=1}^{k} \left\{ {k+1 \atop i} \right\} x^{\underline{i}} + \left\{ {k+1 \atop k+1} \right\} x^{\underline{k+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[\left\{ {k \atop i-1} \right\} + i \left\{ {k \atop i} \right\} \right] x^{\underline{i}} + x^{\underline{k+1}} = \sum_{i=1}^{k} \left\{ {k \atop i-1} \right\} x^{\underline{i}} + \sum_{i=1}^{k} i \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} + x^{\underline{k+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i+1}} + \sum_{i=1}^{k} i \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} + x^{\underline{k+1}} = \sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i+1}} + \sum_{i=0}^{k} i \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} + x^{\underline{k+1}} - \left\{ {k \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} - 0 \left\{ {k \atop 0} \right\} x^{\underline{0}} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i+1}} + \sum_{i=0}^{k} i \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} (x-i) x^{\underline{i}} + \sum_{i=0}^{k} i \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} = \sum_{i=0}^{k} (x-i+i) \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} \\
&= x \sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} = x \cdot x^k = x^{k+1}
\end{aligned}$$

Ce qui confirme notre hypothèse. Remarquer que dans l'avant dernière ligne de la démonstration, nous avons utilisé la propriété des factorielle tombante suivante :

$$(*) \qquad x^{\underline{i+1}} = \frac{x!}{(x-(i+1))!} = \frac{x!}{(x-i-1)!} = \frac{x!}{(x-i)!}(x-i) = (x-i)x^{\underline{i}}$$

4.3 Les nombres de partitions (d'un entier)

Problème 7 : Boules et urnes identiques, les urnes ne peuvent pas être vide

Combien y a-t-il de façon de placer k boules identique dans n urnes identiques sans qu'aucune urnes ne soit vide ? Pour répondre à cette question, nous allons introduire une autre suite de nombres qui va en même temps nous permettre de répondre au problème suivant. Il s'agit du nombre de partition. Il faut faire ici attention de ne pas confondre cette notion de partition avec les partitions d'un ensemble. Dans cette section ce sont les partitions d'un entier qui nous intéresse.

Nous allons définir la solution à ce problème comme étant $p(k,n)$. On appelle ce nombre, le nombre de partition. Contrairement aux solutions des problèmes précédents, il n'est pas possible de trouver une formule explicite pour calculer la valeur de $p(k,n)$ (du moins, aucune formule réellement pratique). Nous pouvons cependant trouver une formule de récurrence, ainsi que la fonction génératrice.

Remarquez que la solution de notre problème 7 est en fait équivalente par le principe de la bijection à la question de savoir combien y a-t-il de façon d'écrire le nombre k comme une somme de n termes positifs et

non nul, si l'ordre des termes n'est pas importante. Ceci nous amène à faire une définition supplémentaire. Nous définirons donc $p(k)$ comme étant :

$$p(k) = \sum_{i=1}^{k} p(k,i)$$

La valeur de $p(k)$ représente le nombre de façon d'écrire un entier k comme une somme d'entiers positifs non nul, si l'ordre des termes n'est pas importante. C'est ce que nous appelons partitionner un entier.

Exemple 4.3.1. Combien y a-t-il de façon de décomposer le nombre 4 comme une somme d'entier positif $(n > 0)$? Pour cette exemple, nous allons procéder par simple énumération :

$$\begin{aligned} 1+1+1+1 &= 4 \\ 2+1+1 &= 4 \\ 2+2 &= 4 \\ 3+1 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

On remarque donc qu'il y a 5 possibilités. Ce nombre correspond à la valeur de $p(5)$.

Une formule de récurrence

Comme les boules sont toutes identiques, seuls le nombre d'élément contenu dans chaque urnes est important, de plus, comme toutes les urnes sont identiques, l'ordre dans laquelle on donne le nombre d'élément n'est pas important. Nous allons donc écrire une distribution de k boules dans n urnes sous la forme $(a_1, a_2, ..., a_n)$ avec les nombres écrit en ordre décroissant. Chacun des a_i est positif (> 0). Nous allons traiter deux cas. Premièrement, remarquons que si $a_n = 1$, alors $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ est une distribution de $k-1$ boules dans $n-1$ urnes, et toutes les distribution de $k-1$ boules dans $n-1$ urnes ont cette forme. Maintenant, si $a_n \neq 1$, alors on peut soustraire 1 à chacun des éléments, ce qui nous donne une distribution $\{a_1 - 1, a_2 - 1, ..., a_n - 1\}$ qui correspond à une distribution de $k-n$ boules dans n urnes. De plus, toutes les distributions de $k-n$ boules dans n urnes ont cette forme. On obtient donc la relation de récurrence suivante :

$$p(k,n) = p(k-1, n-1) + p(k-n, n)$$

Maintenant, pour pouvoir utiliser cette expression, il nous faut déterminer des valeurs initiales. Il est facile de voir que :

$$p(k,1) = 1 \qquad \text{et} \qquad p(k,k) = 1$$

À partir de ces valeurs et de notre récurrence, il nous est maintenant possible de calculer la valeur de $p(k,n)$ pour tout k et n entier positif.

La fonction génératrice de $p(k)$

Pour trouver la fonction génératrice de la fonction $p(k)$, il s'agit de remarquer que pour partitionner un nombre k, on peut d'abord choisir le nombre de 1 que l'on souhaite, puis le nombre de 2, puis de 3, etc.... Ceci nous amène donc à affirmer que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ...)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + ...)..... \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot ... \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \end{aligned}$$

qui est notre fonction génératrice recherché.

Problème 8 : Boules et urnes identiques, les urnes peuvent être vide

Il est maintenant facile de résoudre ce problème en se basant sur le problème précédent. Il s'agit de remarquer que si une (ou plusieurs) urne est vide, le problème revient donc à tout simplement enlever cette urne. il s'agit donc de faire la somme des nombres de partition. La solution est donc :

$$\sum_{i=1}^{n} p(k,i)$$

Notez que le cas particulier ou nous souhaitons placer k boules identiques dans k urnes identiques où les urnes peuvent être vide correspond à notre définition de la valeur de $p(k)$.

Deux exemples de somme

Nous allons maintenant conclure notre étude des nombres de partition en comparant deux problèmes en apparence très similaire, mais avec des solutions et niveau de difficulté très différent.

Exemple 4.3.2. Combien y a-t-il de solution à l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ si chaque x_i est un entier positif possiblement nul ? Pour résoudre le problème, nous allons considérer deux approche différente. Premièrement, nous allons prendre l'approche des fonctions génératrices. Chacun des facteurs peut prendre techniquement la valeur de n'importe quel entier. Nous allons donc représenter ceci par la série $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ...)$ où l'exposant représente la valeur du x_i. Comme nous devons choisir une valeur pour x_1, ou pour x_2 et une pour x_3, nous allons donc prendre cette série exposant 3. On a donc :

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...)^3 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle {3 \atop k} \right\rangle x^k$$

Pour obtenir une somme de 20, nous devons donc prendre le coefficient correspondant à x^k, ce qui nous donne $\left\langle {3 \atop 20} \right\rangle = \frac{(3+20-1)!}{20!(3-1)!} = \frac{22!}{20! \cdot 2!} = 231$. Maintenant une deuxième approche consiste à considérer une suite contenant 20 fois le nombre 1 :

$$11111111111111111111$$

Pour obtenir une somme de 3 termes, il faut faire 2 coupures dans notre suite de 1. Comme chacun des x_i peut être 0, il y a 21 endroits ou nous pouvons couper, et le problème se fait sans ordre, avec remise. On a donc :

$$\left\langle {21 \atop 2} \right\rangle = \frac{(21+2-1)!}{2!(21-1)!} = \frac{22!}{2! \cdot 20!} = 231$$

Qui est exactement la même solution que nous avions trouver avec les fonctions génératrices.

Exemple 4.3.3. Combien y a-t-il de somme de 3 termes positif qui donne 20 ? Cette fois il y a une différence importante. Comme il n'y a aucune mentionner des x_1, x_2 et x_3, nous pouvons supposer que l'ordre des termes n'est pas importante. En conséquence, nous devons utiliser les nombres de partitions. La solution est donné par $p(20,3)$ que nous pouvons calculer à l'aide de la récurrence :

$$\begin{aligned}
p(20,3) &= p(19,2) + p(17,3) \\
&= [p(18,1) + p(17,2)] + [p(16,2) + p(14,3)] = 1 + p(17,2) + p(16,2) + p(14,3) \\
&= 1 + [p(16,1) + p(15,2)] + [p(15,1) + p(14,2)] + [p(13,2) + p(11,3)] \\
&= 3 + p(15,2) + p(14,2) + p(13,2) + p(11,3) \\
&= 3 + [p(14,1) + p(13,2)] + [p(13,1) + p(12,2)] + [p(12,1) + p(11,2)] + [p(10,2) + p(8,3)] \\
&= 6 + p(13,2) + p(12,2) + p(11,2) + p(10,2) + p(8,3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 6 + [p(12,1) + p(11,2)] + [p(11,1) + p(10,2)] + [p(10,1) + p(9,2)] + [p(9,1) + p(8,2)] + [p(7,2) + p(5,3)] \\
&= 10 + p(11,2) + p(10,2) + p(9,2) + p(8,2) + p(7,2) + p(5,3) \\
&= 15 + p(9,2) + p(8,2) + p(7,2) + p(6,2) + p(5,2) + p(4,2) + p(2,3) \\
&= 22 + p(7,2) + p(6,2) + p(5,2) + p(4,2) + p(3,2) \\
&= 28 + p(5,2) + p(4,2) + p(3,2) \\
&= 32 + p(3,2) \\
&= 33
\end{aligned}
$$

4.4 Solutions des problèmes d'occupation

Nous allons maintenant résumer les solutions des 8 problèmes d'occupation sous forme d'un théorème.

Théorème 4.4.1. Les 8 façons de placer k boules dans n urnes que nous avons étudier dans les sections précédentes peuvent être résumé dans le tableau ci-dessous :

Nombre de façon de placer k boules dans n urnes

Boules différentes ?	Urnes différentes ?	Les urnes peuvent-elles être vide ?	Formule
Oui	Oui	Oui	n^k
Oui	Oui	Non	$n!\left\{ {k \atop n} \right\}$
Non	Oui	Oui	$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$
Non	Oui	Non	$\binom{k-1}{n-1}$
Oui	Non	Oui	$\sum_{i=1}^{n} \left\{ {k \atop i} \right\}$
Oui	Non	Non	$\left\{ {k \atop n} \right\}$
Non	Non	Oui	$\sum_{i=1}^{n} p(k,i)$
Non	Non	Non	$p(k,n)$

Avec la formule explicite suivante :

$$\left\{ {k \atop n} \right\} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k$$

Avec les relations de récurrences suivantes :

$$\left\{ {k \atop n} \right\} = \left\{ {k-1 \atop n-1} \right\} + n \left\{ {k-1 \atop n} \right\} \qquad p(k,n) = p(k-1,n-1) + p(k-n,n)$$

Et les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} = x^k \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$$

4.5 Nombres de Bell

Pour terminer ce chapitre, nous allons regarder un problème différent, mais relié au problème d'occupation par l'intermédiaire des nombres de Stirling de deuxième espèce. Il s'agit du problème suivant :

Combien y a-t-il de relation d'équivalence sur un ensemble de n éléments ?

Par le principe de la bijection, nous savons que ce problème est équivalent à la question de savoir le nombre de partition sur un ensemble de n éléments. La solution du problème est appelé nombre de Bell (du nom de Eric Temple Bell), que nous dénotons par B_n.

La formule explicite

Pour trouver le nombre de partition d'un ensemble de n éléments, nous pouvons compter le nombre de façon de placer les n éléments dans 1 groupe, puis dans 2 groupes, puis en 3 groupes, etc... En additionnant le tout, nous obtenons une formule pour B_n. Comme chacun des éléments est distinct, l'ordre des ensembles n'est pas important, mais aucun ensemble ne peut être vide, la solution de chacun des problème est donc donnée par les nombres de Stirling de deuxième espèce. On obtient donc la formule explicite suivante :

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

la formule de récurrence

Pour obtenir la formule de récurrence, remarquons premièrement qu'il n'existe qu'une seule relation d'équivalence sur un ensemble de 1 élément. On a donc $B_1 = 1$. Ensuite on utilise la méthode de l'élément distingué. Fixons un élément x de l'ensemble A de n éléments. Après avoir partitioné l'ensemble A, notre élément x doit se retrouver dans l'un des sous-ensembles. Ce sous-ensemble a un entre 1 et n (inclut) d'éléments, ce qui signifie que nous devons choisir k éléments de A avec k entre 0 et $n-1$ qui ne se trouverons pas dans le même sous-ensemble que x. Ceci peut être accompli de $\binom{n-1}{k}$ façons. Maintenant, il nous faut partitionner les k éléments que nous avons avons exclut du sous-ensemble contenant x, ce qui peut être fait de B_k façons. En additionner toute les possibilités, on a donc :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k \quad \Leftrightarrow \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Quelques problèmes de sous-ensembles

Exemple 4.5.1. Dans un ensemble de 8 éléments, de combien de façon peut-on choisir un sous-ensemble de 3 éléments ? Ceci est équivalent à demander de combien de façon peut-on choisir 3 objets parmi 8 sans ordre et sans remise, ce qui nous est donné par le coefficient binomial. On a donc :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

Exemple 4.5.2. De combien de façon peut-on partitionner un ensemble de 8 éléments en 3 sous-ensemble non-vide ? Le problème reviens à placer 8 boules distinctes dans 3 urnes identiques sans qu'aucune urne ne soit vide, ce qui nous est donné par les nombres de Stirling de deuxième espèce. On a donc :

$$\left\{ {8 \atop 3} \right\} = 966$$

Exemple 4.5.3. De combien de façon peut-on partitionner un ensemble de 8 éléments ? Cette fois, ce sont les nombres de Bell qui nous permettre de répondre à la question. On a donc :

$$B_8 = 4140$$

Exemple 4.5.4. De combien de façon peut-on partitionner le nombre 8 ? Ici il faut faire attention à ne pas confondre avec la question précédente. La réponse est $p(8) = 22$.

Un problème de multiplication

Si n est un entier positif s'écrivant sous la forme $n = p_1p_2p_3...p_k$, où les p_i sont des nombres premiers distincts. De combien de façon peut-on écrire n sous forme d'un produit d'entier positif si on ignore les facteurs 1, et on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs ? Par le théorème fondamental de l'arithmétique, nous savons que la décomposition en nombre premier est unique. Ceci nous permet donc d'affirmer que la solution revient à partitionner les nombres $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ en sous-ensemble, puis en considérant les facteurs comme étant le produit des éléments d'un sous-ensemble. La solution est donc le nombre de Bell B_k.

Le triangle de Bell

Il existe une façon simple et efficace de calculer les différentes valeurs des nombres de Bell B_n. L'idée est de construire et triangle semblable au triangle de Pascal. On commence par écrire 1 sur la première ligne, puis chaque ligne subséquente est obtenu en commençant par le dernier nombre de la ligne précédente et pour chaque nombre suivant on additionne le nombre précédent avec celui qui se trouve immédiatement au dessus du nombre précédent. Chaque ligne aura ainsi un nombre de plus que la ligne précédente. Une fois le triangle construit, on remarque que les nombres de Bell sont en fait le dernier nombre de chacune des lignes. La première ligne correspondant à B_1.

Triangle de Bell

1						
1	**2**					
2	3	**5**				
5	7	10	**15**			
15	20	27	37	**52**		
52	67	87	114	151	**203**	
203	255	322	409	523	674	**877**

En utilisant le triangle ci-dessus, on peut donc obtenir par exemple que $B_5 = 52$.

Chapitre 5

Compter les fonctions

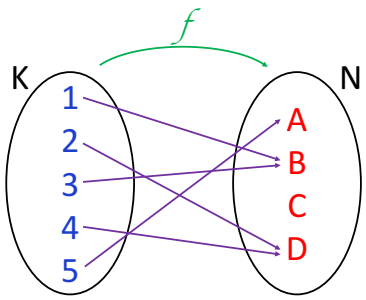
5.1 Compter les fonctions : The twelvefold way

Il est intéressant de remarquer que les problèmes d'occupation sont en apparence une simple généralisation du problème de choisir des objets que nous avons étudié au chapitre précédent. Par contre, ce n'est pas tout à fait le cas. En particulier, remarquez que seulement 2 des 4 formules que nous avons vu dans le problème de choisir des objets apparait directement dans les problèmes d'occupation. En effet, le coefficient binomial, ainsi que les factorielles tombantes n'apparaissent pas directement. Le coefficient binomial apparait, mais seulement sous la forme $\binom{n-1}{k-1}$.

Pour obtenir une véritable généralisation qui traitera tout les cas que nous avons vu dans ces deux problèmes, nous allons nous intéresser au problème de compter des fonctions. Cette idée de généralisation est introduite dans le livre de Stanley [12] qui lui donne le nom de «the twelvefold way». Le problème consiste à compter le nombre de fonctions entre des ensembles K et N. On peut s'intéresser à toutes les fonctions $f : K \to N$, seulement les fonctions injectives, ou seulement les fonctions surjectives. De plus, nous allons considérer que les éléments de K peuvent être soit identique ou différent, et de même pour les éléments de N. On obtient donc un total de 12 cas à traiter. Notez que nous ne somme pas vraiment intéressé à compter le nombre de fonctions bijectives, car le problème n'apporterait rien de plus que d'étudier les fonctions injective et les fonctions surjective dans le cas où le nombre d'élément est le même dans les deux ensembles.

Cas 1 : Éléments de K et N distinguables, aucune contrainte sur f

Comme les éléments sont distinguable, chaque élément de K possède n choix de lien vers les éléments de N. Comme nous avons k éléments dans K, par le principe du produit nous obtenons n^k fonctions.



Exemple 5.1.1. Si K et N sont des ensembles contenant des éléments distingables avec $|K| = 5$ et $|N| = 4$, alors il y a un total de $4^5 = 1024$ fonctions possibles. Un exemple d'une telle fonction est illustré ci-contre.

Cas 2 : Éléments de K indistingable, élément de N distingable, aucune contrainte sur f

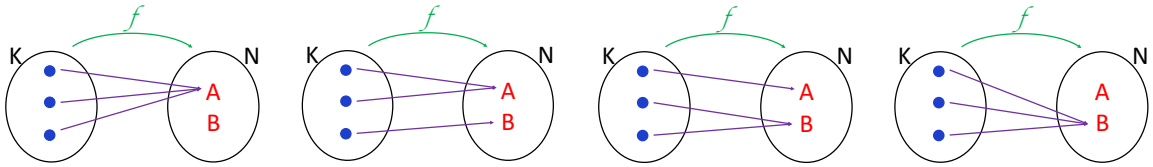
Ce problème est en fait équivalent au problème de placer k boules identiques dans n urnes différentes où les urnes peuvent possiblement être vide. Par le chapitre précédent, nous savons que la solution est $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$.

Exemple 5.1.2. Si K est un ensemble contenant 3 éléments indistingables et N est un ensemble contenant 2 éléments distingables, déterminer le nombre de fonctions $f : K \to N$. Par la formule que nous venons de développer, la solution est donné par :

$$\left\langle {2 \atop 3} \right\rangle = \frac{(2+3-1)!}{3! \cdot 1!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

Pour aller un peu plus loin, nous allons maintenant chercher à énumérer toutes les possibilités. Remarquons que comme les éléments de K sont indistingables, seul le nombre de flèche allant vers A et vers B est important. On a donc les 4 possibilités suivantes :

Liste des fonctions de K vers N



Cas 3 : Éléments de K distingable, élément de N indistingable, aucune contrainte sur f

Ce problème est équivalent à la question de placer k boules différentes dans n urnes identique. Comme il n'y a aucune contrainte sur f, on suppose que les urnes peuvent être vide. Par le chapitre précédent, nous avons donc $\sum_{i=1}^{n} \left\{ {k \atop i} \right\}$ fonctions.

Cas 4 : Éléments de K et N indistinguables, aucune contrainte sur f

Ce problème revient à placer k boules identiques dans n urnes identiques avec les urnes possiblement vide. Par le chapitre précédent nous savons que la solution est $\sum_{i=1}^{n} p(k,i)$.

Cas 5 : Éléments de K et N distinguables, f injective

Il s'agit du premier problème de fonctions que nous rencontrons qui ne fait pas partie des problèmes d'occupation. Comme les éléments de K et de N sont distingables, il y a n options pour le premier élément de K, $(n-1)$ possibilités pour le second élément, $(n-2)$ possibilités pour le troisième élément, etc.... Comme il y a k éléments dans l'ensemble K, par le principe du produit nous obtenons donc :

$$n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-(k+1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$$

Remarquez que cette solution correspondant au problème de choisir k objets parmi n avec ordre et sans remise. Pour mieux comprendre le lien entre ces deux problèmes, il suffit de regarder le problème sur une perspective différente. Comme la fonction f est par hypothèse injective, nous savons que les éléments de N sont relié à 0 ou 1 élément de l'ensemble K. De plus, nous savons que la cardinalité de N est plus grande ou égale à la cardinalité de K. On choisit premièrement quel élément de N sont reliés à des éléments de K. Pour ce faire, on choisit k éléments parmis n avec ordre et sans remise. Comme les éléments ont été choisit avec ordre, on peut donc associé le premier élément choisit au premier élément de K, le second élément choisit au second élément de K, etc... On remarque donc qu'il s'agit bien du même problème que nous avons étudié au chapitre 3.

Cas 6 : Éléments de K indistingable, élément de N distingable, f injective

Nous allons approcher ce problème de la même manière que nous avons traiter le cas 5. Comme les éléments de N sont distingables, nous pouvons choisir k éléments parmis les n qui se trouve dans l'ensemble N pour les associer à un élément de K. Le choix de ces éléments ce fait sans remise car la fonction doit être injective. Par contre, cette fois nous traitons le problème sans ordre, car les éléments de K sont identiques. On obtient donc $\binom{n}{k}$ fonctions qui satisfont nos conditions, ce qui reviens à choisir k objets parmi n sans ordre et sans remise.

Cas 7 : Éléments de K distingable, élément de N indistingable, f injective

Premièrement, remarquons que pour qu'une fonction injective existe, nous devons avoir au moins autant d'élément dans N que dans K. Si on suppose que c'est bien le cas, comme la fonction est injective par hypothèse, nous savons qu'exactement k éléments de N sont connecter par notre fonction à exactement un éléments de K, et exactement $n-k$ éléments de N ne sont pas connecter. Comme les éléments de N sont tous identiques par hypothèse, il n'est pas possible de distinguer deux fonctions qui sont injectives. Il n'y a donc qu'une seule possibilité. La solution du problème est donc :

$$\begin{cases} 1 \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$$

Cas 8 : Éléments de K et N indistinguables, f injective

Ce cas est absolument identique au cas précédent et vous est laissé en exercice.

Cas 9 : Éléments de K et N distinguables, f surjective

Comme les éléments de K et de N sont distingables, le problème revient à placer k boules différentes dans n urnes différentes. La condition de surjectivité pour sa part est équivalente à la condition que les urnes ne peuvent pas être vide. En se basant sur les problèmes du chapitre précédent, on obtient donc qu'il y a $n!\left\{ {k \atop n} \right\}$ fonctions.

Cas 10 : Éléments de K indistingable, élément de N distingable, f surjective

Cette fois, le problème est équivalent à placer k boules identiques dans n urnes différentes sans qu'aucune urne ne soient vide. On a donc $\binom{k-1}{n-1}$ possibilités.

Cas 11 : Éléments de K distingable, élément de N indistingable, f surjective

Le problème est équivalent à placer k boules différentes dans n urnes identiques sans qu'aucune urne ne soient vide. La solution est donc donné par les nombres de Stirling de deuxième espèce. On a donc $\left\{ {k \atop n} \right\}$ possibilités.

Cas 12 : Éléments de K et N indistinguables, f surjective

Pour le dernier cas, on remarque que le problème est équivalent à placer k boules identiques dans n urnes identiques sans qu'aucune urnes ne soient vide, ce qui est la définition du nombre de partition d'un entier. La solution est donc $p(k,n)$.

Résumer des 12 problèmes de fonctions

Pour conclure cette section, nous allons résumer les 12 problèmes sous forme d'un théorème.

Théorème 5.1.1. Si K et N sont des ensembles contenant des éléments qui peuvent être distingable ou indistingable, alors le nombre de fonctions, de fonctions injectives et de fonctions surjectives est donné par le tableau ci-dessous.

Compter des fonctions $f : K \to N$

Élément de K	Élément de N	Aucune contrainte sur f	f est injective	f est surjective
Distingable	Distingable	n^k	$n^{\underline{k}}$	$n!\left\{ {k \atop n} \right\}$
Indistingable	Distingable	$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{n-1}$
Distingable	Indistingable	$\sum_{i=1}^{n} \left\{ {k \atop i} \right\}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$	$\left\{ {k \atop n} \right\}$
Indistingable	Indistingable	$\sum_{i=1}^{n} p(k,i)$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$	$p(k,n)$

5.2 Le problème de la NHL

Les séries éliminatoires de la ligue nationale de hockey (NHL) sont dites 4 de 7. C'est à dire que deux équipes s'affronte jusqu'à ce qu'une équipe remporte 4 parties. Pour qu'une équipe obtienne 4 victoires, et donc gagne la série, il est facile de voir qu'un minimum de 4 parties, et un maximum de 7 parties est nécessaire. Combien y a-t-il de configuration possible pour une telle série éliminatoire ?

Méthode 1 : Premièrement, remarquons que le problème est complètement symétrique. Il y a le même nombre de configuration qui accorde la victoire à une équipe A que de configuration qui accorde la victoire à une équipe B. Nous allons donc seulement traiter le premier cas, et multiplier notre solution par 2. Remarquons ensuite que 4 cas sont possible : Victoire en 4 parties, en 5 parties, en 6 parties ou en 7 parties.

- Victoire en 4 parties : Ici une seule configuration est possible, 4 victoires consécutives.
- Victoire en 5 parties : Pour que cela soit le cas, on doit avoir une défaite parmi les 4 premières parties, et le reste des victoires. Il suffit donc de choisir une partie parmi 4 pour une défaite, ce qui nous donne 4 possibilités.
- Victoire en 6 parties : Pour que cela soit possible, comme la dernière partie est une victoire, il faut choisir 2 parties parmi 5 pour une défaite, ce qui doit être fait sans ordre et sans remise. On a donc $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ possibilités.
- Victoire en 7 parties : Cette fois, il faut choisir 3 parties parmi 6, ce qui peut être accompli de $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ façons.

En additionnant le nombre de possibilités pour chacun des cas, nous obtenons donc $1 + 4 + 10 + 20 = 35$ façon que l'équipe A peut remporter la série. Par symétrie, ceci nous donne donc un total de 70 configurations pour une série 4 de 7.

Méthode 2 : La difficulté de la première méthode réside dans le fait que 4 cas doivent être traité indépendamment. Il existe cependant une façon simple de résoudre le même problème en un seul cas. Les 4 cas viennent du fait qu'il n'est pas possible de savoir exactement le nombre de partie qui sera joué. Pour

contourner le problème, il suffit d'attribuer une valeur aux parties qui ne sont pas joué. En procédant comme dans la méthode précédente en remarquant que le problème est complètement symétrique, nous allons traiter uniquement le cas où l'équipe A gagne, et multiplier notre solution par 2. Nous savons que dans ce cas, l'équipe A doit obtenir exactement 4 victoires, pour les autres parties qui sont joué, nous savons qu'elles doivent être des défaites, mais le nombre de défaite varie dépendant du nombre de partie jouer. En supposant que les parties qui ne sont pas joué sont des défaites, on obtient donc que chacune des configurations possibles contiennent exactement 4 victoires et 3 défaites. Le problème revient donc à ordonner 4 V et 3 D, ce qui peut être accompli de $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ façons. En multipliant le tout par 2, on obtient donc que le nombres de configuration total possible est :

$$2\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 70$$

Conclusion : Remarquez que les deux méthodes que nous avons illustré ci-dessus peuvent être généralisé à n'importe quel format de série éliminatoire de la forme $k, 2k-1$. Nous avons donc obtenu une égalité intéressante :

$$\sum_{i=k}^{2k-1} \binom{i-1}{i-k} = \binom{2k-1}{k}$$

5.3 Le problème des chapeaux

Le problème des chapeaux (Hatcheck problem) est un problème classique de la combinatoire. Il s'énonce comme suit :

> **Si n personnes déposent leur chapeau à la consigne au début d'une soirée, et qu'à la fin la dame travaillant à la consigne ayant un peu trop fêté leur remet leur chapeau de manière aléatoire, qu'elle est la probabilité qu'aucune des n personnes ne reçoivent son propre chapeau ?**

Le problème est une application du principe d'inclusion-d'exclusion. On commence par remarquer qu'il y a $n!$ façon de remettre les chapeaux aux hommes. De plus, si i est un entier entre 0 et n, alors il y a :

$$\binom{n}{i}(n-i)! = \frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)! = \frac{n!}{i!}$$

façon de remettre les chapeaux de sorte qu'au moins i personnes reçoivent leur propre chapeau. Par le principe d'inclusion-d'exclusion, on a donc :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i n!}{i!}$$

façon de distribuer les chapeaux de sorte qu'aucun des hommes reçoivent leur propre chapeau. Maintenant, pour obtenir une probabilité, il suffit de diviser par $n!$, ce qui nous donne :

$$\text{Probabilité} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Voici la solution du problème des chapeaux pour quelques valeurs de n.

Solution du problème des chapeaux

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilité	0,00000	0,50000	0,33333	0,37500	0,36667	0,36806	0,36786	0,36788	0,36788

En regardant attentivement les valeurs que nous avons obtenu, il est facile de remarquer que la probabilité converge très rapidement vers une valeur proche de $36,8\%$. Nous allons donc chercher à trouver exactement quelle est cette valeur.

Série de Taylor de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle, comme plusieurs autres fonctions, peuvent s'écrire sous la forme d'une série de puissance. C'est à dire, elle peut s'écrire sous la forme $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$. Pour trouver la valeur des différents a_n, il suffit de calculer $f^{(n)}(x)$, puis d'évaluer la fonction pour $x = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... && f(0) = a_0 \\
f'(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ... && f'(0) = a_1 \\
f''(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2) x^n = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + ... && f''(0) = 2a_2 \\
f'''(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+3}(n+1)(n+2)(n+3) x^n = 3!a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + ... && f'''(0) = 3!a_3
\end{aligned}$$

en continuant de la même façon, on remarque que $f^{(n)}(0) = n!a_n$. Maintenant, en supposons que $f(x) = e^x$, nous avons $f^{(n)}(x) = e^x$, ce qui nous donne $f^{(n)}(0) = 1$. Ceci nous permet donc de déterminer que $a_n = \dfrac{1}{n!}$. On a donc :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En comparant la série de Taylor de l'exponentielle et la probabilité qu'aucun des hommes reçoivent son propre chapeau, on remarque donc que :

$$\text{Probabilité} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{n!} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.36788$$

Ce qui est exactement la valeur que nous avions observé dans notre tableau. La solution du problème des chapeaux est donc approximativement $36,8\%$

Les dérangements

Le problème des chapeaux est en fait un cas particulier de ce l'on appelle un dérangement. De combien de façon peut-on ré-ordonner un ensemble de n éléments distincts de sorte qu'aucun élément ne se retrouve à sa position originale. On dénote la solution du problème par D_n ou $n¡$. Basé sur notre solution du problème des chapeaux, le nombre de dérangement est donné par :

$$D_n = n¡ = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i n!}{i!}$$

Basé sur cette formule, il est maintenant facile de déterminer les valeurs de D_n pour de petit n. On a donc le tableau ci-dessous.

Nombres de dérangement

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n	0	1	2	9	44	265	1 854	14 833	133 496	1 334 961

5.4 Le problème des rencontres

Il existe de nombreuses version du problème des rencontres. Dans certain cas, il s'agit d'une simple réécriture du problème des chapeaux, mais celui qui nous intéresse ici en est en fait une généralisation. Il s'énonce comme suit :

Lors d'une soirée échangiste, n couples sont invités. En arrivant, chaque homme dépose sa montre dans un bol. Lorsque tous les couples sont présents, chaque femme pige une montre qui déterminera avec quel homme elle passera la soirée. De combien de façons différentes exactement k des n femmes peuvent se voir assigner l'homme avec lequel elles sont arrivées ?

La solution du problème est en fait très similaire au problème des chapeaux que nous avons rencontré dans la section précédente. On choisit d'abord les k couples qui resteront inchangé, puis on effectue un dérangement des $n-k$ couples restant. En dénotant la solution du problème par $D_{n,k}$, on obtient donc la solution suivante :

$$D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k} = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i (n-k)!}{i!} = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i n!}{i!\ k!}$$

En particulier, on remarque que $D_{n,0} = D_n$.

Dans le cas particulier où 5 couples sont présent, le nombre de façon qu'exactement 2 couples restent inchangé est donc :

$$D_{5,2} = \sum_{i=0}^{3} \frac{(-1)^i 5!}{i!\ 2!} = \frac{5!}{0!\ 2!} - \frac{5!}{1!\ 2!} + \frac{5!}{2!\ 2!} - \frac{5!}{3!\ 2!} = 60 - 60 + 30 - 10 = 20$$

Ce qui peut aussi être obtenu plus facilement dans le cas où nous connaissons déjà la valeur de D_3 par la formule suivante :

$$D_{5,2} = \binom{5}{2} D_3 = 10 \cdot 2 = 20$$

Chapitre 6

De l'ordre dans les urnes

6.1 Une dernière généralisation

Dans ce chapitre, nous allons compléter notre étude des distributions à l'aide d'une dernière généralisation. Après avoir étudié le nombre de façons de choisir des objets, le nombres de façons de placer des objets dans des urnes, puis d'avoir compter le nombre de fonction satisfait certaines propriétés, nous revenons au problème des urnes avec quelques conditions supplémentaires.

> **De combien de façons peut-on placer k boules dans n urnes ?**

Cette fois, les différentes questions qui nous intéressent sont les suivantes :

1. Les boules peuvent être identiques ou différentes.
2. Les urnes peuvent être identiques ou différentes.
3. Les urnes peuvent contenir soit au plus une boules, au moins une boules, exactement une boules, ou n'avoir aucune contrainte sur le nombre de boules quelle contiennent.
4. L'ordre des éléments dans chaque urnes peut être soit important, ou ne pas être important.

Globalement, on a l'impression qu'il y a un total des 32 cas, mais ce n'est pas exactement le cas. En effet, la dernière question concernant l'ordre des éléments dans les urnes ne peut pas toujours s'appliquer. Si les boules sont identiques, l'ordre ne peut certainement pas être importante. De plus, pour que l'ordre soit importante, il doit pouvoir y avoir plus d'une boules par urnes. En analysant les différents cas, on remarque donc que ceci donne lieu à 20 cas différent.

Parmi ces 20 cas, on remarque facilement que les 12 problèmes concernant les fonctions que nous avons traité dans le chapitre précédent ce traduise directement dans des problèmes d'urnes. Il vous est laissé en exercice de déterminer exactement de quel cas il s'agit.

Les 8 problèmes qui sont techniquement nouveau sont ceux qui concernent la condition que les urnes doivent contenir exactement une boule (4 cas), et les cas où l'ordre dans les urnes est importante (4 cas).

6.2 Les urnes contiennent exactement un objet

Le cas ou chaque urne doit contenir exactement un objet correspond au cas des fonctions bijectives que nous avons ignoré dans le chapitre précédent. Pour qu'une fonction soit bijective, les deux ensembles doivent obligatoirement avoir le même nombre d'élément, ce qui est équivalent à affirmer dans notre cas qu'il doit y avoir autant de boule que d'urne

De plus, nous savons que si des ensembles K et N ont le même nombre d'élément, alors une fonction est injective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est bijective. Donc dans notre cas présent, si $k \neq n$, alors il est impossible de placer les k boules dans n urnes de sorte que chaque urne contiennent exactement une boule. Dans le cas où $k = n$, il suffit d'utiliser la formule correspondant au fonction injective ou au fonction surjective dépendant de laquelle est la plus simple (les deux nous donnerons la même valeur).

Ceci nous permet donc d'obtenir les formules pour les 4 cas ci-dessous :

Combien de façon de distribuer k objets parmis n urnes si les urnes doivent contenir exactement un objet

k **objets** **Condition sur la réception**	n **urnes distinctes**	n **urnes identiques**
Distinct Exactement un objet	$k!$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$
Identique Exactement un objet	$\begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

On remarque facilement que seul le cas où les objets et les urnes sont distinctes est vraiment intéressant. Les autres cas sont essentiellement trivial.

6.3 L'ordre dans les urnes est importante

k objets distincts dans n urnes distinctes

Le premier cas consiste à déterminer le nombre de façons de placer k objets distincts dans n urnes distinctes s'il n'y a aucune contrainte sur le nombre d'éléments que doit posséder chaque urne, mais que l'ordre des éléments dans chaque urne est importante. L'idée consiste premièrement à ordonner les objets, ce qui peut être accompli de $k!$ façons.

Une fois que les objets sont ordonnés, nous allons chercher à déterminer lesquels se retrouve dans quel urnes. Pour ce faire, imaginons les objets comme la liste suivante :

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad ... \quad k$$

Pour déterminer lesquels sont dans quel urnes, il s'agit de faire des coupures dans notre liste. Comme les urnes peuvent possiblement être vide, nous avons $k+1$ endroit ou nous pouvons couper et le processus ce fait avec remise. Maintenant, pour déterminer les n urnes, on remarque que nous devons faire $n-1$ coupures. L'ordre des coupures n'est cependant pas importante. Le nombre de façons de placer nos objets dans les urnes est donc :

$$k! \left\langle {k+1 \atop n-1} \right\rangle = k! \frac{(k+1+n-1-1)!}{(n-1)!\ k!} = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!} = (k+n-1)^{\underline{k}} = (k+n-1)(k+n-2)...(n+1)(n) = n^{\overline{k}}$$

Remarquez qu'il s'agit de la première fois que nous obtenons directement les factorielles montantes comme solution d'un problème de combinatoire. Nous leur avons donc trouvé une interprétation combinatoire. La factorielle montante $n^{\overline{k}}$ représente le nombre de façons de placer k objets distincts dans n urnes distinctes si l'ordre des éléments dans chaque urne est importante.

k objets distincts dans n urnes distinctes si les urnes ne peuvent pas être vide

Dans ce cas, l'idée est très similaire à ce que nous avons fait pour le cas précédent. Il s'agit premièrement d'ordonner les k objets, ce qui peut être fait de $k!$ façons, puis de faire des coupures pour déterminer quel objet ira dans quelle urne. Remarquer que nous avons toujours $n-1$ coupures à faire sans ordre, mais que cette fois nous n'avons que $k-1$ endroit où les faire, car les urnes ne peuvent pas être vide. Pour la même raison, le tout doit se faire sans remise. Le nombre de façons de placer nos objets dans les urnes est donc :

$$k! \binom{k-1}{n-1}$$

Les nombres de Lah

Le problème suivant consiste à déterminer le nombre de façon de placer k objets différents dans n urnes identiques si l'ordre des éléments dans les urnes est importante, et les urnes ne peuvent pas être vide. La solution est relativement simple en se basant sur le problème précédent, mais leur importance en combinatoire leur a value un nom. Il s'agit des nombres de Lah que l'on dénote par $\left\lfloor {k \atop n} \right\rfloor$. Ils ont été nommé en l'honneur du mathématicien slovène Ivo Lah qui les as découvert en 1955 dans un contexte différent.

Pour trouver une formule explicite pour les nombres de Lah, l'idée est relativement simple. Il suffit de résoudre premièrement le problème de placer k objets différents dans n urnes différentes de sorte que toute les urnes contiennent au moins un objet et que l'ordre des éléments dans chaque urne soit importante, ce qui nous savons déjà faire. Rappelons qu'il y a dans ce cas $k!\binom{k-1}{n-1}$ façons de placer nos objets. Puis ensuite, nous devons retirer l'ordre sur les urnes, car ces dernières sont maintenant supposé indistingable. Le nombre total de possibilité est donc :

$$\left\lfloor {k \atop n} \right\rfloor = \frac{k!}{n!}\binom{k-1}{n-1}$$

Remarquez que le problème original qui a mené à la découverte des nombres de Lah est en fait très différent de la manière dont nous les avons introduit plus haut. La question originale concernait la possibilité d'écrire les factorielles montantes en terme de factorielle tombante, ce que nous aurons l'occasion d'étudier avant la fin du chapitre.

Le dernier cas

Finalement, il ne nous reste plus qu'un cas à traiter pour avoir résolu les 20 problèmes de distribution. Il s'agit de savons de combien de façons peut-on placer k objets distincts dans n urnes identiques si l'ordre des objets dans les urnes est importante. Remarquez que cette fois il n'est pas possible de résoudre le problème en supposant les urnes distinctes puis en enlevant l'ordre dû au fait que les urnes peuvent possiblement être vide. Deux urnes qui sont vide reste totalement indistingable même après avoir placer les objets, alors que deux urnes contenant des objets pourront elles être distingué par les objets qu'elles contiennent.

L'idée reste cependant relativement simple et est basé sur les nombres de Lah. Si après avoir placé les objets un certain nombre d'urne sont vide, cela revient à supposer qu'elles n'étaient tout simplement pas là des le départ. La solution revient donc à faire la somme des nombres de Lah. Notre solution est donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor {k \atop i} \right\rfloor$$

De nouvelles lignes dans notre tableau

Les 4 problèmes que nous venons de traiter nous permettre donc d'ajouter 4 nouveaux cas dans notre étude des distributions. Ces 4 cas correspondent aux 4 façons de placer les objets de sorte que l'ordre dans les urnes soit importante. On a donc :

Combien de façon de distribuer k objets parmis n urnes si l'ordre des éléments dans les urnes est importante

k objets **Condition sur la réception**	**n urnes distinctes**	**n urnes identiques**
Distinct Aucune condition L'ordre est importante	$k!\left\langle {k+1 \atop n-1} \right\rangle = n^{\overline{k}}$	$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor {k \atop i} \right\rfloor$
Distinct L'ordre est importante Au moins un objet	$k!\binom{k-1}{n-1}$	$\left\lfloor {k \atop n} \right\rfloor = \binom{k-1}{n-1}\frac{k!}{n!}$

Une formule de récurrence pour les nombres de Lah

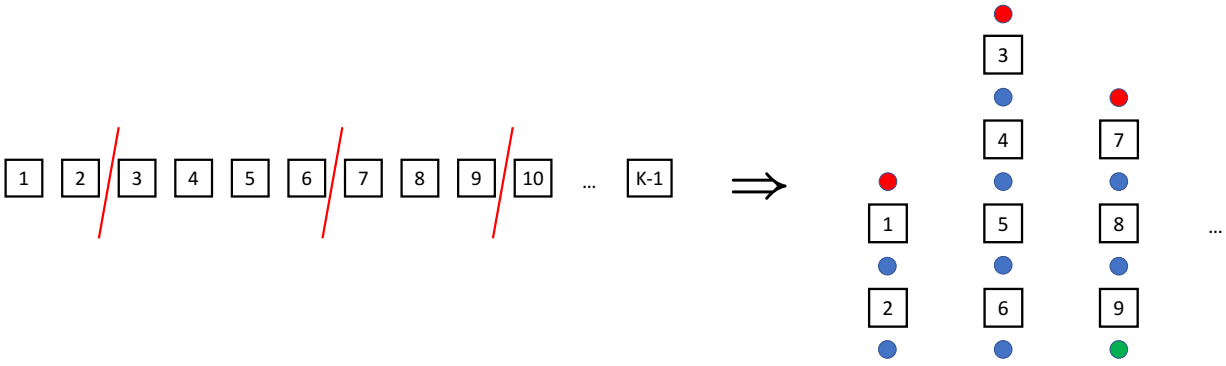
Pour trouver une relation de récurrence pour les nombres de Lah, l'idée est semblable à ce que nous avons fait pour les nombres de Stirling de deuxième espèce. On utilise la méthode de l'élément distingué en fixant premièrement un élément x parmi les k objets.

On peut placer les $k-1$ objets restant dans $n-1$ urnes, ce qui signifie que l'élément x doit se trouver seul dans une urne (la seule urne qui est vide), car les urnes ne peuvent pas être vide par hypothèse. Ceci peut être accompli de $\left[\begin{matrix} k-1 \\ n-1 \end{matrix}\right]$ façons. Autrement, on peut placer les $k-1$ objets restant dans les n urnes, ce qui peut être fait de $\left[\begin{matrix} k-1 \\ n \end{matrix}\right]$ façons, et dans ce cas nous avons $k+n-1$ endroit où nous pouvons placer notre élément x, ce qui nous donne la récurrence suivante :

$$\left[\begin{matrix} k \\ n \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} k-1 \\ n-1 \end{matrix}\right] + (k+n-1)\left[\begin{matrix} k-1 \\ n \end{matrix}\right]$$

Le facteur $k+n-1$ mérite d'être justifier. L'idée pour placer les $k-1$ objets dans n urnes est de commencer par ordonnés les objets, puis de faire $n-1$ coupure, ce qui permet de déterminer quel objet ira dans chacune des n urnes. Lorsque vient le temps de placer notre élément x, on doit déterminer les nombre d'espace où nous pouvons l'insérer. Chacune des $k-2$ espaces (en bleu) entre les $k-1$ éléments est un emplacement possible. À ceci, il faut ajouter une possibilité pour chacune des n urnes (en rouge) signifiant qu'on peut insérer notre élément au dessus d'une pile. Finalement, il faut ajouter une dernière possibilité (en vert) à la fin de la dernière urne. En additionnant le tout, on obtient donc :

$$(k-2) + (n) + (1) = k+n-1$$



À notre récurrence, il faut bien entendu ajouter des valeurs initiales suivante :

$$\left[\begin{matrix} k \\ 1 \end{matrix}\right] = k!, \qquad \left[\begin{matrix} k \\ k \end{matrix}\right] = 1 \qquad \text{et} \qquad \left[\begin{matrix} k \\ n \end{matrix}\right] = 0 \text{ si } n > k$$

Ces valeurs sont justifié car si nous plaçons k objets dans une seule urne, il n'y a $k!$ façons de les ordonnés. Ensuite, si nous voulons placer k objets dans k urnes, alors chaque urne doit contenir qu'un seul élément, et comme les urnes sont identiques, il n'y a qu'une seule façon de le faire. Finalement, si nous avons plus d'urnes que d'objets, alors par le principe des nids de pigeons, il est impossible de placer tout les objets dans les urnes de sorte qu'aucune urne ne soit vide, ce qui justifie la valeur de 0.

6.4 Résumer des 20 problèmes de distribution

Nous allons maintenant résumer nos 20 façons de placer des objets dans des urnes sous forme d'un théorème. Ce théorème s'est vu donner le nom de «The twentyfold way» par Kenneth Bogart [2] par analogie au «twelvefold way» de Stanley.

Théorème 6.4.1. Le nombre de façons de placer k objets dans n urnes dépendant des différents cas possible est donné par le tableau ci-dessous.

Combien de façon de distribuer k objets parmis n urnes

k objets **Condition sur la réception**	**n urnes distinctes**	**n urnes identiques**
Distinct Aucune condition L'ordre n'est pas importante	n^k	$\sum_{i=1}^{n} \left\{ {k \atop i} \right\}$
Distinct Au plus un objet	$n^{\underline{k}}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$
Distinct Au moins un objet L'ordre n'est pas importante	$n! \left\{ {k \atop n} \right\}$	$\left\{ {k \atop n} \right\}$
Distinct Exactement un objet	$k!$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$
Distinct Aucune condition L'ordre est importante	$k! \left\langle {k+1 \atop n-1} \right\rangle = n^{\overline{k}}$	$\sum_{i=1}^{n} \left[{k \atop i} \right]$
Distinct L'ordre est importante Au moins un objet	$k! \binom{k-1}{n-1}$	$\left[{k \atop n} \right] = \binom{k-1}{n-1} \frac{k!}{n!}$
Identique Aucune condition	$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$	$\sum_{i=1}^{n} p(k,i)$
Identique Au plus un objet	$\left({n \atop k} \right)$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$
Identique Au moins un objet	$\left({k-1 \atop n-1} \right)$	$p(k,n)$
Identique Exactement un objet	$\begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

6.5 Nombres de Stirling de première espèce

Avant de définir et d'étudier les nombres de Stirling de première espèce, commençons par regarder quelques exemples relativement simple que nous avons déjà considéré au chapitre 1.

Exemple 6.5.1. De combien de façons peut-on placer n personnes sous forme d'un rang ? Par le principe du produit, nous savons que ceci peut-être accompli de $n!$ façons.

Exemple 6.5.2. De combien de façons peut-on assoir n personnes autour d'une table ronde ? Par le principe du produit, nous savons qu'il y a $n!$ façons d'assoir les n personnes. Cependant, en considérant que chacune des n rotations de la table nous donne une configuration équivalente, par le principe d'équivalence, le nombre de possibilité est :

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exemple 6.5.3. De combien de façons peut-on assoir un groupe de 20 personnes autour de 2 tables rondes si chacune des deux tables doit contenir exactement 10 personnes ? Dans ce cas, on commence par choisir

les 10 personnes qui seront sur la première table, ce qui peut être fait de $\binom{20}{10}$ façons, puis on les places à chacune des 2 tables, ce qui peut être fait de 9! façons (pour chacune des tables), et finalement comme les deux tables sont identiques, on doit diviser le tout par 2!. On a donc :

$$\binom{20}{10}\frac{(9!)^2}{2!} = \frac{20!\cdot 9!\cdot 9!}{10!\cdot 10!\cdot 2!} = \frac{20!}{200}$$

façons d'assoir les 20 personnes.

L'exemple précédent peut facilement se généraliser à k personnes que l'on souhaite assoir autour de n tables rondes de sorte que chaque table contiennent le même nombre de personnes. Les nombres de Stirling de première espèce est en quelques sortes une généralisation supplémentaire de l'exemple précédent. On peut énoncer le problème comme suit :

> **De combien de façons peut-on placer k personnes autours de n tables rondes identiques sans qu'aucune table ne soit laisser vide ?**

La difficulté vient du fait que le nombre de personnes autour de chaque table n'est pas fixe. La seule contrainte est qu'aucune table ne peut être laissé vide. Nous allons donc définir la solution du problème comme étant le nombre de Stirling de première espèce $\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}$. Une formule explicite pour ces nombre est hors de ne porté (votre professeur n'en connait d'ailleurs aucune), mais il est tout de même relativement simple de les définir à partir d'une relation de récurrence.

$$\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k-1 \\ n-1 \end{bmatrix} + (k-1)\begin{bmatrix} k-1 \\ n \end{bmatrix} \qquad \text{si } 1 < n < k$$

À cette relation, nous devons ajouter les conditions initiales suivantes :

$$\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = (k-1)! \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} = 1$$

Remarquez que notre première valeur initiale n'est en fait rien d'autre que la solution au premier exemple de cette section.

6.6 Quelques identités sur les nombres de Stirling et de Lah

Dans cette section, nous voulons étudier une formulation alternative des nombres de Stirling de première et deuxième espèce, ainsi que les nombres de Lah. Cette formulation alternative nous est donnée sous la forme d'un ensemble de 7 identités qui ont des interprétations intéressantes en combinatoire. L'idée est la suivante. Nous savons déjà que les coefficients $x^n, x^{\underline{n}}$ et $x^{\overline{n}}$ jouent un rôle important en combinatoire. La question est maintenant de savoir s'il est possible d'écrire l'un d'entre eux, à partir d'un autre.

Théorème 6.6.1. Les principales relations entre les nombres de Stirling, les nombres de Lah, les factorielles montantes et les factorielles tombantes peuvent être résumer dans les 7 équations suivantes :

1. $x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}$
2. $x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$
3. $x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{\underline{k}}$
4. $x^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \left\{ n \atop k \right\} x^{\overline{k}}$
5. $x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$
6. $x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{\overline{k}}$
7. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \left\{ j \atop k \right\}$

Démonstration.

1. Nous avons déjà démontré cette égalité à l'aide de l'induction, mais nous présentons ici une démonstration différente basé sur un argument combinatorielle. La démonstration consiste à compter de deux manières différentes la même chose (double counting). Premièrement, rappelons que x^n représente le nombre de façon de placer n objets différents dans x urnes différentes sans aucune autre contrainte. Comme les urnes peuvent potentiellement être vide, alternativement, nous pouvons compter le nombre de façon de placer tous les objets dans une urne, dans deux urnes, etc jusqu'à x urnes (sans qu'aucune de ces urnes soient vide), puis on additionne le tout. Pour placer les n objets dans exactement k urnes, on peut commencer par placer les n objets distincts en k groupes identiques sans qu'aucune urnes ne soit vide, ce qui se fait de $\left\{ n \atop k \right\}$, puis ensuite placer chacun des k groupes dans une des x urnes avec ordre (car les urnes sont différentes) et sans remise (car nous ne voulons pas mettre plus qu'un groupe dans une urne). Ceci peut être accompli de $x^{\underline{k}}$ façon. En additionnant le tout pour les différentes valeurs possible de k, on obtient donc :
$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}$$

2. Nous allons faire cette démonstration par induction. Il est facile de vérifier que l'égalité est vrai pour $n = 1$, dans ce cas nous avons $x = x$. Supposons que l'égalité est vrai pour n, et nous allons montrer qu'elle est encore vrai pour $n+1$. On a donc :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \left[n+1 \atop k \right] x^k &= \left[n+1 \atop 1 \right] x + \sum_{k=2}^{n} \left(\left[n \atop k-1 \right] + n \left[n \atop k \right] \right) x^k + \left[n+1 \atop n+1 \right] x^{n+1} \\
&= n!x + \sum_{k=2}^{n} \left[n \atop k-1 \right] x^k + n \sum_{k=2}^{n} \left[n \atop k \right] x^k + x^{n+1} \\
&= n!x + \sum_{k=1}^{n} \left[n \atop k \right] x^{k+1} + n \sum_{k=1}^{n} \left[n \atop k \right] x^k - n \left[n \atop 1 \right] x \\
&= n!x + x \sum_{k=1}^{n} \left[n \atop k \right] x^k + n \sum_{k=1}^{n} \left[n \atop k \right] x^k - n(n-1)!x \\
&= x \cdot x^{\overline{n}} + n \cdot x^{\overline{n}} = (x+n) x^{\overline{n}} = x^{\overline{n+1}}
\end{aligned}$$
Ce qui complète notre démonstration.

3. La valeur $x^{\overline{n}}$ représente le nombre de façon de placer n objets différent dans k urnes différentes, de sorte que l'ordre des objets dans les urnes soient importante. Remarquer que dans ce cas, les urnes peuvent possiblement être vide. Alternativement, on peut supposer que les objets sont placer dans exactement k urnes (non-vide), et additionner pour les différentes valeurs possible de k. Pour placer les objets dans exactement k urnes, on peut commencer par diviser les n objets en k groupes identiques, de sorte que les objets dans chaque groupe soient ordonnés, ce qui peut être fait de $\left[n \atop k \right]$ façons, puis on choisit k urnes parmi les x avec ordre et sans remise dans lesquels placer nos groupes, ce qui peut être fait de $x^{\underline{k}}$ façon. En additionnant le tout, on obtient :
$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \left[n \atop k \right] x^{\underline{k}}$$

4. L'idée de la démonstration est de remplacer x par $-x$ dans l'équation 1. Pour ce faire, remarquons premièrement que $(-x)^n = (-1)^n x^n$. De plus, nous avons :
$$(-x)^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (-x-i) = \prod_{i=0}^{k-1} (-1)(x+i) = (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (x+i) = (-1)^k x^{\overline{k}}$$
En remplaçant dans l'équation 1 on obtient donc :
$$(-1)^n x^n = (-x)^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (-x)^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (-1)^k x^{\overline{k}} \quad \Rightarrow \quad x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (-1)^{k-n} x^{\overline{k}} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (-1)^{k+n} x^{\overline{k}}$$

Remarquez que a dernière égalité vient du fait que la valeur de $(-1)^i$ dépend seulement de la parité de i.

5. L'idée est essentiellement la même que pour l'équation 4. La démonstration vous est laissé en exercice.
6. L'idée est essentiellement la même que pour l'équation 4. La démonstration vous est laissé en exercice.
7. Exercice

□

6.7 Le problème des ménages

Le problème des ménages est l'un des classiques de la combinatoire. Posé originalement par Lucas [7] en 1891, ce n'est qu' en 1934 que Touchard [13] en fourni une première formule explicite, mais sans aucune démonstration. La première démonstration de la formule de Touchard est donné en 1943 par Kaplansky [6]. La démonstration de Kaplansky reste cependant trop difficile pour notre cours. Heureusement pour nous, en 1986, Bogart et Doyle [3] en donne une démonstration largement simplifié dans leur article «Non-Sexist Solution of the Menage Problem». Malgré tout, c'est l'approche du livre de Beeler [1] que nous vous présentons ici. Le problème des ménages s'énonce comme suit :

> **De combien de façon peut-on assoir n couples autour d'une table ronde de sorte que les hommes et les femmes alternes et sans qu'aucun des hommes ne soient assis à côté de son épouse ?**

Théorème 6.7.1. Le nombre de façons de placer k dominos 2×1 sur un quadriller $n\times 1$ est $\binom{n-k}{k}$.

Démonstration. L'idée est de remarquer qu'en plaçant k dominos, nous occuperons un total de $2k$ cases ce qui signifie que $n-2k$ cases resteront libre. Le problème revient donc à compter le nombre de façon d'ordonner k dominos et $n-2k$ cases vide, ce qui est l'équivalent du problème du MISSISSIPPI. On a donc : $\frac{(k+n-2k)!}{k!(n-2k)!} = \binom{n-k}{k}$ possibilités. □

Théorème 6.7.2. Le nombre de façon de choisir l'emplacement de k couples assis ensemble sur une table ronde contenant $2n$ chaises identifié de 1 à $2n$ est $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$. Attention, ici nous ne plaçons pas les couples, mais choisissons uniquement les emplacements où seront placé des couples.

Démonstration. L'idée ici revient à utiliser la méthode de l'élément distingué en combinaison avec le théorème précédent. Fixons la chaise numéro 1. On remarque donc qu'un membre d'un couple peut occuper cette chaise, ou la chaise peut être laissé vide. SI la chaise est occupé, alors l'autre membre du couple doit être assis sur la chaise 2 ou sur la chaise $2n$. Nous avons donc trois cas à traiter.

1. Supposons que les chaises 1 et 2 sont occupées par un même couple. Il nous reste donc $k-1$ couples à placer sur les $2n-2$ chaises restante. Remarquez que maintenant que le cercle est coupé, il s'agit en fait du même problème que le problème des dominos que nous avons traité dans le théorème précédent. On a donc $\binom{(2n-2)-(k-1)}{k-1} = \binom{2n-k-1}{k-1}$ possibilités.
2. Supposons que les chaises 1 et $2n$ sont occupée par un même couple. Dans ce cas, le problème est essentiellement identique à ce que nous venons de faire. Le nombre de possibilités est donc $\binom{2n-k-1}{k-1}$.

3. Supposons finalement que la chaise 1 est libre. Dans ce cas, le cercle est à nouveau brisé et il nous faut placer les k couples sur $2n-1$ chaise. En applicant à nouveau le théorème précédent on a donc $\binom{(2n-1)-k}{k} = \binom{2n-k-1}{k}$ possibilités.

Maintenant, il ne nous reste plus qu'à additionner les trois cas, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} 2\binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k-1}{k} &= \frac{2(2n-k-1)!}{(k-1)!(2n-2k)!} + \frac{(2n-k-1)!}{k!(2n-2k-1)!} \\ &= \frac{2k(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!} + \frac{(2n-2k)(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!} \\ &= \frac{2n(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!} \\ &= \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} \end{aligned}$$

□

Théorème 6.7.3. **(Problème des ménages)** Le nombre de façons d'assoir n couples autour d'une table ronde de sorte que les hommes et les femmes alternes et sans qu'aucun des hommes ne soient assis à côté de son épouse est donné par la formule suivante :

$$M_n = (n-1)! \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i}(n-i)!$$

Démonstration. La solution est maintenant une simple application du principe d'inclusion-d'exclusion, suivi d'une application du principe d'équivalence. Pour trouver le nombre de façon qu'au moins i couples soient assis ensembles, nous avons :

1. Premièrement, on choisit l'emplacement des hommes et l'emplacement des femmes, ce qui peut être fait de 2 façons.
2. On choisit les i couples qui seront au bon endroit, ce qui peut être fait de $\binom{n}{i}$ façons.
3. On choisit l'emplacement des i couples, ce qui peut être fait de $\frac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i}$ façons d'après le théorème précédent.
4. On place les i couples, ce qui peut être fait de $i!$ façons.
5. On place le reste des hommes, puis le reste des femmes, ce qui peut être fait de $[(n-i)!]^2$ façons.

Le nombre de façon d'avoir au moins i couples assis ensemble est donc $2\binom{n}{i}\frac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i} i![(n-i)!]^2$. On applique ensuite le principe d'inclusion-d'exclusion, puis on divise par $2n$ pour ternir compte des rotations de la table, ce qui nous donne finalement :

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{2}{2n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i} i![(n-i)!]^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i n!\frac{2n}{2n-i}\cdot\binom{2n-i}{i}(n-i)! \\ &= (n-1)!\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i}(n-i)! \end{aligned}$$

□

À partir du théorème précédent, on peut construire le tableau ci-dessous contenant la valeur de M_n pour de petite valeur de n :

n	1	2	3	4	5	6	7
M_n	0	0	2	12	312	9600	416 880

Chapitre 7

Les récurrences

7.1 Introduction

Le problème de grains de blé : Une légende raconte que le roi Shirham de l'Inde aurait demandé à son grand vizier Sissa Ben Dahir ce qu'il souhaitait obtenir comme récompense pour avoir inventé le jeu d'échec. Ce dernier fit la demande d'avoir un grain de blé pour la première case du jeu d'échec, deux grains pour la seconde case, 4 pour la troisième case, 8 pour la quatrième, et ainsi de suite en continuant de doubler pour chacune des cases de l'échiquier. Le roi ravi de la modestie de son vizier, accepta sans hésiter. Ce n'est qu'un peu plus tard, que les trésoriers du roi l'informa que la quantité de grain de blé requis était en fait de loin supérieur à la quantité produite annuellement par l'Inde. [9]

Le problème des grains de blé est en fait un exemple de relation de récurrence. Si on dénote par a_n le nombre de grains de blé se trouvant sur la n-ième case, on a donc la relation suivante :

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Puis, si on dénote par s_n le nombre total de grain de blé pour couvrir les n premières cases, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} s_n = s_{n-1} + a_n, & n \geq 2 \\ s_1 = a_1 \end{cases}$$

Il est facile de voir que la solution de la première récurrence est $a_n = 2^{n-1}$, ce qui nous permet ensuite de résoudre la seconde récurrence :

$$s_n = \sum_{n=1}^{64} 2^{n-1} = \sum_{n=0}^{63} 2^n = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

Bien que l'exemple des grains de blé soit relativement simple à résoudre, il est important de noter que les récurrences apparaissent très souvent en combinatoire, et ce dans des contextes très varier. Il est donc important d'étudier les différentes techniques permettant de les résoudre. C'est ce que nous ferons dans les prochaines sections.

7.2 Quelques outils

Comme nous venons de le mentionner, les récurrences jouent un rôle très important en combinatoire, et nous avons déjà eu l'occasion d'en rencontrer plusieurs depuis le début de la session. Bien qu'occasionnellement nous avons été en mesure de les transformer sous forme explicite, la plupart du temps nous avons dû nous contenter de la récurrence, faute d'avoir les outils nécessaire pour trouver cette forme explicite. Dans ce chapitre nous sommes intéressé à remédier à ce problème, et développer des méthodes systématiques de résolution des récurrences.

Les deux méthodes les plus importantes pour résoudre les récurrences sont les fonctions génératrices et la méthode du polynôme caractéristique. La méthode des fonctions génératrices, bien que difficile, est la méthode la plus générale à notre disposition. D'un autre côté, la méthode du polynôme caractéristique est beaucoup plus simple, mais s'applique seulement dans quelque cas particulier. Des méthodes, tel que la dérivation symbolique, peut cependant nous permettre de réécrire certaine récurrence sous une forme différente pour ensuite pouvoir appliquer la méthode du polynôme caractéristique.

Avant de ce lancer dans l'étude des fonctions génératrices, il nous est cependant nécessaire de faire un détour, et d'étudier certain outils qui nous serons essentielles pour appliquer correctement cette méthode.

La factorisation des polynômes

Autant dans la méthode des fonctions génératrices que dans celle du polynôme caractéristique, il nous est souvent nécessaire de factoriser un polynôme sous forme de facteur irréductible qui peuvent être soit de degré 1 ou 2. Ceci est possible grâce au théorème fondamental de l'algèbre qui s'énonce comme suit :

Théorème 7.2.1. **(Théorème fondamental de l'algèbre)** Si $p(x)$ est un polynôme de dégré plus grand ou égal à 1 et à coefficient constant, alors $p(x)$ peut-être factorisé sous forme d'un produit de facteur linéaire et / ou quadratiques irréductibles.

Bien que le théorème fondamental de l'algèbre nous garantisse l'existence des factorisations en polynôme irréductible, il ne nous donne aucune information sur comment obtenir une telle factorisation. Il est facile de factoriser le polynôme de degré 2. On peut utiliser la technique du produit-somme, ou la formule quadratique.

Exemple 7.2.1. On veut factoriser le polynôme $x^2 - 5x + 6$. Pour ce faire, nous avons deux méthodes :

- **Méthode du produit-somme :** On cherche des entiers x_1, x_2 pour lesquels la somme est -5 et le produit est 6. Par essaie et erreur, on détermine facilement que $x_1 = -2$ et $x_2 = -3$. On obtient donc :
$$x^2 - 5x + 6 = (x + x_1)(x + x_2) = (x - 2)(x - 3)$$
- **Méthode de la formule quadratique :** On commence par calculer x_1 et x_2 à l'aide de la formule quadratique, ce qui nous donne :
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2 \text{ et } 3$$
On a donc $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$, ce qui nous donne la factorisation suivante :
$$x^2 - 5x + 6 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 2)(x - 3)$$
- **Remarque importante :** Remarquez que les signes sont traité différemment dans les deux méthodes, ce qui est souvent source d'erreur.

Exemple 7.2.2. On veut factoriser le polynôme $3x^2 + 5x + 9$. Pour ce faire, nous allons utiliser à nouveau la formule quadratique :
$$\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(9)}}{2(3)}$$
On remarque immédiatement que $5^2 - 4(3)(9) = -83 < 0$. Le polynôme ne possède donc aucune racine dans les nombres réels. On peut donc affirmer qu'il est irréductible dans $\mathbb{R}$.

Exemple 7.2.3. On veut factoriser le polynôme $15x^2 - 2x - 8$. Pour ce faire, appliquons la formule quadratique :
$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(15)(-8)}}{2(15)} = \frac{2 \pm \sqrt{484}}{30} = \frac{2 \pm 22}{30} = \frac{24}{30} \text{ et } \frac{-20}{30}$$
On obtient donc la factorisation suivante :
$$15x^2 - 2x - 8 = 15\left(x - \frac{24}{30}\right)\left(x + \frac{20}{30}\right) = 15\left(x - \frac{4}{5}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (5x - 4)(3x + 2)$$

Attention : lorsque l'on a un polynôme de la forme ax^2+bx+c avec des racines x_1 et x_2, la factorisation peut s'écrire sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$. Une erreur très courante est d'oublier le facteur a dans la factorisation.

Comme nous venons de le voir, les polynômes réductibles de degrés 2 sont faciles à factoriser. Des formules similaires, bien que plus compliqué, existe aussi pour les polynômes de degré 3 et 4. Par contre, le théorème d'Abel-Galois nous affirme qu'aucune telle formule n'existe pour les polynômes généraux de degré 5 ou plus.

Théorème 7.2.2. **(Abel / Galois)** Il n'existe aucune formule permettant de trouver les racines d'un polynôme général de degré 5 ou plus.

Étant donné donné ces limitations, nous allons ici présenter une méthode différente pour trouver les racines (et donc factoriser) des polynômes de degrés quelconques. La méthode s'applique cependant uniquement pour les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers, ce qui nous sera suffisant pour le reste du texte. La méthode consiste essentiellement à trouver une liste de candidat potentiel pour les racines du polynôme, puis de les tester un par un. Une fois qu'une racine est trouvé, on effectue alors la division euclidienne pour trouver un nouveau polynôme de degré plus petit. C'est le théorème des racines rationnelles qui nous permet dans un premier temps d'établir une liste de candidat.

Théorème 7.2.3. **(Théorème des racines rationnelles)** Si $p(x)$ est un polynôme à coefficient entier tel que :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

où a_n et a_0 sont différent de zéro, alors toutes les racines rationnelles $x = \frac{p}{q}$ écrite en fraction réduite satisfont les deux propriétés suivantes :

1. p est un diviseur entier du terme a_0
2. q est un diviseur entier du terme a_n

Il faut noter que le théorème des racines rationnelles nous donne une liste de candidat qui peuvent être soit positif ou négatif. Question de réduire la liste des possibilités, nous pouvons ensuite utiliser la règle des signes de Descartes pour déterminer le nombre de racines positives et le nombre de racines négatives.

Théorème 7.2.4. **(Règle des signes de Descartes)** Lorsque les termes d'un polynôme sont ordonné en ordre décroissant de degré, alors le nombre de racines positives est soit égal au nombre de changement de signe entre les termes non nul consécutif, ou bien moins par un multiple de 2. Les racines multiples sont compté séparément.

Corollaire 7.2.1. Pour trouver le nombre de racine négative d'un polynôme $p(x)$ on applique le théorème au polynôme $p(-x)$.

Nous allons maintenant illustrer ces théorèmes à l'aide de quelques exemples, en commençant par un exemple à l'aide d'un polynôme du second degré pour lequel nous savons déjà trouver les racines à l'aide de la formule quadratique.

Exemple 7.2.4. On veut utiliser le théorème des racines rationnelles pour trouver les racines du polynôme $p(x) = 3x^2 - 22x + 7$. Comme 3 et 7 sont des nombres premiers, on obtient que les seules possibilités pour des racines rationnelles sont :

$$\left\{\pm 1, \pm 7, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{7}{3}\right\}$$

Maintenant, comme il n'y a deux changements de signes, la règle des signes de Descartes nous affirme qu'il y a 0 ou 2 racines positives. En applicant le corollaire, nous avons $p(-x) = 3x^2 + 22x + 7$, ce qui signifie qu'il n'y a aucune racine négative. Nous avons donc seulement 4 candidats à tester. En testant les possibilités une par une, on a donc :

x	$1/3$	1	$7/3$	7
$p(x)$	0	-12	-28	0

On obtient donc que les racines du polynôme sont 7 et $1/3$. Remarquez que par le théorème fondamental de l'algèbre, nous savons qu'il ne peut pas y avoir d'autre racine. De plus, après avoir trouvé que $1/3$ est une racine, nous aurions donc pu arrêter notre recherche et faire la division euclidienne pour trouver l'autre racine :

$$
\begin{array}{r|r}
 & x - 7 \\
\hline
3x - 1 & 3x^2 - 22x + 7 \\
 & -\,3x^2 \quad + x \\
\hline
 & -\,21x + 7 \\
 & 21x - 7 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Ce qui nous donne $x - 7 = 0$ et donc $x = 7$ est l'autre racine.

Bien sur, l'intérêt du théorème des racines rationnelles n'est pas de trouver les racines d'un polynôme du second degré, mais bien de trouver les racines de polynôme de degré plus élevé. La technique reste cependant la même.

Exemple 7.2.5. Nous voulons factoriser le polynôme $p(x) = x^3 - 23x^2 + 170x - 400$. Par le théorème des racines rationnelles, nous savons que toutes les racines rationnelles de $p(x)$ doivent être un diviseur entier (positif ou négatif) de 400. Par la règle des signes de Descartes, nous savons qu'il y a 1 ou 3 racines positives. Comme $p(-x) = -x^3 - 23x^2 - 170x - 400$, nous savons par le corollaire qu'il n'y a aucune racine négative. De plus, comme $400 = 2^4 \cdot 5^2$, nous savons que 400 possède $5 \cdot 3 = 15$ diviseurs, ce qui signifie qu'il nous faut tester au plus 15 possibilités pour trouver toutes les racines rationnelles du polynôme. On doit donc compléter le tableau ci-dessous :

x	1	2	4	5	8	10	16	20	25	40	50	80	100	200	400
$p(x)$	-252	-144	-24	0											

Remarquez que nous avons arrêter de compléter notre tableau du moment que nous avons trouvé que 5 est une racine, et nous allons effectuer la division euclidienne pour trouver les autres racines.

$$
\begin{array}{r|r}
 & x^2 \quad - 18x \quad + 80 \\
\hline
x - 5 & x^3 - 23x^2 + 170x - 400 \\
 & -\,x^3 \quad + 5x^2 \\
\hline
 & -\,18x^2 + 170x \\
 & 18x^2 \quad - 90x \\
\hline
 & 80x - 400 \\
 & -\,80x + 400 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

On obtient donc $x^3 - 23x^2 + 170x - 400 = (x - 5)(x^2 - 18x + 80) = (x - 5)(x - 8)(x - 10)$.

Décomposition en fractions partielles

La décomposition en fractions partielles est une technique permettant une fonction rationnelle sous la forme d'une somme de fonctions rationnelles plus simple, et donc plus facilement utilisable dans le contexte des fonctions génératrices. La décomposition en fractions partielles se fait en plusieurs étapes :

1. On commence par réécrire notre fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ sous la forme $f(x) = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(z)}$ avec $\deg(r(x)) < \deg(q(x))$. Ceci peut être accompli à l'aide de la division euclidienne des polynômes.
2. On factorise le dénominateur $q(x)$ sous la forme $q_1^{\alpha_1}(x)q_2^{\alpha_2}(x)q_3^{\alpha_3}(x)...q_k^{\alpha_k}(x)$ avec chacun des $q_i^{\alpha_i}(x)$ un polynôme de degré 1 ou 2 irréductible différent. Ceci est possible grâce au théorème fondamental de l'algèbre. Remarquez que le théorème fondamental de l'algèbre est uniquement un théorème d'existence, et ne nous donne aucune information sur la façon de factoriser notre polynôme. La formule quadratique, le théorème des racines rationnelles et la règle des signes de Descartes peuvent s'avérer particulièrement utile pour la factorisation.
3. Une fois les deux étapes précédentes complété, chaque facteur de la forme $(ax+b)^n$ au dénominateur peut être décomposé sous la forme

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + ... + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

de plus, chaque facteur irréductible de la forme $(ax^2+bx+c)^n$ au dénominateur peut être décomposé sous la forme

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + ... + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Il faut ensuite résoudre le système d'équations linéaires pour obtenir la valeur des constantes.

Exemple 7.2.6. On veut décomposer la fonction rationnelle suivante sous forme de fractions partielles :

$$\frac{5x^2-94x+390}{x^3-23*x^2+170*x-400}$$

Pour ce faire, remarquons premièrement que $x^3-23*x^2+170*x-400 = (x-5)(x-8)(x-10)$. On doit donc trouver des constantes A, B et C telle que :

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2-94x+390}{x^3-23*x^2+170*x-400} &= \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-8} + \frac{C}{x-10} \\
&= \frac{A(x-8)(x-10) + B(x-5)(x-10) + C(x-5)(x-8)}{x^3-23x^2+170x-400} \\
&= \frac{(A+B+C)x^2 + (-18A-15B-13C)x + (80A+50B+40C)}{x^3-23x^2+170x-400}
\end{aligned}$$

On doit donc résoudre le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} A+B+C = 5 \\ -18A-15B-13C = -94 \\ 80A+50B+40C = 390 \end{cases}$$

En applicant la méthode de Gauss, nous obtenons donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ -18 & -15 & -13 & -94 \\ 80 & 50 & 40 & 390 \end{array}\right) \sim^{\substack{18L_1+L_2\to L_2 \\ 80L_1-L_3\to L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 30 & 40 & 10 \end{array}\right) \sim^{10L_2-L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & -50 \end{array}\right)$$

On a donc $10C = -50$, ce qui nous donne $C = -5$. En remplaçant dans la seconde ligne, on a donc $3B+5(-5) = -4$, ce qui nous donne $3B = 21$ et donc $B = 7$. Finalement, en remplaçant dans la première équation on a $A+7-5 = 5$, ce qui nous donne $A = 3$. La décomposition en fractions partielles est donc :

$$\frac{5x^2-94x+390}{x^3-23*x^2+170*x-400} = \frac{3}{x-5} + \frac{7}{x-8} + \frac{-5}{x-10}$$

Exemple 7.2.7. Décomposer en fractions partielles la fonction rationnelle suivante :

$$\frac{-9x^2+13x-114}{x^3-6x^2+4x-24}$$

Pour ce faire, nous devons premièrement factoriser le dénominateur $p(x) = x^3-6x^2+4x-24$. Comme il s'agit d'un polynôme de degré 3, il doit posséder au minimum 1 racines réelles par le théorème fondamental de l'algèbre, ce qui signifie qu'il est réductible. De plus, le théorème des racines rationnelles nous affirme que toutes les racines rationnelles de $p(x)$ doivent être un diviseur entier de 24 (positif ou négatif). On obtient donc les possibilités suivantes :

$$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$$

De plus, comme $p(-x) = -x^3-6x^2-4x-24$, nous savons par le corollaire de la règle des signes de Descartes que le polynôme $p(x)$ ne possède aucune racine négative. Nous somme donc ramené à tester un maximum de 8 possibilités.

x	1	2	3	4	6	8	12	24
$p(x)$	-25	-32	-39	-40	0			

On remarque donc que 6 est une racine du polynôme. Nous allons donc effectuer la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad +4 \\ \hline x-6 & x^3-6x^2+4x-24 \\ & \underline{-x^3+6x^2} \\ & \quad 4x-24 \\ & \quad \underline{-4x+24} \\ & \quad\quad 0 \end{array}$$

Il nous reste donc à factoriser le polynôme x^2+4. Il est facile de voir que ce polynôme est en fait irréductible dans les nombres réels, et donc la factorisation de $p(x)$ est :

$$x^3-6x^2+4x-24 = (x-6)(x^2+4)$$

La décomposition en fractions partielles doit donc avoir la forme suivante :

$$\frac{-9x^2+13x-114}{x^3-6x^2+4x-24} = \frac{A}{x-6}+\frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x-6)}{x^3-6x^2+4x-24} = \frac{(A+B)x^2+(-6B+C)x+(4A-6C)}{x^3-6x^2+4x-24}$$

Ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} A+B=-9 \\ -6B+C=13 \\ 4A-6C=-114 \end{cases}$$

que l'on peut résoudre avec par exemple la méthode de Gauss. On obtient donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & -6 & 1 & 13 \\ 4 & 0 & -6 & -114 \end{array}\right) \sim^{4L_1-L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & -6 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 6 & 78 \end{array}\right) \sim^{2L_2+3L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & -6 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 20 & 260 \end{array}\right)$$

Ce qui nous donne $20C = 260$, c'est à dire $C = 13$, en remplaçant dans la seconde équation on a ensuite $-6B+13 = 13$, ce qui signifie que $B = 0$, puis finalement en remplaçant dans la première équation on obtient $A+0 = -9$, ce qui nous donne $A = -9$. La décomposition en fractions partielles est donc :

$$\frac{-9x^2+13x-114}{x^3-6x^2+4x-24} = \frac{-9}{x-6}+\frac{13}{x^2+4}$$

Exemple 7.2.8. On veut décomposer en fractions partielles la fonction rationnelle suivante :

$$\frac{-x^2-2x+18}{x^3-15x^2+72x-112}$$

En utilisant le théorème des racines rationnelles, on obtient la factorisation suivante pour le dénominateur : $x^3-15x^2+72x-112=(x-4)^2(x-7)$, ce qui signifie que la décomposition en fractions partielles aura la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{-x^2-2x+18}{x^3-15x^2+72x-112} &= \frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{C}{x-7}=\frac{A(x-4)(x-7)+B(x-7)+C(x-4)(x-4)}{x^3-15x^2+72x-112}\\ &= \frac{(A+C)x^2+(-11A+B-8C)x+(28A-7B+16C)}{x^3-15x^2+72x-112}\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} A+C=-1\\ -11A+B-8C=-2\\ 28A-7B+16C=18\end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient donc : $A=4, B=2$ et $C=-5$. La décomposition en fractions partielles est donc :

$$\frac{-x^2-2x+18}{x^3-15x^2+72x-112}=\frac{4}{x-4}+\frac{2}{(x-4)^2}+\frac{5}{x-7}$$

Le théorème du binôme

Nous avons déjà eu l'occasion de rencontrer le théorème du binôme, mais nous ne l'avons toujours pas écrit formellement dans ces notes. Nous allons maintenant remédier à ce problème, et montrer quelques unes de ses applications en lien avec les fonctions génératrices.

Théorème 7.2.5. **(Théorème du binome)** Si $a,b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, alors :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

Démonstration. Par définition, nous savons que :

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)...(a+b)}_{n \text{ fois}}$$

Il est facile de voir qu'une fois développer, chaque terme aura la forme $C_ka^kb^{n-k}$ avec C_k une constante. Ceci est dû au fait que chaque terme sera formé du produit d'exactement n facteurs, qui peuvent être soit des a ou des b. Pour trouver le coefficient C_k, il s'agit de remarquer qu'il correspond au nombre de façon de choisir k fois un a parmi une possibilité de n. Ceci nous est donné par le coefficient binomial $\binom{n}{k}$. On obtient donc :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

□

Le cas particulier où $a=x$ et $b=1$ est particulièrement intéressant, et comme nous l'avons déjà vu correspondant à la fonction génératrice du coefficient binomial. Nous avons donc

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$$

Remarquez qu'il nous est possible de remplacer le n dans la somme par l'infinie, car le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ vaut 0 si $k > n$. Cette forme du théorème du binôme est particulièrement intéressante, car la présence d'une seule variable x nous permet d'utiliser les outils du calcul différentiel et intégral. C'est ce que Newton a fait, ce qui nous permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 7.2.6. **(Théorème du binôme généralisé de Newton)** Si r est un nombre réel, alors nous avons l'égalité suivante :

$$(x+1)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \qquad \forall x, |x| < 1$$

La démonstration de cette version du théorème ne sera pas faites ici, mais repose sur le calcul différentiel et intégral. Remarquez que dans cette version du théorème du binôme fonction pour n'importe quel exposant réel, contrairement à notre version original. Par contre, il devient nécessaire de limiter les valeurs de x à des valeurs entre -1 et 1. Ceci n'aura cependant pas d'importance dans notre travail, car nous allons travailler avec des séries formelles et non des séries numériques.

Exemple 7.2.9. On veut utiliser le théorème du binôme pour approximer la valeur de $\sqrt{2}$. Pour ce faire, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= (1+1)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} 1^k == \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{\underline{k}}}{k!} \\
&= \frac{(1/2)^{\underline{0}}}{0!} + \frac{(1/2)^{\underline{1}}}{1!} + \frac{(1/2)^{\underline{2}}}{2!} + \frac{(1/2)^{\underline{3}}}{3!} + \frac{(1/2)^{\underline{4}}}{4!} + \ldots \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1/2}{1!} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!} + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!} + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{4!} + \ldots \\
&\approx 1 + 0,5 - 0,125 + 0,0625 - 0,0390625 = 1,3984375
\end{aligned}$$

La véritable valeur de $\sqrt{2}$ est en fait approximativement $1,4142$, ce qui signifie que notre approximation est en loin d'être parfaite. En considérant plus de terme, il nous est cependant possible d'obtenir une bien meilleure approximation.

Dans notre cas, ce n'est pas vraiment les approximations qui rend le théorème du binôme intéressant, mais plutôt son lien avec les fonctions génératrices. Nous allons donc considérez quelques cas particulier.

Exemple 7.2.10. Si on prend $r = -1$ dans le théorème du binôme, on obtient :

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\underline{k}}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)\ldots(-k)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

En particulier, si on remplace x par $-x$ dans notre égalité, on obtient :

$$\frac{1}{-x+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

qui n'est en fait rien d'autre que notre série géométrique.

Exemple 7.2.11. Si on remplace r par $-n$ avec n entier, et on remplace x par $-x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^{\underline{k}}}{k!} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)(-n-3)\ldots(-n-k+1)}{k!} (-1)^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n)(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(n+k-1)}{k!} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{\overline{k}}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k
\end{aligned}$$

Exemple 7.2.12. En reprenant la série géométrique de l'exemple 7.2.10 et en remplaçant le x par x^n on obtient :

$$\frac{1}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^m)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{km}$$

La multiplication des séries

Dans la résolution des suites définies par récurrence, il est fréquent de devoir multiplier deux séries. Comme dernier outils avant d'entreprendre la résolution des récurrences, nous allons donc regarder comment ceci peut être accompli.

Théorème 7.2.7. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sont des séries, alors leur produit est donné par la formule suivante :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

Démonstration. L'idée est tout simplement de remarquer que pour obtenir un x^n, il nous faut le produit d'une constante par un terme x^n, ou un terme de la forme x^1 avec un terme de la forme x^{n-1}, ou un terme de la forme x^2 avec un terme de la forme x^{n-2}, et ainsi de suite. En faisant la somme de tout ces termes, on peut alors obtenir le coefficient de x^n, et on fait ainsi de suite pour toute les valeurs de n. □

Exemple 7.2.13. On veut vérifier le théorème en calculant le produit $e^{2x}e^{3x}$ à l'aide des séries.

$$\begin{aligned} e^{2x}e^{5x} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\frac{3^{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 3^{n-k}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+3)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n!} = e^{5x} \end{aligned}$$

7.3 La méthode des fonctions génératrices

Rappelons que l'idée des fonctions génératrices est d'écrire une suite a_k sous la forme d'une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Les outils du calcul différentiel et intégral pouvant s'appliquer aux séries (qui sont en fait des polynômes de degré infini), les séries sont plus facile à manipuler que les suites. De plus, comme il s'agit d'une bijection, si on parvient à trouver les coefficients de la série, on aura trouvé notre suite, ce qui peut en particulier nous permettre de trouver une formule explicite pour certaine suite définie par récurrence.

Nous avons déjà rencontrer quelques fonctions génératrices importante. En particulier les séries génératrices des coefficients binomiaux et des coefficients multi-ensembles que nous allons rappeler immédiatement :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left\langle{n \atop k}\right\rangle x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

En prenant $n = 1$ dans la seconde somme, et en remplaçant x par ax^m, on obtient la série génératrice suivante qui est particulièrement importante pour le reste du teste :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k x^{mk} = \frac{1}{1-ax^m}$$

Ce type de fonction génératrice est ce que nous appelons une fonction génératrice ordinaire. Basé sur le problème des dérangement, il nous est possible de définir un autre type de fonctions génératrices : Les fonctions génératrices exponentielles. Nous avons vu que la fonction exponentielle peut s'écrire sous la forme d'une série :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Ce qui nous amène à définir la fonction génératrice exponentielle d'une suite a_k comme étant $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$.

Exemple 7.3.1. On veut résoudre l'équation définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + 2 \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

Pour ce faire, nous allons appliquer la méthode des fonctions génératrices. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (5a_{n-1} + 2)x^n = 3 + 5x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= 3 + 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 3 + 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \frac{2x}{1-x} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} (1-5x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{3(1-x)+2x}{1-x} = \frac{3-x}{1-x} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{3(1-x)+2x}{1-x} = \frac{3-x}{(1-x)(1-5x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-5x} = \frac{A(1-5x)+B(1-x)}{(1-x)(1-5x)} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -5A - B = -1 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient $-4A = 2$, c'est à dire $A = \dfrac{-1}{2}$. En remplaçant dans la première équation, on a donc : $B = \dfrac{7}{2}$. On obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{-1/2}{1-x} + \frac{7/2}{1-5x} = \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{7}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} + \frac{7}{2} \cdot 5^n \right) x^n$$

La solution de la récurrence est donc $a_n = \dfrac{7 \cdot 5^n - 1}{2}$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple 7.3.2. On veut résoudre l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + 14a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \\ a_0 = 7 \\ a_1 = 22 \end{cases}$$

Nous allons maintenant appliquer la méthode des fonctions génératrices.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 7 + 22x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 7 + 22x + \sum_{n=2}^{\infty} (5a_{n-1} + 14a_{n-2})x^n = 7 + 22x + 5 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 14 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ &= 7 + 22x + 5x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 14x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = 7 + 22x + 5x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 14x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 7 + 22x + 5x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + 14x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 7 + 22x + 5x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 7 \right) + 14x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 7 + 22x + 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 35x + 14x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\left(1 - 5x - 14x^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 7 + 22x - 35x = 7 - 13x \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{7-13x}{1-5x-14x^2} = \frac{7-13x}{(1-7x)(1+2x)}$$

On applique maintenant la décomposition en fraction partielle. On cherche des constantes A et B telle que :

$$\frac{7-13x}{(1-7x)(1+2x)} = \frac{A}{1-7x} + \frac{B}{1+2x} = \frac{A(1+2x)+B(1-7x)}{(1-7x)(1+2x)} = \frac{(2A-7B)x+(A+B)}{(1-7x)(1+2x)}$$

Ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2A-7B=-13 \\ A+B=7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=4 \text{ et } B=3$$

En revenant à notre série, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{4}{1-7x} + \frac{3}{1+2x} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(7x)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(4(7)^n + 3(-2)^n\right)x^n$$

Ce qui nous donne finalement :

$$a_n = 4(7)^n + 3(-2)^n, \quad \forall n \geq 0$$

Exemple 7.3.3. On veut résoudre la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 12a_{n-1} - 48a_{n-2} + 64a_{n-3}, \quad \forall n \geq 3 \\ a_0 = 2 \\ a_1 = 56 \\ a_2 = 640 \end{cases}$$

Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode des fonctions génératrices. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 2+56x+640x^2+\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = 2+56x+640x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left(12a_{n-1}-48a_{n-2}+64a_{n-3}\right)x^n \\
&= 2+56x+640x^2+12x\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - 48x^2\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} + 64x^3\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-3} \\
&= 2+56x+640x^2+12x\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - 48x^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 64x^3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= 2+56x+640x^2+12x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 48x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 64x^3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 12x(a_0+a_1x) + 48x^2(a_0) \\
&= 2+32x+64x^2+12x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 48x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 64x^3\sum_{n=0}^{\infty}
\end{aligned}$$

En isolant la somme, on obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{2+32x+64x^2}{1-12x+48x^2-64x^3} = \frac{2+32x+64x^2}{(1-4x)^3}$$

Nous allons maintenant appliquer la méthode de décomposition en fractions partielles :

$$\frac{2+32x+64x^2}{(1-4x)^3} = \frac{A}{1-4x} + \frac{B}{(1-4x)^2} + \frac{C}{(1-4x)^3} = \frac{A(1-4x)^2+B(1-4x)+C}{(1-4x)^3} = \frac{A(1-8x+16x^2)+B(1-4x)+C}{(1-4x)^3}$$

Ce qui nous permet d'obtenir le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 16A = 64 \\ -8A-4B = 32 \\ A+B+C = 2 \end{cases}$$

qui est relativement facile à résoudre. On obtient donc $A=4, B=-16$ et $C=14$. Notre fonction génératrice devient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{4}{1-4x} - \frac{16}{(1-4x)^2} + \frac{14}{(1-4x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} 4(4x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 16\left\langle {2 \atop n} \right\rangle (4x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 14\left\langle {3 \atop n} \right\rangle (4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[4\cdot 4^n - 16(n+1)\cdot 4^n + 14\frac{(n+2)(n+1)}{2}\cdot 4^n\right]x^n
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \cdot 4^n - 16(n+1) \cdot 4^n + 14\frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot 4^n \\ &= 4 \cdot 4^n - 16n \cdot 4^n - 16 \cdot 4^n + 7n^2 \cdot 4^n + 21n \cdot 4^n + 14 \cdot 4^n \\ &= 4^n(2 + 5n + 7n^2) \end{aligned}$$

Exemple 7.3.4. On veut résoudre la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 9a_{n-2} + 63a_{n-3}, \quad \forall n \geq 3 \\ a_0 = 9 \\ a_1 = 35 \\ a_2 = 209 \end{cases}$$

Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode des fonctions génératrices. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 9 + 35x + 209x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n \\ &= 9 + 35x + 209x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (7a_{n-1} - 9a_{n-2} + 63a_{n-3})x^n \\ &= 9 + 35x + 209x^2 + 7x \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - 9x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 63x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 9 + 35x + 209x^2 + (7x - 9x^2 + 63x^3)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) - 63x - 245x^2 + 81x^2 \\ &= (7x - 9x^2 + 63x^3)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + 9 - 28x + 45x^2 \end{aligned}$$

En isolant la série, nous obtenons donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{9 - 28x + 45x^2}{1 - 7x + 9x^2 - 63x^3}$$

Nous devons maintenant appliquer la méthode de décomposition en fractions partielles. Pour ce faire, nous devons premièrement factoriser le dénominateur. Ici, nous allons utiliser une petite astuce. Par le théorème des racines rationnelles, nous savons que les racines rationnelles (s'il y en a) auront la forme $\frac{1}{k}$ avec k un diviseur entier de 63. Travailler avec les fractions peut cependant sembler un peu difficile. Nous allons donc faire la transformation suivante :

$$p(x) = 1 - 7x + 9x^2 - 63x^3 \quad \Rightarrow \quad q(x) = x^3 p\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - 7x^2 + 9x - 63$$

En trouvant les racines du polynôme $q(x)$, nous aurons donc trouvé l'inverse des racines du polynôme $p(x)$. Pour trouver les racines du polynôme $q(x)$, nous devons tester les différents diviseurs réels de 63. Comme $63 = 3^2 \cdot 7^1$, il est facile de voir que 63 ne possède que 6 diviseurs positifs (et autant négatif). Par la règle des signes de Descartes, nous pouvons cependant affirmer que toutes les racines sont positives. Nous n'avons donc que 6 valeurs à tester : $1, 3, 7, 9, 21, 63$. À partir de cette liste, nous trouvons facilement que $q(7) = 0$, ce qui signifie que $\frac{1}{7}$ est une racine du polynôme $p(x)$. Le polynôme $p(x)$ peut donc être divisé par $1 - 7x$.

$$\begin{array}{r|l} & 9x^2 \quad\quad + 1 \\ \hline -7x + 1 & -63x^3 + 9x^2 - 7x + 1 \\ & \underline{63x^3 - 9x^2} \\ & \quad\quad - 7x + 1 \\ & \quad\quad \underline{7x - 1} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Comme le polynôme $1+9x^2$ est irréductible, notre décomposition en fractions partielles aura la forme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{9-28x+45x^2}{1-7x+9x^2-63x^3} = \frac{A}{1-7x}+\frac{Bx+C}{1+9x^2} \\ &= \frac{A(1+9x^2)+(Bx+C)(1-7x)}{(1-7x)(1+9x^2)} = \frac{(A+C)+(B-7C)x+(9A-7B)x^2}{(1-7x)(1+9x^2)}\end{aligned}$$

Ceci nous amène donc au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} A+C=9 \\ B-7C=-28 \\ 9A-7B=45 \end{cases}$$

que l'on peut résoudre à l'aide par exemple de la méthode de Gauss, ce qui nous donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -28 \\ 9 & -7 & 0 & 45 \end{array}\right) \underset{\sim}{9L_1-L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -28 \\ 0 & 7 & 9 & 36 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_3-7L_2\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -28 \\ 0 & 0 & 58 & 232 \end{array}\right)$$

Ce qui nous permet d'obtenir $A=5, B=0$ et $C=4$. En retournant en notre fonction génératrice, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{5}{1-7x}+\frac{4}{1+9x^2} \\ &= 5\sum_{n=0}^{\infty}(7x)^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}(-9x^2)^n \\ &= 5\sum_{n=0}^{\infty}7^n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{2n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 5\cdot 7^{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 5\cdot 7^{2n+1}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4(-1)^n 3^{2n}x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(5\cdot 7^{2n}+4(-1)^n 3^{2n}\right)}_{\text{termes pairs}} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(5\cdot 7^{2n+1}\right)}_{\text{termes impairs}} x^{2n+1}\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'obtenir la solution suivante :

$$a_n = \begin{cases} 5\cdot 7^n + 4(-1)^{n/2}\cdot 3^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 5\cdot 7^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

7.4 La méthode du polynôme caractéristique

Comme vous l'avez sans remarqué dans la section précédente, la méthode des fonctions génératrices peut d'avoir longue et pénible à appliquer. Heureusement pour nous, dans plusieurs cas important, il nous est possible de simplifier grandement la méthode. Le premier cas que nous allons traiter est celui des récurrences homogènes linéaires à coefficients constants.

Definition 7.4.1. Pour une suite définie par récurrence, on définit les termes suivants :

1. **Linéaire :** Tous les termes a_i sont à la puissance 1.
2. **Homogène :** Tout les termes contiennent un a_i.
3. **Coefficients constants :** Tous les coefficients des a_i sont des constantes.

Théorème 7.4.1. Si a_n est une suite définie par récurrence qui est homogène, linéaire et à coefficient de la forme :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + ... c_k a_{n-k}$$

Alors on définit le polynôme caractéristique comme étant :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + c_3\lambda^{k-3} + ... + c_{k-1}\lambda + c_k \\ &= -(\lambda - r_1)^{\alpha_1}(\lambda - r_2)^{\alpha_2}...(\lambda - r_m)^{\alpha_m} \end{aligned}$$

où les r_i sont les racines distinctes du polynôme. Pour chacune des racines r_i, on prend donc une somme de la forme

$$C_1 r_i^n + C_2 n r_i^n + C_3 n^2 r_i^n + ... + C_{\alpha_i} n^{\alpha_i - 1} r_i^n$$

En faisant la somme des sommes obtenus pour chacune des racines, on obtient alors la forme générale d'une formule explicite pour notre récurrence a_n.

Exemple 7.4.1. On veut résoudre l'équation définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = -4a_{n-1} + 77a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3 \\ a_1 = 41 \\ a_2 = 683 \end{cases}$$

Pour ce faire, on doit commencer par résoudre l'Équation $r^2 = -4r + 77$ c'est à dire trouver les racines du polynôme $r^2 + 4r - 77 = 0$.

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-77)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-4 \pm 18}{2} = -2 \pm 9 = 7 \text{ et } -11$$

Donc la solution de l'équation aura donc la forme :

$$a_n = 7^n\alpha_1 + (-11)^n\alpha_2, \quad \forall n \geq 1$$

Pour trouver α_1 et α_2, on utilise les valeurs $a_1 = 41$ et $a_2 = 683$, ce qui nous amène au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 7\alpha_1 - 11\alpha_2 = 41 \\ 49\alpha_1 + 121\alpha_2 = 683 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 49\alpha_1 - 77\alpha_2 = 287 \\ 49\alpha_1 + 121\alpha_2 = 683 \end{cases} \Rightarrow 198\alpha_2 = 396 \Rightarrow 2$$

Puis en remplaçant dans la première équation on trouve $\alpha_1 = 9$, ce qui nous donne la solution suivante :

$$a_n = 9(7)^n + 2(-11)^n, \quad \forall n \geq 1$$

Exemple 7.4.2. On veut résoudre l'équation définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3 \\ a_1 = 20 \\ a_2 = 128 \end{cases}$$

Pour ce faire, on commence par trouver les solutions de l'équation $r^2 = 8r - 16$, c'est à dire trouver les racines du polynôme $r^2 - 8r + 16 = 0$.

$$r = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$$

Donc la seule racine est r. On peut donc affirmer que la solution aura la forme

$$a_n = \alpha_1(4)^n + \alpha_2 n(4)^n$$

Il faut maintenant trouver la valeur des constantes, pour ce faire, on doit résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 4\alpha_2 = 20 \\ 16\alpha_1 + 32\alpha_2 = 128 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16\alpha_1 + 16\alpha_2 = 80 \\ 16\alpha_1 + 32\alpha_2 = 128 \end{cases} \Rightarrow 16\alpha_2 = 48 \Rightarrow \alpha_2 = 3$$

Puis en utilisant la première équation on obtient $\alpha_1 = 2$. La solution est donc :

$$a_n = 2(4)^n + 3n(4)^n, \quad \forall n \geq 1$$

Exemple 7.4.3. On veut résoudre l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + 14a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \\ a_0 = 7 \\ a_1 = 22 \end{cases}$$

Comme il s'agit d'une récurrence linéaire homogène à coefficients constants, nous pouvons appliquer la méthode du polynôme caractéristique. Pour ce faire, on doit trouver les racines du polynôme suivant :

$$\lambda^2 = 5\lambda + 14 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \Rightarrow (\lambda - 7)(\lambda + 2) = 0$$

Les racines sont donc $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = -2$. La solution de l'équation de récurrence aura donc la forme suivante :

$$a_n = C_1(7)^n + C_2(-2)^n$$

Pour trouver les constantes, on utilise les conditions initiale :

$$\begin{cases} a_0 = 7 = C_1 + C_2 \\ a_1 = 22 = 7C_1 - 2C_2 \end{cases}$$

De la première équation, on obtient $C_1 = 7 - C_2$, puis en remplaçant dans la seconde on obtient :

$$22 = 7(7 - C_2) - 2C_2 = 49 - 7C_2 - 2C_2 = 49 - 9C_2 \Rightarrow 9C_2 = 27 \Rightarrow C_2 = 3$$

Ce qui nous donne finalement $C_1 = 7 - 3 = 4$. La solution de l'équation de récurrence est donc :

$$a_n = 4(7)^n + 3(-2)^n, \quad \forall n \geq 0$$

Exemple 7.4.4. On veut résoudre la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 17a_{n-1} - 103a_{n-2} + 267a_{n-3} - 252a_{n-4} \\ a_0 = 16 \\ a_1 = 89 \\ a_3 = 536 \\ a_4 = 3431 \end{cases}$$

Pour ce faire, commençons par trouver son polynôme caractéristique. On a donc :

$$p(\lambda) = -\lambda^4 + 17\lambda^3 - 103\lambda^2 + 267\lambda - 252$$

De plus, en remplaçant λ par $-\lambda$ on obtient :

$$p(\lambda) = -\lambda^4 - 17\lambda^3 - 103\lambda^2 - 267\lambda - 252$$

On remarque donc que toutes les racines de polynôme caractéristique doivent être positive, et de plus, si elle sont rationnelles elles doivent être un diviseur de 252. Comme $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, il est facile de voir que 252 possède exactement $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ diviseurs. En testant pour les différents diviseurs, on obtient facilement que 3 est une racine. Nous allons donc effectuer la division euclidienne, ce qui nous permet d'obtenir :

$$-\lambda^4 + 17\lambda^3 - 103\lambda^2 + 267\lambda - 252 = -(\lambda - 3)(\lambda^3 - 14\lambda^2 + 61\lambda - 84)$$

Il nous faut donc factoriser le polynôme $\lambda^3 - 14\lambda^2 + 61\lambda - 84$. Pour ce faire, remarquons qu'à nouveau la règle des signes de Descartes nous permet d'affirmer que toutes les racines sont réelles. De plus, par le théorème des racines rationnelles, nous savons que si une racine rationnelle existe, elle doit être un diviseur de 84. Comme $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, nous avons au plus 12 diviseurs à tester. Nous obtenons donc facilement que 3 est à nouveau une racine. On a donc :

$$-\lambda^4 + 17\lambda^3 - 103\lambda^2 + 267\lambda - 252 = -(\lambda - 3)^2(\lambda^2 - 11\lambda + 28) = \lambda - 3)^2(\lambda - 4)(\lambda - 7)$$

Les racines du polynôme caractéristique sont donc $3, 3, 4, 7$. Notez que 3 est une racines double. La forme explicite de notre récurrence est donc :

$$a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 n \cdot 3^n + C_3 \cdot 4^n + C_4 \cdot 7^n$$

En remplaçant les différentes valeurs initiales dans cette équations, nous obtenons donc le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} C_1 + C_3 + C_4 = 16 \\ 3C_1 + 3C_2 + 4C_3 + 7C_4 = 89 \\ 9C_1 + 18C_2 + 16C_3 + 49C_4 = 536 \\ 27C_1 + 81C_2 + 64C_3 + 343C_4 = 3431 \end{cases}$$

Que l'on peut résoudre à l'aide par exemple de la méthode de Gauss. On obtient donc :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 3 & 3 & 4 & 7 & 89 \\ 9 & 18 & 16 & 49 & 536 \\ 27 & 81 & 64 & 343 & 3431 \end{array}\right) \overset{\substack{-3L_1 + L_2 \to L_2 \\ -9L_1 + L_3 \to L_3 \\ -27L_1 + L_4 \to L_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 41 \\ 0 & 18 & 7 & 40 & 392 \\ 0 & 81 & 37 & 316 & 2999 \end{array}\right) \overset{\substack{-6L_2 + L_3 \to L_3 \\ -27L_2 + L_4 \to L_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 146 \\ 0 & 0 & 10 & 208 & 1892 \end{array}\right)$$

$$\overset{-10L_3 + L_4 \to L_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 146 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 432 \end{array}\right)$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} C_4 &= 9 \\ C_3 &= 146 - 16(9) = 2 \\ C_2 &= \frac{41 - 1(4) - 4(9)}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ C_1 &= 16 - 9 - 2 = 5 \end{aligned}$$

La solution de notre équation de récurrence est donc :

$$a_n = 5 \cdot 3^n + n \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n + 9 \cdot 7^n$$

7.5 La méthode de dérivation symbolique

La méthode du polynôme caractéristique est particulièrement utile, mais s'applique unique pour des équations homogènes. La méthode de dérivation symbolique permet de transformer une équation qui n'est pas homogène, en une équation homogène de sorte que nous allons pouvoir appliquer la méthode du polynôme caractéristique pour des équations qui ne sont pas homogène. Nous allons illustrer la méthode à l'aide d'exemple.

Exemple 7.5.1. On veut résoudre l'équation définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + 2 \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

Pour ce faire, remarquons que $a_{n-1} = 5a_{n-2} + 2$, on donc en isolant le 2 de chacune des expressions nous avons :

$$\begin{cases} 2 = a_n - 5a_{n-1} \\ 2 = a_{n-1} - 5a_{n-2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_n - 5a_{n-1} = a_{n-1} - 5a_{n-2} \quad \Rightarrow \quad a_n - 6a_{n-1} + 5a_{n-2} = 0$$

Ce qui est un équation linéaire homogène à coefficients constants. En appliquant la méthode du polynôme caractéristique, nous devons premièrement trouver les racines du polynôme $r^2 - 6r + 5 = 0$. Il est facile de voir que $r^2 - 6r + 5 = (r-5)(r-1)$, ce qui nous permet d'affirmer que la solution aura la forme suivante :

$$a_n = C_1 + C_2(5^n)$$

Pour trouver les constantes, nous avons besoin de deux valeurs initiales. Nous savons déjà que $a_0 = 3$, pour obtenir une seconde, il nous suffit d'utiliser la récurrence donné au début du problème, ce qui nous permet d'obtenir $a_1 = 5(3) + 2 = 17$. Pour trouver les constantes, il nous faut donc résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} C_1 + C_2(5^0) = 3 \\ C_1 + C_2(5^1) = 17 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ C_1 + 5C_2 = 17 \end{cases}$$

En faisant la soustraction de la seconde équation par la première, on obtient $4C_2 = 14$, ce qui nous donne $C_2 = \dfrac{7}{2}$. En remplaçant dans la première équation, on obtient donc : $C_1 = 3 - \dfrac{7}{2} = -\dfrac{1}{2}$. La solution de la récurrence est donc :

$$a_n = \frac{7 \cdot 5^n - 1}{2}, \quad \forall n \geq 0$$

Exemple 7.5.2. On veut résoudre la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + n \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

Pour ce faire, nous allons commencer par essayer de ramener cette équation à une équation homogène. Pour ce faire, nous avons :

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + n \\ a_{n-1} = 5a_{n-2} + (n-1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n = a_{n-1} - 5a_{n-2} + 1 \\ n = a_n - 5a_{n-1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2} + 1$$

Puis, on applique à nouveau la même technique avec cette dernière équation, ce qui nous donne :

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2} + 1 \\ a_{n-1} = 6a_{n-2} - 5a_{n-3} + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = a_n - 6a_{n-1} + 5a_{n-2} \\ 1 = a_{n-1} - 6a_{n-2} + 5a_{n-3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_n = 7a_{n-1} - 11a_{n-2} + 5a_{n-3}$$

Cette dernière équation est linéaire homogène et à coefficients constants. Il nous faut cependant 3 valeurs initiales, ce qui est deux de plus que nous avons. Pour les trouver nous allons utiliser la récurrence originale.

$$a_1 = 5a_0 + 1 = 5(2) + 1 = 11 \quad \text{et} \quad a_2 = 5a_1 + 2 = 5(11) + 2 = 57$$

Le problème ce ramène donc à résoudre la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 11a_{n-2} + 5a_{n-3} \\ a_0 = 2 \\ a_1 = 11 \\ a_2 = 57 \end{cases}$$

Pour la résoudre, on applique la méthode du polynôme caractéristique. On doit donc trouver les racines du polynôme $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5$. En appliquant le théorème des racines rationnelles et la règle des signes de Descartes, on obtient la factorisation suivante :

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5)$$

La formule explicite aura donc la forme suivante :

$$a_n = C_1 + C_2 n + C_3 \cdot 5^n$$

Pour trouver les constantes, on doit résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 2 \\ C_1 + C_2 + 5C_3 = 11 \\ C_1 + 2C_2 + 25C_3 = 57 \end{cases}$$

Ce qui nous donne $C_1 = \dfrac{-5}{16}$, $C_2 = \dfrac{-1}{4}$ et $C_3 = \dfrac{37}{16}$. La forme explicite est donc :

$$a_n = \frac{-5}{16} - \frac{n}{4} + \frac{37 \cdot 5^n}{16}, \quad \forall n \geq 0$$

7.6 La méthode des fonctions génératrices exponentielles

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéresser aux récurrences à coefficients constants. Les techniques que nous avons vu jusqu'à présent ne fonctionne pas très bien lorsque ce n'est pas le cas. Nous allons maintenant voir une autre approche aux fonctions génératrices permettant de résoudre certaine équation qui n'ont pas des coefficients constants. L'idée est de réécrire une suite a_n sous la forme d'une fonction génératrice exponentielle. C'est à dire sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

Exemple 7.6.1. On veut résoudre la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = n a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

En applicant les fonctions génératrices exponentielles on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} \frac{x^n}{n!} = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

En isolant la série, on obtient :

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!}$$

On obtient donc que $a_n = n!$ pour tout $n \geq 0$.

Remarquez que l'exemple précédent était particulièrement simple et est en fait la définition récursive de la factorielle. La méthode peut cependant être utiliser dans des cas plus compliqué. C'est ce que nous allons faire immédiatement.

Exemple 7.6.2. On veut trouver une formule explicite pour la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = n a_{n-1} + 2, \quad \forall n \geq 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode des fonctions génératrices exponentielles. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} &= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n a_{n-1} + 2) x^n}{n!} = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_{n-1} x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} = 3 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} - 2 \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} + 2e^x \end{aligned}$$

En isolant la série, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!} &= \frac{1+2e^x}{1-x} = \frac{1}{1-x} + 2e^x\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n + 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[1+2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right]x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[n!+2\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\right]\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

Ce qui nous permet donc d'obtenir que $a_n = n! + 2\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ pour tout $n \geq 0$. Remarquez que si n est grand, nous obtenons que $a_n \approx n! + 2n!e$.

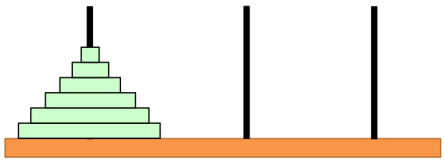
7.7 Applications des récurrences

Le problème de la tour de Hanoï

Le problème mathématique des tours de Hanoï a été inventé par Édouard Lucas. Il est publié dans le tome 3 de ses Récréations mathématiques, parues à titre posthume en 1892. Le problème consiste à déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de départ à une tour d'arrivée en passant par une tour intermédiaire, et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :

1. On ne peut déplacer plus d'un disque à la fois ;
2. On ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.
3. On suppose que cette dernière règle est également respectée dans la configuration de départ.

La question est alors combien de coup est nécessaire pour résoudre le problème avec n disques de départ.



Il existe plusieurs méthodes pour résoudre ce problème. Dans tous les cas, le problème revient à trouver premièrement une relation de récurrence d'écrivant le problème. C'est ce que nous ferons premièrement. Pour ce faire, remarquons que si nous avons un seul disque, un seul coup est nécessaire. Si nous avons deux disques, il s'agit de déplacer le petit disque sur la tour intermédiaire, on déplace ensuite le plus grand disque sur la tour finale, puis on déplace le petit disque sur la tour finale. Donc trois coups sont nécessaires. Maintenant, si nous avons n disques, nous devons commencer par déplacer les $n-1$ plus petits disques sur la tour intermédiaire, plus on déplace le plus grand disque sur la tout finale, et finalement on déplace les $n-1$ plus petit disque sur la tour finale. Donc si on dénote le nombre de coup nécessaire pour déplacer n disque par H_n, on obtient donc la relation suivante :

$$H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2$$

Donc à partir de la valeur de H_1 que nous avons trouvé, on peut ensuite calculer la valeur de H_n pour chaque entier positif n. On obtient donc le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
H_n	1	3	7	15	31	63	127

Nous allons maintenant étudier différente approche pour résoudre cette récurrence.

L'induction : En observant les valeurs obtenues dans notre tableau, on est amener à faire l'hypothèse que $H_n = 2^n - 1$. Pour le démontrer, on utilise l'induction. On a donc :

1. Si $n = 1$, nous avons $2^1 - 1 = 1$, ce qui correspond à la valeur que nous avions calculer.
2. Supposons que notre formule est vrai pour $n = k$, c'est à dire supposons que $H_k = 2^k - 1$.
3. Si $n = k + 1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= 2H_k + 1 \\ &= 2\left(2^k - 1\right) + 1 \\ &= 2^{k+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Par induction, on peut donc affirmer que notre formule est correcte. La solution du problème des tour de Hanoi est donc $H_n = 2^n - 1$.

Les sommes géométriques : Une deuxième approche pour résoudre notre récurrence consiste à essayer de la développer, tout en espérant pour obtenir une forme que nous connaissons déjà. En commençant à nouveau avec notre suite définie par récurrence, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 = 2\left(2H_{n-2} + 1\right) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2\left(2H_{n-3} + 1\right) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &= 2^3\left(2H_{n-4} + 1\right) + 2^2 + 2 + 1 = 2^4 H_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ &= \ldots \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \quad \text{(Somme géométrique)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

Remarquer que cette fois, nous avons pu trouver une forme simple dû au fait que nous avons reconnu qu'il s'agissait d'une somme géométrique.

Les fonctions génératrices : Nous allons maintenant regarder comment les fonctions génératrices peuvent être utilisé pour résoudre le problème des tours de Hanoï. Pour ce faire, nous commençons à nouveau avec la même relation de récurrence. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i &= \sum_{i=2}^{\infty} H_i x^i + H_1 x = \sum_{i=2}^{\infty} \left(2H_{i-1} + 1\right) x^i + H_1 x = 2\sum_{i=2}^{\infty} H_{i-1} x^i + \sum_{i=2}^{\infty} x^i + x \\ &= 2\sum_{i=1}^{\infty} H_i x^{i+1} + \sum_{i=2}^{\infty} x^i + x = 2x\sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} x^i - 1 - x + x = 2x\sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i + \frac{1}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

Maintenant, en isolant la somme, on obtient :

$$(1 - 2x)\sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i = \frac{1}{1-x} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} - \frac{1}{1-2x}$$

Maintenant, rendu à cette étape, on utilise la décomposition en fractions partielles qui nous affirme qu'il existe des constantes A et B de sorte qu'on est l'égalité suivante :

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{A(1-2x) + B(1-x)}{(1-x)(1-2x)} = \frac{(-2A - B)x + (A + B)}{(1-x)(1-2x)}$$

Comme les dénominateurs sont égaux, les numérateurs doivent aussi être égaux, ce qui nous amène à résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -2A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases}$$

qui a comme solution $A = -1$ et $B = 2$. En revenant à notre somme, on a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)} - \frac{1}{1-2x} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-2x} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{i=0}^{\infty} x^i + \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i \\ &= -\sum_{i=0}^{\infty} x^i + \sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^i - 1\right) x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(2^i - 1\right) x^i\end{aligned}$$

Finalement, pour que les deux sommes (séries) soient égales, les coefficients doivent être égaux, ce qui nous donne :

$$H_n = 2^n - 1, \quad \forall n \geq 1$$

Ce qui est encore une fois la même solution que nous avions déjà trouvé.

La dérivation symbolique : Comme dernière approche, nous allons utiliser la méthode de dérivation symbolique. En commençant à nouveau avec la même relation de récurrence, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} H_n = 2H_{n-1} + 1 \\ H_{n-1} = 2H_{n-2} + 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} H_n - 2H_{n-1} = 1 \\ H_{n-1} - 2H_{n-2} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow H_n - 2H_{n-1} = H_{n-1} - 2H_{n-2} \Rightarrow H_n - 3H_{n-1} + 2H_{n-2} = 0$$

qui est une relation de récurrence linéaire, homogène et à coefficients constants. Nous pouvons donc appliquer la méthode du polynôme caractéristique. On a donc :

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

La forme générale de notre suite est donc $H_n = C_1 + 2^n C_2$. Pour trouver les constantes, nous avons besoin de deux conditions initiales. En utilisant les valeurs de C_1 et C_2 que nous avons trouver dans notre tableau, on obtient donc le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 + 2C_2 = 1 \\ C_1 + 4C_2 = 3 \end{array}\right.$$

Ce qui nous permet d'obtenir facilement que $C_1 = -1$ et $C_2 = 1$. La solution de notre récurrence est donc : $H_n = -1 + 2^n = 2^n - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Le problème des lapins de Fibonacci

En 1202, Leonardo Pisano dit Fibonacci, un mathématicien italien, énonce dans son livre liber abaci le problème connu aujourd'hui sous le nom du problème des lapins. Au premier mois, il y a une paire de lapereaux, trop jeune pour procréer. Si chaque couple de lapereaux prend un mois avant de devenir adulte, et si chaque couple adulte donne naissance chaque mois à un couple de lapereaux après un mois de gestation, combien de lapin aurons nous après x mois ? Ce problème donna naissance à ce qu'on appelle aujourd'hui la suite de Fibonacci, et il est facile d'en trouver les premières valeurs de la suite. Si on dénote par F_n le nombre de lapin présent au n^e mois, on a donc :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

De plus, il est facile de voir que notre suite satisfait la récurrence suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \\ F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \end{array}\right.$$

Nous allons maintenant utiliser la méthode du polynôme caractéristique pour trouver une formule explicite au problème des lapins. On doit commencer par trouver les racines du polynôme suivant :

$$\lambda^2 = \lambda + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

En applicant la formule quadratique, on obtient facilement que les racines sont :

$$\frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ce qui nous donne une solution générale de la forme :

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Il reste maintenant à trouver les deux constantes. Pour ce faire, on utilise la valeur de F_1 et F_2, ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

Ce qui a comme solution les valeurs $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ et $C_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$. La solution de l'équation définie par récurrence est donc :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad \forall n \geq 0$$

Remarquez que bien que cette suite est été introduit en Europe par Fibonacci, elle était déjà connu beaucoup plus tôt en Inde en lien avec d'autres problèmes.

Le problème des droites

Combien de régions sont obtenu en dessinant n droites non parallèles dans le plan de sorte qu'il n'y est pas 3 droites ayant un point d'intersection commun ? Pour résoudre le problème, il s'agit premièrement de remarquer que chaque nouvelle droite doit couper chacune des droite déjà présente. C'est à dire que si $n-1$ droite sont déjà présente, alors la n^{ieme} droite se fait couper en $n-1$ endroit, ce qui revient à dire qu'elle est coupé en n morceau. Chacun de ces morceaux donne lieu à un nouvelle région, ce qui nous permet d'obtenir la récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Pour trouver une formule explicite, nous allons utiliser la méthode de dérivation symbolique. On a donc :

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_{n-1} = a_{n-2} + (n-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = a_n - a_{n-1} \\ n = a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \end{cases} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \Rightarrow a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1$$

Comme cette nouvelle récurrence n'est toujours pas homogène, nous appliquons à nouveau la dérivation symbolique, ce qui nous donne :

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \\ a_{n-1} = 2a_{n-2} - a_{n-3} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} \\ 1 = a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} \end{cases} \Rightarrow a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

Ce qui nous donne finalement la récurrence suivante :

$$a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$$

Nous appliquons maintenant la méthode du polynôme caractéristique. On doit donc trouver les racines du polynôme suivant :

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

La forme générale de notre solution est donc :

$$a_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2$$

Pour trouver la valeur des constantes, nous avons maintenant besoin de 3 valeurs initiales, ce qui peut être accompli facilement à partir de la valeur $a_0 = 1$ en combinaison avec notre récurrence originale. On obtient donc $a_1 = a_0 + 1 = 2$ et $a_2 = a_1 + 2 = 4$. Ceci nous permet donc d'obtenir le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 + C_2 + C_3 = 2 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 4 \end{cases}$$

Que l'on peut résoudre facilement pour obtenir $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{1}{2}$ et $C_3 = \frac{1}{2}$. Notre solution explicite est donc :

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Les nombres de dérangement

Nous avons déjà étudier les nombres de dérangement lorsque nous avons étudier le problème des chapeaux, mais nous allons ici prendre une approche différente. Rappelons qu'un dérangement d'un ensemble de n élément est une permutation des n éléments de sorte qu'aucun d'entre eux ne se retrouve à sa position originale. Le nombre de dérangement est dénoté par D_n. Nous avons déjà obtenu une formule explicite pour le nombre de dérangement à l'aide du principe d'inclusion-d'exclusion, mais nous allons ici développer la même formule à l'aide des récurrences.

Pour compter le nombre de dérangement d'un ensemble de n éléments, remarquons premièrement que le premier élément de l'ensemble peut se retrouver dans $n-1$ positions différentes après dérangement. En échangeant le premier élément, alors l'un des $n-1$ éléments restant, deux options se présente à nous. On peut garder le premier élément fixe à sa nouvelle position, ou le déplacer à nouveau à l'emplacement d'un des $n-2$ éléments restant. Si on le garde fixe, il faut alors faire un dérangement des $n-2$ autres éléments, ce qui peut être fait de D_{n-2} façons. Si on le déplace à nouveau, il faut alors faire un dérangement des $n-1$ éléments, ce qui peut être fait de D_{n-1} façons. On obtient donc la récurrence suivante :

$$D_n = (n-1)\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right), \quad \forall n \geq 3$$

Pour pouvoir calculer les différentes valeurs de D_n, il nous faut maintenant ajouter deux valeurs initiales. Il est facile de voir par simple énumération que $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$.

Cette récurrence est particulièrement difficile à résoudre sous cette forme. Nous allons donc faire une petite astuce. Remarquons que :

$$\begin{aligned} D_n = nD_{n-1} + nD_{n-2} - D_{n-1} - D_{n-2} \quad &\Rightarrow \quad D_n - nD_{n-1} = nD_{n-2} - D_{n-1} - D_{n-2} \\ &\Rightarrow \quad D_n - nD_{n-1} = -D_{n-1} + (n-1)D_{n-2} \\ &\Rightarrow \quad D_n - nD_{n-1} = -\left[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}\right] \end{aligned}$$

Remarquons que nous avons une forme de symétrie. Si on pose $A_n = D_n - nD_{n-1}$, on remarque que $A_n = -A_{n-1}$. Ceci signifie que

$$A_n = -A_{n-1} = A_{n-2} = -A_{n-3} = \ldots = \pm A_2$$

Il est facile de voir que $A_2 = D_2 - 2D_1 = 1 - 2(0) = 1$. On a donc que $A_n = (-1)^n$, ce qui nous donne la récurrence suivante :

$$\begin{cases} D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \\ D_1 = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre cette nouvelle récurrence, nous allons appliquer la méthode des fonctions génératrices exponentielles. Pour ce faire, nous allons premièrement ajouter la valeur de D_0 à notre suite pour simplifier

les calculs. Nous avons donc $D_1 = 1D_0 + (-1)^1 = D_0 - 1$. Sachant que $D_1 = 0$, on obtient donc que $D_0 = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n x^n}{n!} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nD_{n-1} + (-1)^n)\, x^n}{n!} = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n x^n}{n!} + e^{-1}\end{aligned}$$

En isolant la série, on obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n x^n}{n!} = \frac{e^{-1}}{1-x} = e^{-1} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!}\right) \frac{x^n}{n!}$$

On obtient donc la formule explicite suivante pour les nombres de dérangement :

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!(n-k)!}{k!(n-k)^n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

Le problème de triangulation et les nombres de Catalan

Rappelons que les nombres de Catalan C_n que nous avons définit dans la section 2.2 comptent le nombre de façon de trianguler un polygone convexe à $n+2$ côtés. Nous avons déjà trouver qu'ils satisfont la récurrence suivante :

$$\begin{cases} C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} \\ C_0 = 1 \end{cases}$$

Nous avons déjà utiliser cette récurrence pour calculer quelques valeurs de C_n, mais nous voulons maintenant aller plus loin et chercher une formule explicite pour les calculer. Pour ce faire, nous allons utiliser les fonctions génératrices. Si on définit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, nous avons donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}\right] x^n = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right] x^{n+1} \\ &= C_0 + x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right] x^n = C_0 + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right) = 1 + x[f(x)]^2 \end{aligned}$$

Maintenant, pour déterminer $f(x)$, nous devons utiliser la formule quadratique, ce qui nous permet d'obtenir :

$$f(x) = 1 + x[f(x)]^2 \quad \Rightarrow \quad x[f(x)]^2 - f(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Remarquez que le $\pm$ nous donne en fait deux fonctions, mais une seule des deux est la bonne. Pour déterminer laquelle, on remarque que $f(0)$ doit être égal à C_0. Remarquez qu'ici, la fonction n'est pas définie en zéro. Dans ce cas, nous devons avoir recours à la limite. En remarquant que :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = 1$$

On obtient donc que la bonne fonction génératrice est la seconde, c'est à dire :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Il nous faut maintenant réécrire notre fonction $f(x)$ sous forme d'une série. La racine carré et la division vient nous créer quelques difficultés, mais le théorème du binôme généralisé va tout de même nous permettre d'y parvenir. Nous allons commencer par travailler uniquement avec la racine, et reviendrons par la suite à la fonction complète.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^{\underline{n}}(-1)^n 4^n x^n}{n!} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-i\right)\right)(-1)^n 2^{2n}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1-2i}{2}\right)(-1)^n 2^{2n}x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}2i-1\right)(-1)^n 2^{2n}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}2i-1\right)x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)n!}\left(\prod_{i=0}^{n}(2i-1)\right)x^n \\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)n!}\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots\cdot(2n-1)\right)x^n = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)n!}\left(\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot(2n)}\right)x^n \\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(2n)!}{(2n-1)n!2^n n!}x^n = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^n
\end{aligned}$$

Maintenant, considérons la fonction $f(x)$. En utilisant ce que nous venons de trouver pour la racine, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^n = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!(2n-1)}x^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(2n+1)}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!n!(n+1)^2(2n+1)}x^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2(2n+1)}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc finalement la formule suivante pour les nombres de Catalan :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

qui est étrangement simple considérant le travail qu'il nous a pris pour l'obtenir. Selon Sloane et Plouffe [10, 5], les nombres de Catalan forment la deuxième famille de nombre la plus souvent rencontrée dans les problèmes de combinatoire après les coefficient binomiaux. Le livre de Stanley [11] propose une liste de 66 problèmes dans lesquels les nombres de Catalan interviennent. Nous allons maintenant conclure ce chapitre en énonçant certaines applications des nombres de Catalan, plusieurs d'entre elles nous avons déjà eu l'occasion de rencontrer.

1. Le nombre de façon de trianguler un polygone convexe à $n+2$ côtés est C_n.
2. Le nombre de façons de placer toutes les parenthèses sur un produit de $n+1$ facteurs est C_n.
3. Le nombre d'arbre binaire à $n+1$ feuilles est C_n.
4. Le nombre de trajet sur une grille $n \times n$ qui reste sous ou sur la diagonale est C_n.
5. Le nombre de façon de lancer $2n$ fois consécutives à pile ou face de sorte qu'à la fin nous ayons obtenu n piles et n faces, mais qu'à aucun moment durant les lancer nous ayons un nombre supérieur de face que de pile est C_n.

Chapitre 8

Les problèmes d'existence

8.1 Le principe des nids de pigeons généralisés

Nous avons déjà eu l'occasion dans le premier chapitre de parler des problèmes d'existence. Le principe le plus élémentaire dans cette direction est le principe des nids de pigeons que nous avons énoncé comme suit :

Théorème 8.1.1. **(Principe des nids de pigeons)** Si on souhaite placer $n+1$ objets ou plus dans n boites, alors au moins une boite contiendra deux objets ou plus.

Exemple 8.1.1. Dans un groupe de 1500 étudiants, au moins deux sont né le même jour. Il s'agit d'une simple application du principe des nids de pigeons en considérant les étudiants comme étant nos objets, les 366 jours de l'année comme étant nos boîtes.

Remarquez que l'exemple précédent est particulièrement simple, mais ne semble pas être optimal. En effet, avec 1500 étudiants, il semble évident qu'il y aura plus que deux étudiants qui partageront la même date d'anniversaire. La question peut alors devenir quel est le plus petit entier k pour lequel nous pouvons affirmer qu'au moins k étudiants sont né la même date ? C'est le principe des nids de pigeons généralisés qui nous permet de résoudre ce problème. Avant de l'énoncé, nous allons cependant faire une définition.

Definition 8.1.1. On définie les deux fonctions suivantes :

1. La fonction plancher est la fonction $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à x.
2. La fonction plafond est la fonction $\lceil x \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie comme étant le plus petit entier supérieur ou égal à x.

Noter que bien qu'il s'agisse du vocabulaire adopté pour ce cours, les appellations fonction plancher et fonction plafond sont des traductions littérale de l'anglais, et sont des termes peut commun en français. De plus, la notation $\lceil x \rceil$ est couramment utilisé à la place de $\lfloor x \rfloor$. Cette notation sera cependant à éviter dans ce cours pour éviter de la confusion possible entre ces deux fonctions.

Il faut aussi faire attention à ne pas confondre la fonction plancher avec les nombres de Lah. Le fonction plancher ne prend qu'un seul nombre en argument, alors que les nombres de Lah en prennent deux. Lorsque l'argument est une fraction, il est cependant facile de les confondre au premier regard.

Théorème 8.1.2. **(Principe des nids de pigeons généralisés)** Si on veut placer n objets dans r boites, alors au moins une boite contiendra au moins $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ objets.

Nous allons maintenant illustré cette généralisation en l'appliquant à notre exemple précédent.

Exemple 8.1.2. Dans un groupe de 1500 étudiants, il y en a au moins $\left\lceil \frac{1500}{366} \right\rceil = 5$ qui sont né la même journée.

Nous pouvons maintenant modifier notre problème et ce demander combien d'étudiants au minimum devons nous avoir pour être certain qu'au moins k d'entre eux sont né la même journée. Dans ce cas, nous avons le corollaire suivant qui peut nous permettre de résoudre le problème.

Corollaire 8.1.1. Si nous avons n boites, alors le nombre minimal d'objet nécessaire pour être certain d'avoir au moins k objets dans une même boite est $n(k-1)+1$.

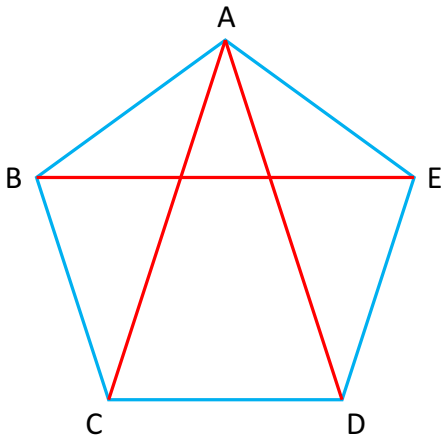
Démonstration. Le nombre maximal d'objet que nous pouvons mettre dans une même boite sans atteindre les k objets est $k-1$. On a donc que $n(k-1)$ est le nombre maximum d'objet que nous pouvons avoir sans qu'aucune boite ne contienne k objets. En ajoutant un objet, nous pouvons donc être certain qu'une boite contiendra au moins k objets. □

8.2 Problème des amis et des étrangers

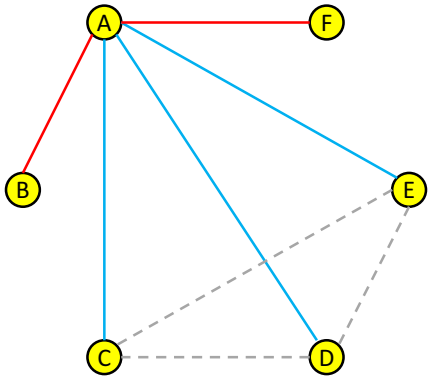
Le problème des amis et des étrangers est un autre problème classique de la combinatoire, mais aussi de la théorie des graphes. Nous pouvons l'énoncer comme suit :

> **Lors d'une soirée, chaque pair de personne présente sont soit ami ou étranger. Combien de personne au minimum est-il nécessaire d'avoir lors de cette soirée pour être certain que trois personnes soient mutuellement amis, ou trois personnes soit mutuellement ennemies ?**

Il est facile de voir que 5 personnes ne sont pas suffisante. Ceci peut être représenté à l'aide du graphe ci-dessous en considérant qu'un lien bleu entre deux personnes représente deux personnes qui sont étrangers, et un lien rouge représente deux personnes qui sont amis.



Nous allons maintenant montrer que 6 personnes sont en fait suffisante. Considérons un ensemble de personne $\{A, B, C, D, E, F\}$. Nous allons utiliser la méthode de l'élément distingué, et considérer pour le moment uniquement les liens (amis / étrangers) que possède A. Comme A possède 5 liens $\{AB, AC, AD, AE, AF\}$, que nous voulons coloré de deux couleurs (bleu ou rouge) pour signifier qu'ils sont amis ou étrangers, le principe des nids de pigeons généralisé nous affirme qu'au moins $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$ liens auront la même couleur.



Sans perte de généralité, nous allons supposé que les liens AC, AD, AE sont tous les trois bleus. Dans ce cas, si l'un des liens CD, CE ou DE est bleu, nous auront formé un groupe de trois personnes relié en bleu. Autrement, les liens CD, CE et DE sont tous rouges, et dans ce cas nous avons trouvé un groupe de 3 personnes tous reliés par un lien rouge. Dans les deux cas, nous avons donc trois personnes qui sont amis ou trois personnes qui sont étranger.

8.3 Les nombres de Ramsey

La théorie de Ramsey est une théorie très profonde, qui en terme simplifié nous affirme qu'un désordre complet ne peut pas exister. Le problème des amis et des étrangers est un instance de cette théorie. Le problème tel que nous l'avons énoncé dans la section précédente peut facilement se généralisé.

> **Quel est le nombre minimal de personne que nous devons avoir présent à une soirée pour être certain qu'un sous-ensemble de r personnes se connaissent mutuellement, ou un sous-ensemble de s personnes ne se connaissent pas ?**

Par définition, on définit le **nombre de Ramsey** $R(s,t)$ comme étant la solution de ce problème. Le théorème de Ramsey (que nous n'étudierons pas ici) nous affirme que les nombres de Ramsey sont bien définit et existe pour chaque valeur de r et s entiers positif. Le cas particulier $R(3,3)$ correspond au problème de la section précédente, et nous avons déjà vu vaut 6. Il est aussi facile de voir que $R(s,t) = R(t,s)$, c'est à dire que la fonction est symétrique. De plus, il n'est pas très difficile de montrer que $R(2,t) = t$. Ceci est dû au fait que si t personnes sont présente, alors soit chacune d'entre elles sont amis, ou bien 2 d'entre eux ne se connaissent pas.

De manière générale, les nombres de Ramsey sont particulièrement difficile à calculer. En fait, seulement quelques valeurs sont connu. Il s'agit de loin le problème le plus difficile que nous avons rencontré depuis le début du cours. Pour illustrer la difficulté du problème, remarquons que le problème des amis et des étranger correspond en fait à dessiner le arrête du graphe complet à 6 sommets (K_6) à l'aide de deux couleurs. Le graphe K_6 contient $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ arrête. En dessinant les arrêtes à l'aide de l'une ou l'autre des 2 couleurs, on obtient un total de $2^{15} = 32768$ possibilités. Pour déterminer la valeur de $R(3,3)$ à l'aide d'un vérification cas par cas, il nous est donc nécessaire de tester toutes ces 32768 possibilités, et ensuite trouver un ensemble permettant de montrer que 6 est bel et bien la plus petite valeur possible.

Vous remarquerez que 32768 possibilités n'est certainement pas beaucoup pour un ordinateur moderne, mais rappellez vous que nous avons pu calculer facilement la valeur de $R(3,3)$ dans la section précédente. La difficulté augnmente cependant très rapidement. Prenons par exemple la valeur de $R(6,6)$ qui est toujours inconnu. Pour ce faire, le problème peut se traduire dans la question de dessiner les arrêtes du graphes K_{12}. Ce dernier possède $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. En dessinant les arrêtes, nous obtenons donc un total de $2^{66} = 73\ 786\ 976\ 294\ 838\ 206\ 464$ possibilités, ce qui est certainement un très grand nombre.

Bibliographie

[1] Robert A. Beeler. *How to count*. Springer, Cham, 2015. An introduction to combinatorics and its applications.

[2] Kenneth P. Bogart. *Enumerative Combinatorics Through Guided Discovery*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017.

[3] Kenneth P. Bogart and Peter G. Doyle. Nonsexist solution of the ménage problem. *Amer. Math. Monthly*, 93(7) :514–519, 1986.

[4] Richard A. Brualdi. *Introductory combinatorics*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, fifth edition, 2010.

[5] John M. Harris, Jeffry L. Hirst, and Michael J. Mossinghoff. *Combinatorics and graph theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2008.

[6] Irving Kaplansky. Solution of the "problème des ménages.". *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 :784–785, 1943.

[7] E. Lucas. *Théorie des nombres*. Gauthier-Villars, Paris, 1891.

[8] George E. Martin. *Counting : the art of enumerative combinatorics*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.

[9] Fred S. Roberts and Barry Tesman. *Applied combinatorics*. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2009.

[10] N. J. A. Sloane and Simon Plouffe. *The encyclopedia of integer sequences*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1995. With a separately available computer disk.

[11] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.

[12] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012.

[13] J. Touchard. Sur un problème des permutations. *C. R. Acad. Sciences Paris*, 198 :631–633, 1934.

Index

Dérangement, 52

Factorielle, 18
Factorielle montante, 26
Factorielle tombante, 26
Fonctions bijectives, 9
Fonctions injectives, 9
Fonctions surjectives, 9

Nombre de Ramsey, 93
Nombres de Lah, 57
Nombres de partitions, 41
Nombres de Stirling de deuxième espèce, 38
Nombres de Stirling de première espèce, 59

Paradoxe des anniversaires, 35
Partitions, 6
Principe d'équivalence, 10
Principe d'inclusion-d'exclusion, 7
Principe d'induction, 13
Principe d'induction généralisé, 14
Principe de la bijection, 9
Principe de la somme, 7
Principe des nids de pigeons, 11, 91
Principe des nids de pigeons généralisés, 91
Principe du produit, 6
Problème de la NHL, 50
Problème des amis et des étrangers, 92
Problème des chapeaux, 51
Problème des ménages, 62

Règle des signes de Descartes, 67
Relation antisymétrique, 9
Relation d'équivalence, 10
Relation d'ordre partielle, 10
Relation réflexive, 9
Relation symétrique, 9
Relation transitive, 10

Théorème des racines rationnelles, 67
Théorème du binôme, 71
Théorème fondamental de l'algèbre, 66