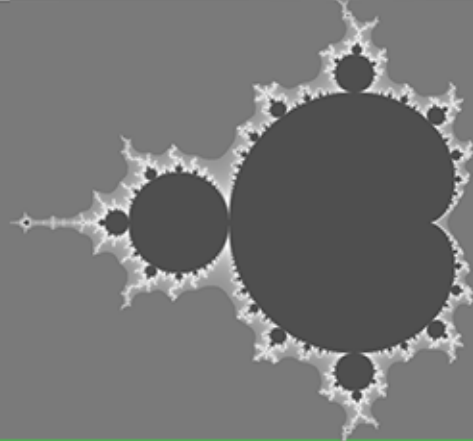
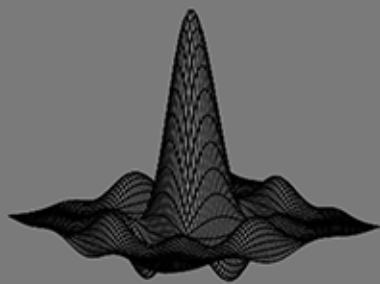
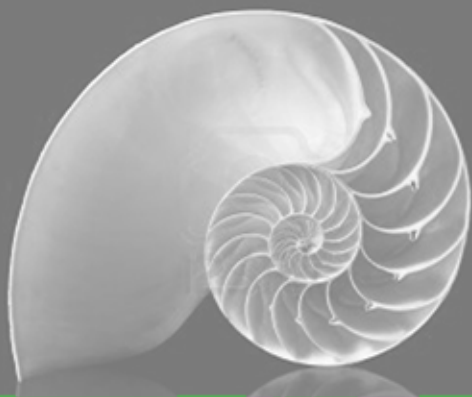




Géométrie vectorielle et algèbre linéaire

Nicolas Bouffard

Hiver 2020

3.1415926535897
932384626
433832
7950



Université de
Saint-Boniface

Une éducation supérieure depuis 1818

Dernière mise à jour :
15 décembre 2019 à 19:34

Table des matières

1	Les vecteurs	5
1.1	Introduction	5
1.2	Égalité de vecteurs	6
1.3	Addition et soustraction de vecteurs	7
1.4	Multiplication par un scalaire	9
1.5	La norme d'un vecteur	10
1.6	Le produit scalaire	11
1.7	Angle entre deux vecteurs	14
1.8	La projection orthogonale	15
1.9	Le produit vectoriel	17
2	Les matrices	21
2.1	Introduction	21
2.2	Addition et soustraction de matrices	21
2.3	Multiplication par un scalaire	22
2.4	Multiplication de matrices	22
2.5	L'inverse d'une matrice	24
2.6	La transposé	25
2.7	Le déterminant (cas 2×2)	26
3	Les systèmes d'équations linéaires	29
3.1	Introduction	29
3.2	Méthode de Gauss : généralité	30
3.3	Le rang et le théorème de Rouché-Fontené	31
3.4	Méthode de Gauss : Solution unique	32
3.5	Méthode de Gauss : Infinité de solutions	33
3.6	Méthode de Gauss-Jordan	34
3.7	Calcul de la matrice inverse	35
3.8	Résolution des SEL par la matrice inverse	36
3.9	Indépendance linéaire	37
3.10	Sous-espaces vectoriels	39
3.11	Ensembles générateurs	42
3.12	Base et dimension	44
3.13	Noyau et image	49
3.14	Théorème du rang	50
3.15	Méthode de Cramer (cas 2×2)	53
3.16	Application : Le modèle de Leontief	54
3.17	Application : Le problème des moindres carrés	58

4	Le déterminant	63
4.1	Introduction	63
4.2	Le déterminant (cas général)	63
4.3	Déterminant et produit vectoriel	65
4.4	Théorème de la matrice inverse	65
4.5	Calcul de la matrice inverse	66
4.6	Aire et volume	67
4.7	La méthode de Cramer (Le cas général)	68
4.8	Propriétés des déterminants	69
4.9	Opérations sur les lignes pour le calcul du déterminant	70
5	Les droites et les plans	73
5.1	Les droites dans $\mathbb{R}^2$	73
5.2	Les droites dans $\mathbb{R}^3$	80
5.3	Les plans dans $\mathbb{R}^3$	83
6	Factorisations et moindres carrés	87
6.1	La factorisation LU	87
6.2	Valeurs et vecteurs propres	90
6.3	Gram-Schmidt et la factorisation QR	94
	Appendice 1 : Méthodes élémentaires pour la résolution des SEL	97
	Appendice 2 : Les espaces vectoriels généraux	101
	Bibliographie	102

Chapitre 1

Les vecteurs

1.1 Introduction

Depuis le début de vos études élémentaires, vous avez eu l'habitude de travailler avec des quantités que l'on appelle scalaire. Il s'agit de simple nombre dépourvu de direction. On considère habituellement un scalaire comme étant un nombre réel, mais il peut aussi s'agir de nombre complexe (ou plus généralement d'élément d'un corps quelconque). Par contre, dans la vie courante, plusieurs valeurs sont directement lié à une direction particulière. Par exemple, nous pouvons dire qu'une voiture roule à 100 km/h, il s'agit alors d'un scalaire, par contre en pratique nous sommes beaucoup plus intéressé à savoir que la voiture roule à 100 km/h dans la direction est. Il s'agira alors d'un vecteur. C'est à dire d'une quantité associé à une direction.

On aura donc que des quantités tel qu'un prix, l'âge de quelqu'un ou la grandeur d'une personne seront des scalaires, alors qu'une vitesse, une force ou le poids (ne pas confondre avec la masse) d'une personne seront des vecteurs.

De façon général, un vecteur est un élément d'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est habituellement choisi comme étant l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$) ou l'ensemble des nombres complexes ($\mathbb{C}$). Vous trouverez la définition d'un espace vectoriel en appendice.

Dans ce cours, nous n'allons cependant pas étudier les espaces vectoriel dans toute leur généralité, et nous allons nous concentrer sur un espace vectoriel particulier, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Notez cependant que le cas général sera étudié dans le cours MATH-2091 : Algèbre linéaire II, si vous choisissez de le prendre.

Pour le cours MATH-1301 : Géométrie vectoriel et algèbre linéaire, nous allons donc définir un vecteur comme étant un objet ayant :

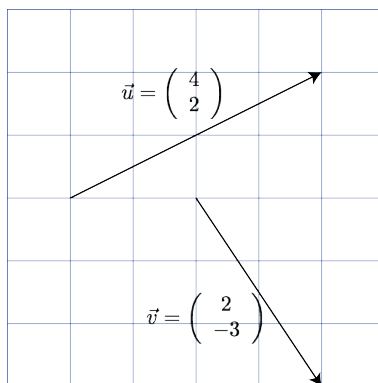
1. une longueur
2. une orientation

Géométriquement, nous allons se représenter un vecteur comme étant une flèche (dans le plan, dans l'espace, ou même dans un espace de dimension plus grande que 3. Algébriquement, nous dirons qu'un vecteur est un élément $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, et nous écrirons

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Où n représente le nombre de composante dans le vecteur. Remarquez que nous écrivons nos vecteurs par une lettre surmonté d'une petite flèche (Dans certain manuel, on utilise plutôt une lettre écrit en caractère gras). De plus, nos vecteurs seront toujours écrit à la vertical. Remarquez qu'un vecteur n'a pas de position fixe. Seul sa longueur et sa direction sont importantes.

Définir un vecteur algébriquement ou géométriquement est bien sur équivalent, et nous pouvons facilement passer de l'un à l'autre comme l'illustre la figure ci dessous :



Parmi tous les vecteurs, certains portent un nom particulier. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, nous définissons les vecteurs suivant :

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, nous définissons les vecteurs suivant :

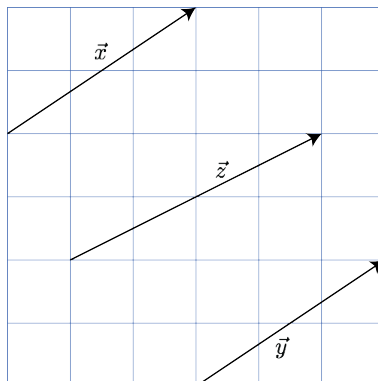
$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et finalement dans l'espace $\mathbb{R}^n$, nous définissons le vecteur $\vec{0}$ comme étant un vecteur contenant uniquement des 0, et le vecteur $\vec{e}_i$ comme étant le vecteur contenant des 0 partout, sauf à la i -ième composante où il y a un 1.

En géométrie, il est commun de décrire un vecteur à partir de son point d'origine, et son point servant d'extrémité. Un vecteur allant d'un point A vers un point B pourra donc être écrit à l'aide de la notation $\vec{AB}$. Rappelez-vous cependant qu'un vecteur n'a pas de position fixe. Malgré que A et B soient des points fixes, déplacer le vecteur $\vec{AB}$ à un autre endroit ne change absolument rien.

1.2 Égalité de vecteurs

Géométriquement, on dit que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, s'ils ont la même longueur et la même direction. Dans ce cas, nous écrirons $\vec{u} = \vec{v}$. Dans la figure ci dessous, nous avons donc $\vec{x} = \vec{y}$, et $\vec{x} \neq \vec{z}$.



Algébriquement, deux vecteurs sont égaux s'ils ont le même nombre de composante, et que chacune des composantes sont égales. Par exemple, nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.1. Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels nous avons :

$$\begin{pmatrix} 2x+5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Comme nous avons que $4 = 4$, pour que les deux vecteurs soient égaux nous devons donc avoir

$$2x + 5 = 3x + 2 \implies x = 3$$

1.3 Addition et soustraction de vecteurs

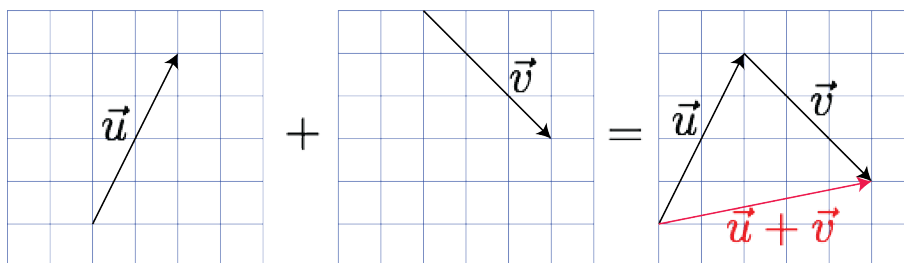
Algébriquement, on définit l'addition et la soustraction de deux vecteurs ayant le même nombre de composante (i.e. même dimension) en additionnant ou soustrayant composante par composante. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

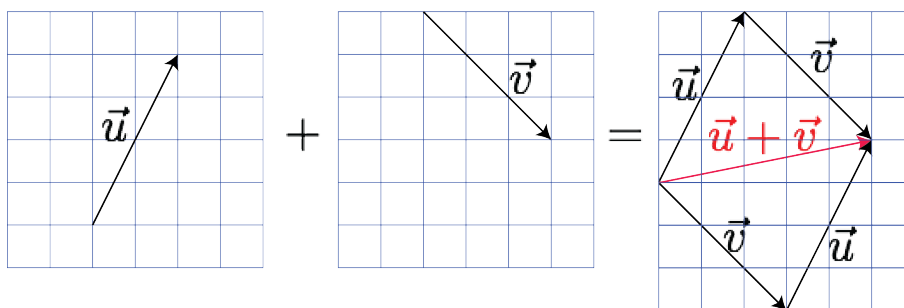
Remarquez que l'addition et la soustraction ne sont pas définies lorsque les vecteurs n'ont pas le même nombre de composante.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{n'est pas définie}$$

Géométriquement, on additionne deux vecteurs en les plaçant bout à bout, comme l'illustre la figure ci dessous. On appelle cette méthode la méthode du triangle.



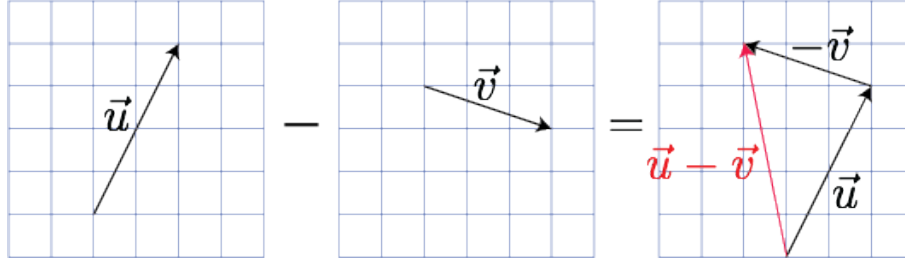
Alternativement, de manière géométrique, nous pouvons aussi définir la somme de deux vecteurs par la méthode du parallélogramme en plaçant les deux vecteurs à la même origine et en complétant le parallélogramme. La diagonale principale du parallélogramme est la somme des deux vecteurs.



La soustraction se définit de manière analogue. Premièrement, si $\vec{u}$ est un vecteur, alors on définit le vecteur $-\vec{u}$ comme étant un vecteur de même longueur, mais de direction opposée. On peut alors définir

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

On peut alors utiliser la méthode du triangle ou du parallélogramme pour dessiner la différence entre les deux vecteurs.



Si vous appliquer un principe semblable avec la méthode du parallélogramme, vous allez remarquer que la différence correspond à la seconde diagonale du parallélogramme (la première étant la somme).

On remarque alors que si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs tel que :

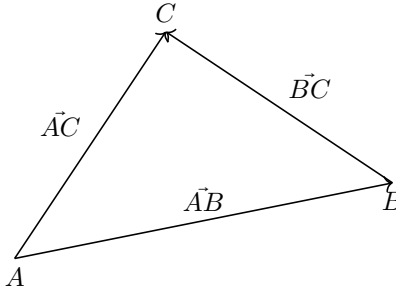
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \text{ alors } \vec{w} - \vec{u} = \vec{v}$$

tel que nous nous en attendions. Nous allons maintenant regarder ce qui se passe lorsque les vecteurs sont écrit à partir de point du plan ou de l'espace.

Théorème 1.3.1. (Relation de Chasles) Si A, B et C sont trois points, alors :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Démonstration. Il suffit de dessiner des points A, B et C , puis de remarquer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ seront alors bout à bout. En appliquant la définition géométrique de la somme, on obtient donc que la somme de ces deux vecteurs sera donné par le vecteur allant de du point de départ du premier, au point d'arriver du second. Dans le cas présent, la somme sera donc $\vec{AC}$.



□

Cette relation est particulièrement utile dans le domaine de la géométrie. Pour conclure cette section, nous allons maintenant énoncer certaines propriétés élémentaires de l'addition et de la soustraction des vecteurs.

Théorème 1.3.2. L'addition de vecteur satisfait les propriétés suivantes :

1. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
3. Si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, alors $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{z} + (\vec{y} + \vec{x})$.
4. Il existe un vecteur $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
5. Pour chaque $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe un vecteur $(-\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

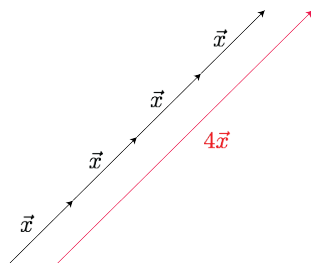
Notez que le vecteur $\vec{0}$ dans le théorème précédent est le vecteur ayant des 0 dans chacune de ses composantes.

1.4 Multiplication par un scalaire

Dans les sections précédente, nous avons introduit la notion de vecteur. Il est maintenant temps de parler de scalaire. Dans le contexte de notre cours, un scalaire n'est rien d'autre qu'un nombre réel. Dans le contexte des espaces vectoriel abstrait, un scalaire sera défini comme étant un élément du corps $\mathbb{K}$

La multiplication par un scalaire est une opération qui prend en entrée un scalaire et un vecteur et qui nous donne un vecteur comme réponse. Nous dénotons la multiplication par un scalaire à l'aide d'aucun symbole. Les symboles $\cdot$ et $\times$ seront utilisés plus tard pour d'autre forme de multiplication.

Géométriquement, si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit le vecteur $\lambda\vec{x}$ comme étant un vecteur dans la même direction que $\vec{x}$ et de λ fois sa longueur. La figure ci dessous illustre le principe.



Algébriquement, la multiplication par un scalaire consiste à multiplier chacune des composantes d'un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Exemple 1.4.1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ nous avons :

$$5 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.4.2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ nous avons :

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Dans certaine discipline, incluant en particulier la physique et le génie, il est commun d'écrire les vecteurs en termes des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$. Il est donc commun de voir par exemple dans $\mathbb{R}^2$ la notation $3\vec{i} + 5\vec{j}$ à la place de $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ceci est justifié en faisant deux multiplications par un scalaire, suivi d'une simple addition de vecteurs. Dans le cas présent, nous avons donc :

$$3\vec{i} + 5\vec{j} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

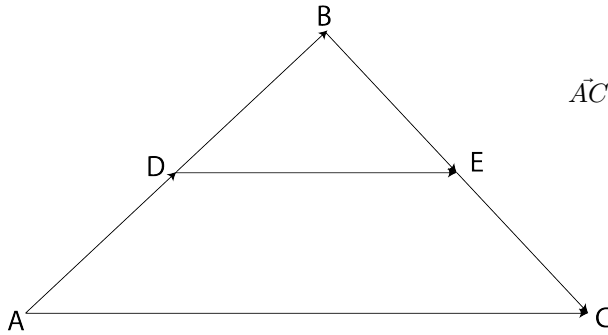
Nous allons maintenant énoncé certaine propriétés de la multiplication par un scalaire.

Théorème 1.4.1. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors nous avons les propriétés suivantes :

1. $\lambda \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
2. $1\vec{x} = \vec{x}$
3. $\lambda(\mu \vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$
4. $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
5. $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

Nous allons maintenant voir une application de ce que nous avons vu jusqu'à présent à un problème de géométrie.

Exemple 1.4.3. Démontrer que dans un triangle ABC, le segment joignant le milieu du segment AB et le milieu du segment BC est parallèle au segment AC, et est exactement la moitié de sa longueur. Voici une figure qui illustre le problème :

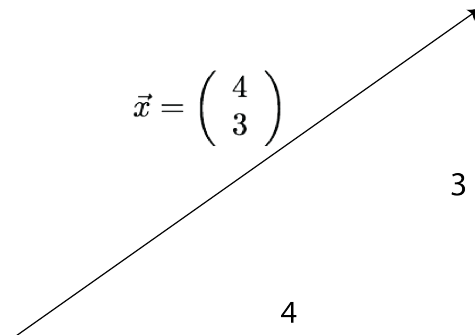


$$\begin{aligned}
 \vec{AC} &= \vec{AB} + \vec{BC} \\
 &= \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{BE} + \vec{EC} \\
 &= 2\vec{DB} + 2\vec{BE}, \quad \text{car } \vec{AD} = \vec{DB} \text{ et } \vec{BE} = \vec{EC} \\
 &= 2(\vec{DB} + \vec{BE}) \\
 &= 2\vec{DE}
 \end{aligned}$$

On a donc obtenu que $\vec{AC} = 2\vec{DE}$, ou de manière équivalente : $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. C'est à dire que $\vec{AC}$ et $\vec{DE}$ sont dans la même direction (i.e. parallèle), et DE est la moitié de la longueur de AC , ce qui est exactement ce que nous devons démontrer.

1.5 La norme d'un vecteur

Géométriquement, la norme d'un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, que l'on dénote par $\|\vec{x}\|$ est tout simplement sa longueur. Algébriquement, nous pouvons calculer sa longueur à l'aide du théorème de Pythagore.



$$\|\vec{x}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

De manière général, nous aurons donc :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}$$

Exemple 1.5.1. Calculer la norme du vecteur $\vec{x}$ ci dessous :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Définition 1.5.1. Un vecteur $\vec{x}$ est dit unitaire si $\|\vec{x}\| = 1$.

Théorème 1.5.1. Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors on peut trouver un vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ unitaire qui est dans la même direction que $\vec{x}$ en calculant :

$$\vec{y} = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x}$$

On dit alors que $\vec{y}$ est la normalisation du vecteur $\vec{x}$.

Exemple 1.5.2. On veut trouver un vecteur de longueur 3 dans la même direction que le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour ce faire, commençons par normaliser le vecteur, ce qui nous donne :

$$\vec{y} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Maintenant, il suffit de multiplier ce vecteur par 3 pour obtenir un vecteur dans la même direction que l'original, mais de longueur 3. On a donc :

$$3\vec{y} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Nous allons compléter cette section avec quelques propriétés de la norme d'un vecteur.

Théorème 1.5.2. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. $\|\vec{x}\| \geq 0$
2. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
4. $\|\vec{x}\| = 0$ si et seulement si $\vec{x} = \vec{0}$.

1.6 Le produit scalaire

Le produit scalaire est une opération qui permet d'associer à deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ un scalaire. On dénote le produit scalaire à l'aide d'un point « $\cdot$ ». Algébriquement, nous définissons le produit scalaire comme étant :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n$$

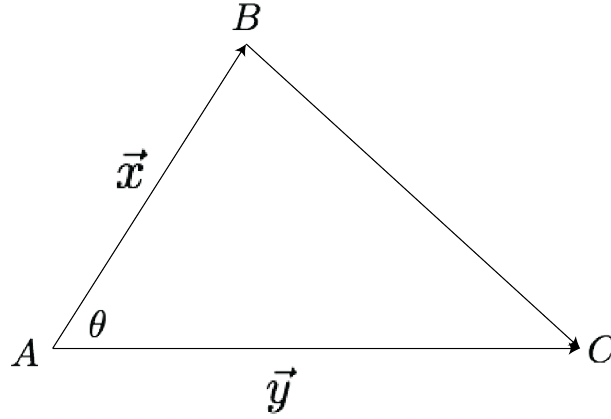
Nous allons maintenant essayer d'interpréter géométriquement le produit scalaire.

Théorème 1.6.1. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Démonstration.



En commençant avec la loi des cosinus (aussi appelé théorème d'Al Kashi) on obtient :

$$\begin{aligned} (BC)^2 &= (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC) \cos(\theta) \\ \implies (AB)(AC) \cos(\theta) &= \frac{1}{2} [(AB)^2 + (AC)^2 - (BC)^2] \\ \implies \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta) &= \frac{1}{2} [\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{y} - \vec{x}\|^2] \\ \implies \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta) &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right) \right] \\ \implies \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta) &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2x_i y_i + x_i^2) \right) \right] \\ \implies \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2x_i y_i \\ \implies \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \implies \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta) &= \vec{x} \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

□

Application du produit scalaire en physique mécanique : Une application du produit scalaire en physique est donné par le calcul du travail W effectué par une force $\vec{F}$ ayant effectué un déplacement $\vec{d}$. Dans ce cas, nous avons la relation :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

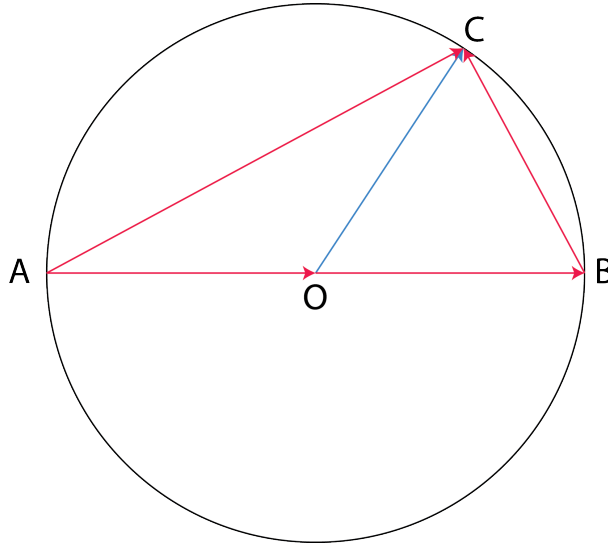
Nous allons maintenant regarder quelques propriétés du produit scalaire :

Théorème 1.6.2. Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, et $c \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$.
2. $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$.
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.
6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaire.

Finalement, compléter cette section, nous allons voir une application du produit scalaire en géométrie.

Exemple 1.6.1. Démontrer que dans un cercle ayant pour diamètre AB , alors l'angle formé entre les segments AC et BC , où C est un point quelconque du cercle, est toujours un angle droit.



Remarquons premièrement que comme O est le centre du cercle, alors $\vec{AO} = \vec{OB}$. De plus, les 3 rayons sur la figure doivent avoir la même longueur. On a donc :

$$\|\vec{AO}\| = \|\vec{OB}\| = \|\vec{OC}\|$$

Maintenant, pour vérifier si l'angle entre les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$ est bien un angle droit, nous allons devoir calculer le produit scalaire entre ces deux vecteurs.

$$\begin{aligned}
 \vec{AC} \cdot \vec{BC} &= (\vec{AO} + \vec{OC}) \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) \\
 &= \vec{AO} \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) + \vec{OC} \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) \\
 &= \vec{AO} \cdot \vec{BO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} + \vec{OC} \cdot \vec{BO} + \vec{OC} \cdot \vec{OC} \\
 &= -\vec{AO} \cdot \vec{AO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} - \vec{OC} \cdot \vec{AO} + \vec{OC} \cdot \vec{OC} \\
 &= -\vec{AO} \cdot \vec{AO} + \vec{OC} \cdot \vec{OC} \\
 &= -\|\vec{AO}\|^2 + \|\vec{OC}\|^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Comme le produit scalaire est 0, on peut donc conclure qu'il s'agit bien d'un angle droit.

1.7 Angle entre deux vecteurs

Dans la section précédente, nous avons vu que si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs. Nous pouvons maintenant utiliser ce résultat pour calculer l'angle entre les deux vecteurs. Nous avons donc :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

Exemple 1.7.1. On veut trouver l'angle entre les deux vecteurs suivants :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Par la formule précédente, nous avons donc :

$$\cos(\theta) = \frac{(1)(3) + (2)(4)}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{\sqrt{125}}$$

On obtient donc finalement que :

$$\theta = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{125}}\right) \approx 10,3 \text{ degrés}$$

Définition 1.7.1. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors on dit que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont :

1. orthogonaux s'ils sont perpendiculaires, c'est à dire si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.
2. orthonormaux s'ils sont perpendiculaires et unitaires, c'est à dire si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ et $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$

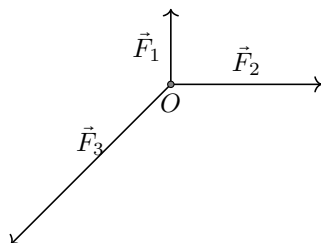
En physique mécanique, les forces appliquées sur un objet sont représenté par des vecteurs. L'unité de mesure pour la norme de la force est mesuré en Newton. Une condition nécessaire pour qu'un objet puisse être au repos est que la somme des forces appliquées sur un objet soit égal au vecteur $\vec{0}$, ce que l'on écrit :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Lorsque la somme des forces n'est pas $\vec{0}$, l'objet subira une accélération. Dans ce cas, pour étudier le mouvement de l'objet, nous sommes intéressés à connaître la force résultante. En même temps, nous sommes intéressés à la force opposée, que l'on appelle force équilibrante, et qui est la force nécessaire d'ajouter au système pour qu'il soit au repos. On définit donc les termes suivants :

- La **force résultante** est la somme des forces appliquées sur un objet.
- La **force équilibrante** est la force que l'on doit ajouter au système pour que la somme des forces soient $\vec{0}$. Il s'agit d'une force de même longueur que la force résultante, mais de direction opposée.

Exemple 1.7.2. Un objet placé à l'origine O est soumis à trois forces. Une force $\vec{F}_1$ de 1 Newton dans la direction nord, une force $\vec{F}_2$ de 2 Newton dans la direction est, et une force $\vec{F}_3$ de 3 Newton dans la direction sud-ouest. Trouver quelle est la force résultante et la force équilibrante de ce système.



À partir des informations fournies, il est facile de déterminer que $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour trouver le vecteur $\vec{F}_3$, deux approches sont possibles. Comme première approche, on peut remarquer que $\vec{F}_3$ est un vecteur de longueur 3 dans la même direction que le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\vec{F}_3 = \frac{3}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ -3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Une deuxième approche pour trouver ce même vecteur consiste à supposer premièrement que $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La condition qu'il s'agit d'une force de 3 Newton nous permet d'obtenir l'équation suivante :

$$\|\vec{F}_3\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3$$

Ensuite, comme il est dans la direction sud-ouest, il doit former un angle de -135 degré avec le vecteur $\vec{F}_2$. Par la formule permettant de calculer l'angle entre deux vecteurs, on obtient donc :

$$\cos(-135) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{2 \cdot 3} = \frac{2x}{6} = \frac{x}{3} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

Maintenant, en revenant à l'équation pour la norme, on obtient :

$$9 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + y^2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{9 - \frac{9}{2}} = \pm \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

Pour déterminer le signe de y , on doit utiliser le schéma, ce qui nous permet facilement de déterminer qu'il doit être négatif. On obtient donc à nouveau $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ -3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Cherchons maintenant la force résultante $\vec{F}_r$. On a donc :

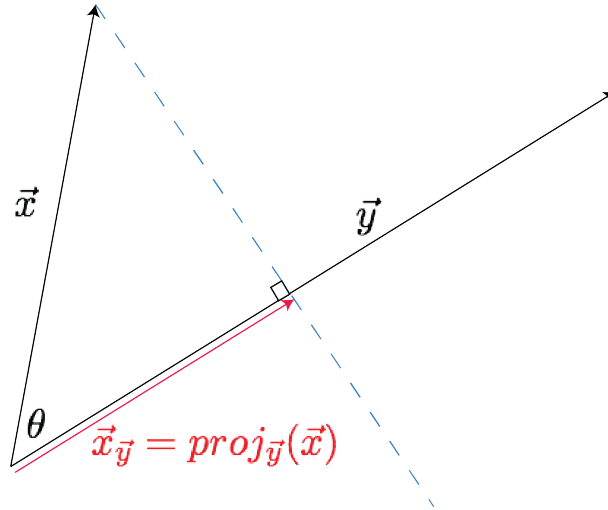
$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ -3/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3/\sqrt{2} \\ 1 - 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,121 \\ -1,121 \end{pmatrix}$$

Ce qui correspondant à une force d'environ $\sqrt{(-0,121)^2 + (-1,121)^2} = 1,128$ Newton. Pour ce qui est de la force équilibrante, elle sera de même longueur que la force résultante, mais dans la direction opposé. Il nous suffit donc de changer les signes, ce qui nous donne :

$$\vec{F}_e = \begin{pmatrix} -2 + 3/\sqrt{2} \\ -1 + 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,121 \\ 1,121 \end{pmatrix}$$

1.8 La projection orthogonale

Supposons que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Nous définissons la projection orthogonale du vecteur $\vec{x}$ sur le vecteur $\vec{y}$, dénoté $\vec{x}_{\vec{y}}$, comme étant un vecteur dans la même direction que $\vec{y}$ et perpendiculaire à $(\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}})$, comme l'illustre la figure ci-dessous. Notez que la projection orthogonale est parfois aussi dénoté par $proj_{\vec{y}}(\vec{x})$.



Pour calculer la projection, commençons par calculer l'angle θ . On a donc :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

de plus, en trigonométrie, vous avez appris que $\cos = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$, ce qui nous donne :

$$\cos(\theta) = \frac{\|\vec{x}_y\|}{\|\vec{x}\|}$$

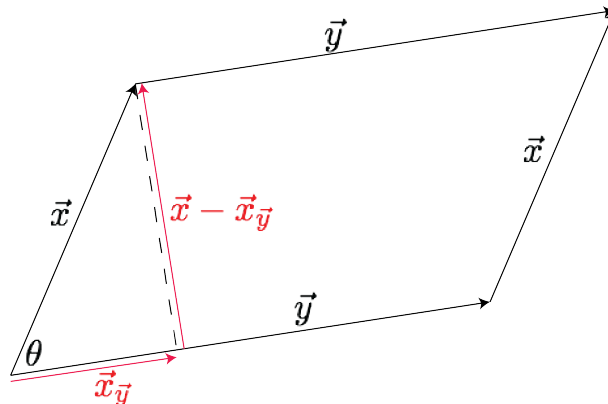
En comparant c'est deux équations, on obtient donc :

$$\|\vec{x}_y\| = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|}$$

Nous avons donc trouver la longueur de la projection. Comme sa direction est la même que celle de $\vec{y}$ par définition, alors il s'agit maintenant de multiplier la longueur de la projection obtenu, par la normalisation du vecteur $\vec{y}$, ce qui nous donne finalement :

$$\vec{x}_y = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y}$$

Exemple 1.8.1. Calculer l'aire d'un parallélogramme ayant pour côté les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.



Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}^2 &= \|\vec{y}\|^2 \|\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}\|^2 \\
&= \|\vec{y}\|^2 (\|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}_{\vec{y}}\|^2) \quad \text{Par le théorème de Pythagore} \\
&= \|\vec{y}\|^2 \left(\|\vec{x}\|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^4} \|\vec{y}\|^2 \right) \\
&= \|\vec{y}\|^2 \left(\|\vec{x}\|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^2} \right) \\
&= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2
\end{aligned}$$

Ce qui est valide pour n'importe quel parallélogramme, peut importe dans un espace à combien de dimension on se trouve. En particulier, s'il s'agit d'un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$ avec $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}^2 &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \\
&= (x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2) - (x_1^2 y_1^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_2^2) \\
&= x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 \\
&= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2
\end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\text{Aire} = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

Remarquez que la valeur absolue est nécessaire pour garantir que l'aire est une valeur positive.

La formule pour l'aire du parallélogramme que nous venons de calculer joue un rôle particulièrement important en algèbre linéaire. Nous allons revoir cette équation dans un contexte différent dans la résolution des systèmes d'équations linéaires à 2 équations et 2 inconnus, puis nous allons l'utiliser pour définir le déterminant d'une matrice 2×2 .

1.9 Le produit vectoriel

Nous allons maintenant étudier le produit vectoriel. Il s'agit d'une opération qui n'est définie que pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Supposons que $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Nous voulons construire un vecteur $\vec{z}$ qui est perpendiculaire à $\vec{x}$ et à $\vec{y}$. On a donc :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0 \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0 \end{cases}$$

Maintenant, en multipliant la première équation par y_1 et la seconde équation par x_1 , nous obtenons :

$$\begin{cases} x_1 y_1 z_1 + x_2 y_1 z_2 + x_3 y_1 z_3 = 0 \\ x_1 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_2 + x_1 y_3 z_3 = 0 \end{cases} \implies (x_2 y_1 - x_1 y_2) z_2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_3 = 0$$

On obtient donc :

$$(x_3 y_1 - x_1 y_3) z_3 = (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_2$$

Nous cherchons une solution pour z_1, z_2 et z_3 . Bien sur, cette dernière équation nous donne un infinité de solution. Nous allons donc devoir en choisir une. Posons

$$z_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad \text{et} \quad z_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Maintenant pour calculer z_1 on va utiliser l'équation $x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
 x_1 z_1 &= -x_2 z_2 - x_3 z_3 \\
 &= -x_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) - x_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
 &= -x_2 x_3 y_1 + x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 \\
 &= x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2
 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$z_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

Nous allons donc définir le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ comme étant :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

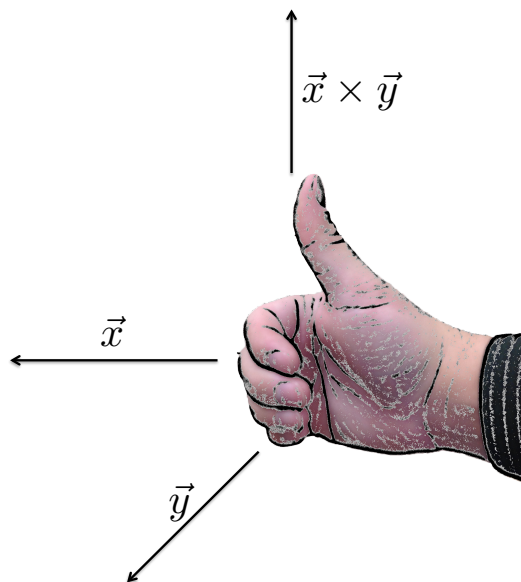
Nous allons maintenant voir que le produit vectoriel peut aussi être défini géométriquement

$$\begin{aligned}
 \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \sin^2(\theta) &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(1 - \cos^2(\theta)) \\
 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \left(1 - \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)} \right) \\
 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \\
 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\
 &= \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2
 \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\vec{x} \times \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin(\theta) \vec{n}$$

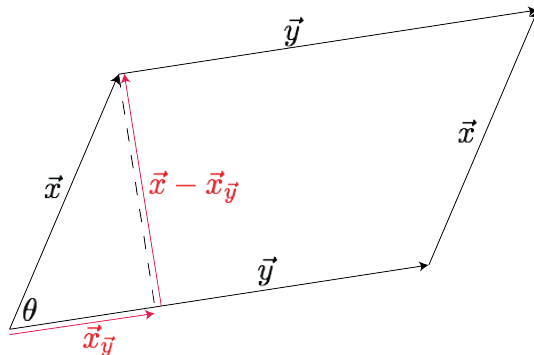
où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire qui est perpendiculaire à $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Remarquez qu'il y a deux vecteurs qui sont à la fois perpendiculaire à $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Le choix de $\vec{n}$ va donc dépendre de la règle de la main droite.



La règle de la main droite nous dit que pour trouver la direction du vecteur normal et unitaire $\vec{n}$ on doit placer notre main droite de sorte que lorsque notre main est ouverte, nos doigts pointent dans la direction du vecteur $\vec{x}$, et lorsque nous replions nos doigts, ils pointent dans la direction du vecteur $\vec{y}$. La direction

de notre pouce indiquera alors la direction du vecteur $\vec{n}$ (donc la direction du vecteur $\vec{x} \times \vec{y}$). Attention à ne pas confondre vos deux mains. Il est essentiel que vous preniez votre main DROITE pour que la méthode fonctionne. Si vous prenez votre main gauche, vous obtiendrez un vecteur dans la direction opposée.

Le produit vectoriel peut être utilisé pour calculer l'aire d'un parallélogramme dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple, si nous souhaitons trouver l'aire du parallélogramme ci dessous.



$$\text{Aire} = \|\vec{y}\| \|\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}\| = \|\vec{y}\| \|\vec{x}\| \sin(\theta) = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$$

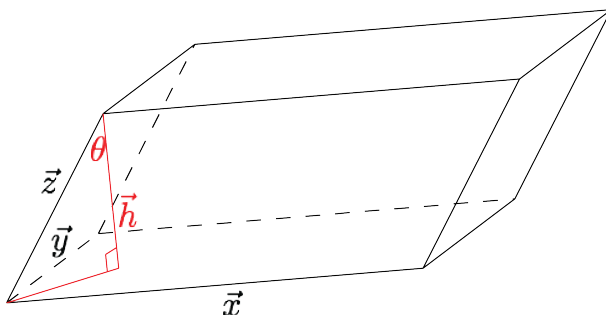
Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 1.9.1. L'aire d'un parallélogramme (dans $\mathbb{R}^3$) engendré par des vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ est donné par :

$$\text{Aire} = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$$

Le produit vectoriel combiné avec le produit scalaire peut être utilisé pour calculer le volume d'un parallélépipède. Par exemple, essayons de calculer le volume du parallélépipède ci dessous. Pour ce faire, nous devons calculer :

$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$



L'aire de la base n'est pas très difficile à trouver. Comme la base est un parallélogramme, nous pouvons utiliser la formule que nous avons vu précédemment.

$$\text{Aire de la base} = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$$

La hauteur (que nous noterons $\vec{h}$) est un peu plus difficile à trouver. Remarquons cependant que la hauteur doit être perpendiculaire à la base, ce qui signifie que la hauteur doit être perpendiculaire à $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Nous allons donc chercher la longueur du vecteur $\vec{h}$. Un peu de trigonométrie nous donne :

$$\|\vec{h}\| = \|\vec{z}\| \cos(\theta)$$

Où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{h}$ et $\vec{z}$. Comme le vecteur $\vec{h}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, le vecteur $\vec{h}$ doit donc être dans la même direction que $\vec{x} \times \vec{y}$ ou dans la direction opposée. Nous avons donc que θ est l'angle formé entre $\vec{z}$ et $\vec{x} \times \vec{y}$. On obtient donc :

$$\text{Volume} = \|\vec{h}\| \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x} \times \vec{y}\| \|\vec{z}\| |\cos(\theta)| = |(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}|$$

Remarquez que la valeur absolue est nécessaire, car nous ne savons pas si $\vec{h}$ est dans la même direction que $\vec{x} \times \vec{y}$, ou dans la direction opposée, ce qui change le signe de $\cos(\theta)$, mais pas la valeur absolue. Nous allons maintenant réécrire ce que nous venons de démontrer sous forme d'un théorème.

Théorème 1.9.2. Le volume d'un parallélépipède engendré par des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ est donné par la formule :

$$\text{Volume} = |(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}|$$

Nous allons maintenant compléter cette section en énonçant certaines propriétés du produit vectoriel.

Théorème 1.9.3. Supposons que $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a les propriétés suivantes :

1. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z})$
2. $\lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = (\lambda\vec{x}) \times \vec{y}$
3. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
4. $\vec{x} \times \vec{y}$ est orthogonal à $\vec{x}$ et à $\vec{y}$.

Notez cependant que le produit vectoriel n'est en général pas associatif. Ce qui signifie qu'en général nous avons :

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \neq (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$$

notez cependant que dans certains cas, il est possible d'avoir l'égalité.

Chapitre 2

Les matrices

2.1 Introduction

Les matrices sont des tableaux de nombres nous permettant de simplifier l'étude des fonctions linéaires, et comme nous le verrons dans le prochain chapitre, l'étude des systèmes d'équations linéaires. Une fonction linéaire est une fonction $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour laquelle

$$f(0) = 0$$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

Par exemple, la fonction ci dessous est un fonction linéaire :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 5z \\ -3x + 4y + 10z \\ x + 5y + 12z \end{pmatrix}$$

Les matrices vont nous permettre de séparer les constantes des variables. Nous allons donc écrire la fonction sous la forme suivante à la place.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nous avons donc écrit la fonction comme étant le produit d'une matrice par un vecteur. En particulier, remarquer que les vecteurs sont des matrices ayant une seule colonne. Dans ce chapitre, nous allons traduire les différentes opérations sur les fonctions dans le langage des matrices.

Si A est une matrice, nous dirons que A est de dimension $m \times n$ si la matrice A a exactement m lignes et n colonnes. Dans ce cas, nous écrirons $A_{m \times n}$. Nous allons habituellement (même si ce n'est pas obligatoire) dénoté une matrice par une lettre majuscule. Nous dénoterons habituellement les éléments de la matrice par la lettre correspondante en minuscule avec des indices. Nous aurons donc par exemple :

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

2.2 Addition et soustraction de matrices

L'addition et la soustraction de matrice se fait de manière similaire à l'addition et la soustraction de vecteur. On effectue l'opération en additionnant (ou soustrayant) composante par composante. Remarquez que ces opérations sont définies seulement pour des matrices ayant la même dimension. C'est à dire ayant le même nombre de colonnes et le même nombre de lignes. Voici quelques exemples illustrant l'idée :

Exemple 2.2.1.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} =$ n'est pas définie

Le théorème ci dessous donne une liste de propriétés de l'addition et la soustraction de matrice.

Théorème 2.2.1. Si A, B et C sont des matrices de dimension $m \times n$, et 0 est la matrice de dimension $m \times n$ contenant uniquement des 0. Alors on a :

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = 0 + A = A$
4. $A - A = 0$

2.3 Multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire est aussi très semblable dans le cas des matrices que celui des vecteurs. Il s'agit de multiplier chacune des composantes de la matrice par le scalaire. La dimension de la matrice obtenu sera donc la même que celle de la matrice originale.

Exemple 2.3.1.

1. $2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$
2. $5 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 25 & 10 & 15 \end{pmatrix}$

Le théorème ci dessous nous donne quelques propriétés de la multiplication par un scalaire :

Théorème 2.3.1. Si A et B sont des matrices de même dimension, et 0 la matrice de même dimension que A et B qui contient uniquement des 0, alors :

1. $0A = 0$
2. $1A = A$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2.4 Multiplication de matrices

La multiplication de matrice est plus difficile à définir. Pour pouvoir le faire, nous allons devoir nous rappeler qu'une matrice n'est en fait rien d'autre qu'une représentation d'une fonction linéaire. Dans ce cas,

la multiplication de matrice n'est en fait rien d'autre que la composition de fonction. Commençons par un exemple simple qui nous a permis de définir ce qu'est une matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1) + 2(2) + 3(3) \\ 4(1) + 5(2) + 6(3) \\ 7(1) + 8(2) + 9(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Le cas général est en fait très semblable, mais commençons d'abord avec des fonctions. Supposons que nous avons deux fonctions : $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie comme suit :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \text{ et } g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ex + fy \\ gx + hy \end{pmatrix}$$

et supposons que nous voulons calculer $f \circ g$. On a donc :

$$\begin{aligned} (f \circ g) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f \left(g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= f \begin{pmatrix} ex + fy \\ gx + hy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(ex + fy) + b(gx + hy) \\ c(ex + fy) + d(gx + hy) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ae + bg)x + (af + bh)y \\ (ce + dg)x + (cf + dh)y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans le langage des matrices, cela nous donnera :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

En utilisant la même idée pour des matrices d'autres dimensions, on remarque donc que si A et B sont des matrices de dimension $m \times n$ et $p \times q$, alors le produit AB est définie seulement lorsque $n = p$. Dans ce cas, la dimension de la matrice AB est $m \times q$. Supposons dans que le produit AB existe, et appelons le par la lettre C . Nous définirons alors :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

C'est à dire que nous calculons la composante c_{ij} en calculant le produit scalaire de la i -ème ligne de la matrice A avec la transposer de la j -ème colonne de la matrice B . Ceci peut sembler particulièrement étrange à première vu, par contre les chapitres suivants devrait vous convaincre qu'il s'agit bien de la meilleure façon de définir la multiplication de matrices.

Exemple 2.4.1.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & 18 \\ 84 & 69 & 54 \\ 138 & 114 & 90 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{n'est pas définie}$

En lien avec le produit de matrice, il y a une matrice (ou plus particulièrement, une matrice pour chaque entier ≥ 1) qui est particulièrement important. Il s'agit de la matrice identité. Si n est un entier, $n \geq 1$, alors on définit la matrice I_n comme étant une matrice de dimension $n \times n$ ayant des 0 partout, sauf des 1 sur la diagonale principale.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsque la dimension de la matrice est claire d'après le contexte, on écrira tout simplement I plutôt que I_n . L'importance de la matrice identité est qu'elle sert d'identité pour le produit de matrice. On aura donc :

$$AI = IA = A$$

pour toutes matrice A . Ici on suppose que la dimension de I est choisi de sorte que le produit soit bien définie.

Théorème 2.4.1. Si A, B et C sont des matrices pour lesquels les produits et sommes ci dessous sont définies, et k est un scalaire, alors le produit de matrices a les propriétés suivantes :

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

Attention : En général le produit de matrice n'est pas commutatif. C'est à dire qu'en général, si A et B sont des matrices, alors $AB \neq BA$. Par contre, dans certain cas particulier l'équation est satisfaite.

2.5 L'inverse d'une matrice

Dans cette section, nous allons nous intéressé à la question de trouver une matrice B pour laquelle $AB = I$ où A est une matrice connu. Si une telle matrice B existe, nous la dénoterons par A^{-1} . Nous allons donc faire la définition suivante :

Définition 2.5.1. Si A est une matrice carré, alors on appelle matrice inverse de A , et on la dénote A^{-1} une matrice tel que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

dans le cas où il n'existe aucune matrice A^{-1} ayant cette propriété, nous dirons que la matrice A n'est pas inversible.

Exemple 2.5.1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, on veut vérifier si la matrice A est inversible, et si elle l'est, on veut calculer son inverse. Pour ce faire, on doit trouver x, y, z, w tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en multipliant les matrices de gauche, nous obtenons alors :

$$\begin{pmatrix} x + 2z & y + 2w \\ 3x + 5z & 3y + 5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2w = 0 \\ 3x + 5z = 0 \\ 3y + 5w = 1 \end{cases}$$

Comme les équations 1 et 3 contiennent seulement des x et des z , et que les équations 2 et 4 contiennent seulement des y et w , on peut donc séparer le système en deux systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 5z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y + 2w = 0 \\ 3y + 5w = 1 \end{cases}$$

On obtient donc $x = -5$, $y = 2$, $z = 3$ et $w = -1$, ce qui nous donne la matrice :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous allons voir plus tard dans le cours que la matrice inverse joue un rôle très important en lien avec la résolution des systèmes d'équations linéaires et allons voir des façons plus efficaces de la calculer dans les deux chapitres suivants. Remarquez que la matrice inverse n'existe pas toujours. Certaines matrices n'ont pas d'inverse, un peu comme dans le cas des nombres réels, la division par zéro n'est pas possible.

Voici quelques propriétés de la matrice inverse :

Théorème 2.5.1. Si A et B sont des matrices inversibles, alors :

1. $I^{-1} = I$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. L'inverse d'une matrice est unique

2.6 La transposée

La transposée est une opération définie pour n'importe quelle matrices, et qui n'a malheureusement aucune correspondance avec les fonctions. Par contre, la simplicité de calculer la transposée en fait une opération particulièrement intéressante à étudier. Dans certains cas, elle peut aussi nous simplifier grandement la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Si A est une matrice, alors on définit la transposée, notée A^T , comme étant la matrice A pour laquelle on inverse les lignes et les colonnes de la matrice.

Exemple 2.6.1. Voici quelques exemples de transposée d'une matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarquez que A est une matrice de dimension $m \times n$, alors A^T est une matrice de dimension $n \times m$.

Définition 2.6.1. Si A est une matrice carrée pour laquelle $A^{-1} = A^T$, alors on dit que la matrice A est orthogonale.

Exemple 2.6.2. On veut montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. Pour

ce faire, il s'agit de vérifier que $A^T A = I$.

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice A est donc une matrice orthogonale.

Voici quelques propriétés de la transposé d'une matrice :

Théorème 2.6.1. Si A et B sont des matrices pour lesquels les produits et sommes ci dessous sont définies, et k est un scalaire, alors la transposé d'une matrice a les propriétés suivantes :

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$

2.7 Le déterminant (cas 2×2)

À chaque matrice carré, nous voulons maintenant définir un nombres réels que nous appellerons le déterminant. Mais comment définir le déterminant ? Quelle valeur choisir ?

Commençons par essayer de résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

En isolant y dans chacune des 2 équations, on obtient :

$$\begin{cases} y = \frac{e - ax}{b} \\ y = \frac{f - cx}{d} \end{cases}$$

Puis on égale les deux équations :

$$\begin{aligned} \frac{e - ax}{b} &= \frac{f - cx}{d} \Rightarrow d(e - ax) = b(f - cx) \\ &\Rightarrow de - adx = bf - bcx \\ &\Rightarrow (bc - ad)x = bf - de \\ &\Rightarrow x = \frac{bf - de}{bc - ad} \\ &\Rightarrow x = \frac{de - bf}{ad - bc} \end{aligned}$$

Puis on utilise cette valeur pour trouver y :

$$y = \frac{e - ax}{b} = \frac{e - a\left(\frac{de - bf}{ad - bc}\right)}{b} = \frac{(ad - bc)e - a(de - bf)}{b(ad - bc)} = \frac{ade - bce - ade + abf}{b(ad - bc)} = \frac{abf - bce}{b(ad - bc)} = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

On remarque que dans les deux cas, le dénominateur est $ad - bc$. Cette valeur doit donc être relativement importante en algèbre linéaire. Bien sur, la solution que nous avons trouver ci dessus est valable si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Maintenant, essayons de trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} ae + bg = 1 \\ af + bh = 0 \\ ce + dg = 0 \\ cf + dh = 1 \end{cases}$$

Rappelons qu'ici nous considérons a, b, c, d comme étant des constantes. Donc on peut diviser le système d'équations linéaires, en deux systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} ae + bg = 1 \\ ce + dg = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} af + bh = 0 \\ cf + dh = 1 \end{cases}$$

Ce qui nous donne les solutions suivantes :

$$e = \frac{d}{ad - bc}, \quad f = \frac{-b}{ad - bc}, \quad g = \frac{-c}{ad - bc}, \quad h = \frac{a}{ad - bc}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

en particulier, on remarque que la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Finalement, on se rappelle que si on a un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$ engendré par des vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

alors l'aire du parallélogramme est donnée par :

$$\text{Aire} = \text{abs}(ad - bc)$$

Donc la valeur de $ad - bc$ semble particulièrement importante. On va donc définir le déterminant d'une matrice 2×2 de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Remarquez la notation pour le déterminant d'une matrice. On utilise des barres verticales. Il ne faut pas confondre le déterminant d'une matrice avec la valeur absolue d'un nombre réel. Il s'agit de deux notions complètement différentes.

Exemple 2.7.1. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

Finalement, remarquez que le déterminant peut être définie pour n'importe quelle matrice carrée. Par contre, il faudra attendre au chapitre 4 avant de pouvoir définir le déterminant des matrices de plus grande dimension.

Chapitre 3

Les systèmes d'équations linéaires

3.1 Introduction

Un système d'équations linéaires est un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Vous avez déjà appris au secondaire quelques méthodes pour résoudre ce type de système, et c'est ce que nous avons utilisé dans les chapitres 1 et 2 pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Ces méthodes sont résumées en appendice.

Par contre, les méthodes que vous avez apprises au secondaire ne sont pas toujours très efficaces, en particulier lorsque le nombre d'équations ou d'inconnues est grand. Nous allons remédier à cette situation dans ce chapitre en étudiant d'autres techniques de résolutions des systèmes d'équations linéaires tel que les méthodes de Gauss, Gauss-Jordan, Cramer et de la matrice inverse.

Ces nouvelles méthodes auront un point en commun : l'utilisation des matrices. Nous allons donc réécrire le système d'équation ci haut sous forme matricielle (ce qui est toujours possible) :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Maintenant, nous allons simplifier un peu notre notation. Remarquez que dans nos calculs, le nom des variables n'a pas vraiment d'importance. Il n'est donc pas vraiment nécessaire de les écrire. On va donc écrire le système d'équations linéaires sous la forme :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

C'est ce qu'on appelle une matrice augmentée.

Théorème 3.1.1. Si $A\vec{x} = \vec{b}$ est un système d'équations linéaires, alors l'un des trois cas ci dessous est vrai :

1. Le système a une unique solution
2. Le système n'a aucune solution
3. Le système a une infinité de solutions

Il sera donc important dans ce chapitre d'être capable de traiter chacun de ces trois cas.

3.2 Méthode de Gauss : généralité

La méthode de Gauss est l'une des méthodes les plus efficaces pour résoudre un système d'équations linéaires. Pour utiliser la méthode, nous devons commencer par écrire le système sous forme de matrice augmentée, puis faire des opérations sur cette matrice jusqu'à ce que cette dernière soit sous forme échelon. Lorsque la matrice est sous forme échelon, il est alors facile de trouver l'ensemble des solutions (s'il y en a).

Definition 3.2.1. Une matrice est sous forme échelon si le nombre de zéro au début d'une ligne qui ne contient pas uniquement des zéros est toujours plus grand que le nombre de zéro au début de la ligne précédente. De plus, les lignes contenant uniquement des zéros doivent être au bas de la matrice.

Exemple 3.2.1. Les matrices suivantes sont sous forme échelon :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.2.2. Les matrices suivantes ne sont pas sous forme échelon :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La question est maintenant de savoir comment faire pour prendre la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires et la transformer sous forme de matrice augmentée.

Théorème 3.2.1. Si L_i représente la i -ème ligne d'une matrice augmentée, alors les opérations suivantes ne change pas l'ensemble des solutions :

1. $cL_i \rightarrow L_i$ où c est une constante différente de zéro
2. $L_i + cL_j \rightarrow L_i$ où c est une constante et $i \neq j$
3. $L_i \leftrightarrow L_j$
4. $aL_i + bL_j \rightarrow L_i$ où $i \neq j$ et a est une constante différente de zéro

Exemple 3.2.3. On veut transformer la matrice $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array} \right)$ sous forme de matrice échelon.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array} \right) \sim_{L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array} \right)$$

Exemple 3.2.4. On veut transformer la matrice $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array} \right)$ sous forme de matrice échelon.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array} \right) \sim_{L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array} \right) \sim_{L_3 - 7L_1 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & -6 & -12 & -58 \end{array} \right)$$

$$\sim_{L_3-2L_2 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

3.3 Le rang et le théorème de Rouché-Fontené

Definition 3.3.1. Si A est une matrice, alors on définit le rang de A (dénote $\text{rang}(A)$) comme étant le nombre de ligne non nul de la matrice A après qu'elle est été transformé sous forme échelon.

Théorème 3.3.1. Si A est une matrice, alors $\text{rang}(A)$ est bien définie. C'est à dire que peu importe les étapes que l'on suit pour transformé la matrice sous forme échelon, le nombre de ligne non nul sera toujours le même.

Si $A\vec{x} = \vec{b}$ est un système d'équations linéaires, alors on dit que A est la matrice des coefficients, et on dénote par $[A|\vec{b}]$ la matrice augmenté du système. Nous allons maintenant utiliser le concept de rang pour déterminer le nombre de solutions du système d'équations linéaires.

Théorème 3.3.2. (Rouché-fontené) Si A est une matrice de dimension $m \times n$ et $A\vec{x} = \vec{b}$ est un système d'équations linéaires tel que :

1. $\text{rang}([A|\vec{b}]) > \text{rang}(A)$ alors le système n'a aucune solution
2. $\text{rang}([A|\vec{b}]) = \text{rang}(A) = n$ alors le système a exactement une solution
3. $\text{rang}([A|\vec{b}]) = \text{rang}(A) < n$ alors le système a une infinité de solutions

Exemple 3.3.1. On veut savoir combien de solution le système d'équations linéaires suivant possèdent :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

On doit donc écrire le système sous forme de matrice augmenté, et la transformé sous forme échelon comme nous avons fait dans la section précédente. On obtient donc :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array} \right) \sim_{L_2-3L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array} \right)$$

On a donc :

$$\text{rang}([A|\vec{b}]) = \text{rang}(A) = 2$$

Le système a donc exactement une solution.

Exemple 3.3.2. On veut savoir combien de solution le système d'équations linéaires suivant possèdent :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 11 \\ 7x + 8y + 9z = 12 \end{cases}$$

On doit donc écrire le système sous forme de matrice augmenté, et la transformé sous forme échelon comme nous avons fait dans la section précédente. On obtient donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array} \right) \sim_{L_2-4L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array} \right) \sim_{L_3-7L_1 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & -6 & -12 & -58 \end{array} \right)$$

$$\sim^{L_3-2L_2 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On a donc :

$$\text{rang}([A|\vec{b}]) = \text{rang}(A) = 2 < 3$$

Le système a donc une infinité de solutions.

Exemple 3.3.3. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

Nous allons donc commencer par chercher combien de solution le système a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right) \sim^{L_2-2L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right) \sim^{L_3-3L_1 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim^{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On a donc :

$$\text{rang}([A|\vec{b}]) = 2 \quad \text{et} \quad \text{rang}(A) = 1$$

Comme c'est deux valeurs ne sont pas égales, alors le système n'a aucune solution.

3.4 Méthode de Gauss : Solution unique

Nous sommes maintenant prêt à compléter la résolution des systèmes d'équations linéaires lorsque ceux-ci admettent au moins une solution. Nous allons commencer par ceux ayant une solution unique, et dans la prochaine section nous traiterons de ceux ayant une infinité de solution.

Exemple 3.4.1. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 13 \\ 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim^{3L_2-4L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 13 \\ 0 & -26 & -52 \end{array} \right)$$

On peut donc vérifier qu'il y a bien exactement une solution. Il ne nous reste plus qu'à calculer cette solution. On commence donc par la dernière équation. On a donc :

$$-26y = -52 \Rightarrow y = 2$$

Puis on continue avec l'équation précédente :

$$3x + 5y = 13 \Rightarrow 3x + 5(2) = 13 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Exemple 3.4.2. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 16 \\ 2x + 5y - z = -11 \\ 3x - 2y + z = 20 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 16 \\ 2 & 5 & -1 & | & -11 \\ 3 & -2 & 1 & | & 20 \end{pmatrix} \sim_{L_2-2L_1 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 16 \\ 0 & -3 & -7 & | & -43 \\ 3 & -2 & 1 & | & 20 \end{pmatrix} \sim_{L_3-3L_1 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 16 \\ 0 & -3 & -7 & | & -43 \\ 0 & -14 & -8 & | & -28 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{3L_3-14L_2 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 16 \\ 0 & -3 & -7 & | & -43 \\ 0 & 0 & 74 & | & 518 \end{pmatrix}$$

On remarque donc que le système a exactement une solution. Pour calculer cette solution, on commence par la ligne du bas :

$$74z = 518 \Rightarrow z = 7$$

Puis on travaille avec la seconde équation :

$$-3y - 7(7) = -43 \Rightarrow -3y - 49 = -43 \Rightarrow -3y = 6 \Rightarrow y = -2$$

Puis on termine avec la première équation :

$$x + 4(-2) + 3(7) = 16 \Rightarrow x - 8 + 21 = 16 \Rightarrow x = 3$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases}$$

3.5 Méthode de Gauss : Infinité de solutions

Il est maintenant temps d'étudier le cas où nous avons une infinité de solutions.

Definition 3.5.1. Si A est une matrice sous forme échelon, alors on appelle pivot le premier élément non nul d'une ligne.

Pour trouver l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires ayant une infinité de solutions, nous devons avoir recours à ce qu'on appelle des variables libres. Pour chaque valeur de cette variable libre, nous obtiendrons une solution différente. Nous devons poser une variable libre pour chacune des colonnes de la matrice sous forme échelon n'ayant pas de pivot. On résout ensuite les autres variables en fonction de ces variables libres.

Exemple 3.5.1. On veut trouver l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 11 \\ 7x + 8y + 9z = 12 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 4 & 5 & 6 & | & 11 \\ 7 & 8 & 9 & | & 12 \end{pmatrix} \sim_{L_2-4L_1 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 0 & -3 & -6 & | & -29 \\ 7 & 8 & 9 & | & 12 \end{pmatrix} \sim_{L_3-7L_1 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 0 & -3 & -6 & | & -29 \\ 0 & -6 & -12 & | & -58 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{L_3-2L_2 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 0 & -3 & -6 & | & -29 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque donc qu'il y a une infinité de solutions. Comme la colonne de z n'a pas de pivot, on doit donc poser une variable libre. Posons $z = s$, puis on utilise la seconde ligne pour trouver y :

$$y = \frac{-29 + 6s}{-3} = \frac{29 - 6s}{3}$$

Puis, on utilise la première ligne pour trouver x :

$$x = 10 - 2y - 3z = 10 - 2\left(\frac{29 - 6s}{3}\right) - 3s = \frac{30 - 58 + 12s - 9s}{3} = \frac{-28 + 3s}{3}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} (-28 + 3s)/3 \\ (29 - 6s)/3 \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc pour chaque valeur de s , nous obtenons une solution du système.

Exemple 3.5.2. On veut trouver l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + y + w = 1 \\ y + z + v = 2 \\ x + 2y + z + 2w + 3v = 6 \end{cases}$$

On commence donc par écrire le système d'équations sous forme de matrice augmentée, puis on la transforme sous forme échelon. Attention à l'ordre des variables, ici nous les mettrons dans l'ordre x, y, z, w, v .

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim^{L_3 - L_1 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \sim^{L_3 - L_2 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Comme il n'y a pas de pivot dans les colonnes 3 et 5, on va donc poser :

$$z = s \text{ et } v = t$$

Ce qui nous donne pour les autres variables en commençant par la ligne du bas :

$$w + 2v = 3 \Rightarrow w = 3 - 2v = 3 - 2t$$

$$y + z + v = 2 \Rightarrow y = 2 - z - v = 2 - s - t$$

$$x + y + w = 1 \Rightarrow x = 1 - y - w = 1 - (2 - s - t) - (3 - 2t) = -4 + s + 3t$$

L'ensemble des solutions du système est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} s + 3t - 4 \\ 2 - s - t \\ s \\ 3 - 2t \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

3.6 Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan est très semblable à celle de Gauss, excepté que nous allons transformer nos matrice augmentée sous forme échelon-réduite (plutôt que sous forme échelon). Une matrice est dite sous forme échelon réduite si :

- elle est sous forme échelon
- tous les pivots sont des 1
- tous les nombres au dessus des pivots sont des 0

Exemple 3.6.1. On veut trouver l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} 4x + 3y - z = 48 \\ 5x - 3y + 2z = -4 \\ 6x + y + 5z = 34 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 5 & 34 \end{array} \right) \sim^{4L_2-5L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 6 & 1 & 5 & 34 \end{array} \right) \sim^{2L_3-3L_1 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 0 & -7 & 13 & -76 \end{array} \right) \\
& \sim^{27L_3-7L_2 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 0 & 0 & 260 & -260 \end{array} \right) \sim^{\frac{1}{260}L_3 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\
& \sim^{L_1+L_3 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 47 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim^{L_2-13L_3 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 47 \\ 0 & -27 & 0 & -243 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\
& \sim^{\frac{-1}{27}L_2 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 47 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim^{L_1-3L_2 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim^{\frac{1}{4}L_1 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

On peut maintenant directement lire la solution : $x = 5, y = 9, z = -1$.

Exemple 3.6.2. Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + w = 5 \\ x + 2y - z + 4w = 10 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 10 \end{array} \right) \sim^{2L_2-L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 15 \end{array} \right) \sim^{L_1-3L_2 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 10 & -20 & -40 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 15 \end{array} \right) \\
& \sim^{\frac{1}{2}L_1 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -10 & -20 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 15 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Comme les colonnes 3 et 4 n'ont pas de pivot, il y a donc un infinité de solutions. On va donc poser :

$$z = s, w = t$$

Ce qui nous donne :

$$y = 3s - 7t + 15$$

$$x = -5s + 10t - 20$$

Donc l'ensemble des solutions du systèmes est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -5s + 10t - 20 \\ 3s - 7t + 15 \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

3.7 Calcul de la matrice inverse

Au chapitre 2, nous avons définie la matrice inverse A^{-1} d'une matrice carré A comme étant une matrice tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Nous avons aussi appris que la matrice inverse n'existe pas toujours, et nous avons vu une méthode très peu pratique de la calculer. Il est maintenant temps de voir une façon beaucoup plus pratique et rapide de le faire. Mais avant, rappelons que si A est une matrice 2×2 , alors nous avons la formule simple suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \implies \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

à condition que $ad - bc \neq 0$. Autrement la matrice n'est pas inversible.

La méthode de Gauss-Jordan que nous avons utilisée dans la section précédente pour résoudre des systèmes d'équations linéaires peut être utilisée pour calculer la matrice inverse d'une matrice carrée (lorsque l'inverse existe). La méthode consiste à placer à gauche la matrice A , et à droite la matrice identité. On fait ensuite des opérations sur les lignes de sorte que l'on obtienne la matrice identité à gauche. Dans ce cas, la matrice de droite sera la matrice inverse.

Exemple 3.7.1. On veut trouver l'inverse de la matrice A ci dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, on a :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim_{L_2-2L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim_{L_3-L_1 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \sim_{L_2-3L_3 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim_{L_1-3L_3 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \sim_{L_1-2L_2 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant vérifier qu'il s'agit bien de l'inverse en calculant le produit AA^{-1} . Cette partie est laissée en exercice.

Exemple 3.7.2. On veut calculer l'inverse (si elle existe) de la matrice A ci dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, on a :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim_{L_2-4L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim_{L_3-7L_1 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \sim_{L_3-2L_2 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Remarquez que nous avons obtenu une ligne de zéro dans la matrice de gauche. Il ne sera donc pas possible d'obtenir la matrice identité (vous pouvez essayer). La matrice A n'est donc pas inversible.

3.8 Résolution des SEL par la matrice inverse

Il est maintenant temps de voir une application de la matrice inverse à la résolution des systèmes d'équations linéaires. Rappelons qu'un système d'équations linéaires peut toujours s'écrire sous la forme :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Si la matrice A est une matrice carrée inversible, on aura donc en multipliant des deux côtés (à gauche) par la matrice inverse :

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \implies I\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \implies \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Donc la solution du système d'équations linéaires peut être trouvée en calculant $A^{-1}\vec{b}$.

Exemple 3.8.1. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 137 \\ 7x - 2y = 142 \end{cases}$$

En écrivant le tout sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 137 \\ 142 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 137 \\ 142 \end{pmatrix}$$

On va utiliser la formule pour calculer l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{41} \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/41 & 5/41 \\ 7/41 & -3/41 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/41 & 5/41 \\ 7/41 & -3/41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 137 \\ 142 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.8.2. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 31 \\ 2x + 5y + 9z = 79 \\ x + 2y + 4z = 32 \end{cases}$$

Pour ce faire, on doit calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ce qui a déjà été fait dans la section précédente. On a donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution du système est donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 79 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Attention : La méthode de la matrice inverse pour résoudre un système d'équations linéaires fonctionne seulement lorsque le système admet une unique solution. Dans les autres cas, la matrice ne sera pas inversible.

3.9 Indépendance linéaire

Définition 3.9.1. Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors on dit que ces vecteurs sont linéairement indépendants si le système d'équations linéaires

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

Possède exactement une solution. Dans ce cas, la solution est :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs sont linéairement dépendants.

Exemple 3.9.1. Est-ce que les vecteurs suivants sont linéairement indépendant ?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour le savoir, on doit résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \implies \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim_{L_2-2L_1 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Comme ce système d'équation a une unique solution, cette solution doit donc être $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Les vecteurs sont donc bien linéairement indépendant.

Exemple 3.9.2. Est-ce que les vecteurs suivants sont linéairement indépendant ?

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Pour le vérifier, nous devons déterminer le nombre de solution du système d'équations linéaires $\lambda_1 \vec{x} + \lambda_2 \vec{y} + \lambda_3 \vec{z} = \vec{0}$. C'est à dire :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss, nous avons donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \sim_{2L_1-L_2 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \sim_{3L_1-L_3 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{array} \right) \sim_{2L_2-L_3 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On remarque donc que le système d'équations linéaires possède une infinité de solutions. Les vecteurs ne sont donc pas linéairement indépendant.

Théorème 3.9.1. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k\}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et si $k > n$, alors les vecteurs ne sont jamais linéairement indépendant (i.e. ils sont linéairement dépendant.)

Exemple 3.9.3. Est-ce que les vecteurs de l'ensemble S ci-dessous sont linéairement indépendant ?

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On remarque qu'il s'agit de vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Comme nous avons 5 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, par le théorème on peut donc affirmer qu'ils ne sont pas linéairement indépendant.

Définition 3.9.2. Si $\{\vec{x}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k\}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors on dit que $\vec{x}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k\}$ si le système d'équations linéaires

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k$$

admet au moins une solutions (donc une seule solution, ou une infinité).

Exemple 3.9.4. Est-ce que le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble S ci-dessous ?

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour ce faire, nous devons trouver le nombre de solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 4 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 5 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss, nous obtenons donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & | & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_1 - L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3L_2 - L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations linéaires possède donc aucune solution. On peut donc conclure que le vecteur $\vec{x}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de S .

Théorème 3.9.2. Si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k\}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors les vecteurs de S sont linéairement dépendant si et seulement si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de S .

Exemple 3.9.5. Est-ce que les vecteurs suivant sont linéaire indépendant ou dépendant :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

On remarque facilement que $\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}$. Comme le vecteur $\vec{w}$ est combinaison linéaire des deux autres vecteurs, on peut donc conclure que les vecteurs sont linéairement dépendant. Remarquez que nous aurions aussi pu justifier le fait que les vecteurs sont linéairement dépendant en utilisant le fait que nous avons 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

3.10 Sous-espaces vectoriels

Au début du premier chapitre, il a été mentionné que l'algèbre linéaire est l'étude des espaces vectoriels et des transformation linéaire entre 2 espaces vectoriels. Il a aussi été mentionné que dans notre cours, nous n'étudierons pas les espaces vectoriels dans toutes leur généralité, et allons nous concentré sur des espaces bien particulier : $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, les transformations linéaires sont tout simplement les matrices.

Dans cette section nous allons maintenant étudier les sous-espaces vectoriels, c'est à dire des sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui en quelques sorte se comporte de la même façon que $\mathbb{R}^m$ avec $m \leq n$.

Définition 3.10.1. Si S est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, alors on dit que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\vec{u} + \vec{v} \in S$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in S$
2. $\lambda \vec{u} \in S$ pour tout $\vec{u} \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemple 3.10.1. On veut montrer que l'ensemble ci dessous forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ 3y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour ce faire, prenons deux points quelconque (i.e. des variables) qui sont dans l'ensemble, et on veut montrer que la somme est aussi dans l'ensemble :

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ 2x_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ 2(x_1 + x_2) \\ 3(y_1 + y_2) \end{pmatrix} \in S$$

La première propriété est donc satisfaite. Vérifions maintenant la seconde. Prenons $\lambda \in \mathbb{R}$ est un point quelconque de l'ensemble. On veut maintenant montrer que le produit scalaire sera encore dans l'ensemble. On a donc :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + y_1) \\ \lambda(2x_1) \\ \lambda(3y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ 2(\lambda x_1) \\ 3(\lambda y_1) \end{pmatrix} \in S$$

Comme les deux propriétés sont satisfaites, on peut donc conclure que S est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.10.2. Est-ce que l'ensemble S ci-dessous forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour ce faire, commençons par vérifier la première propriété. Prenons $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ y+1 \end{pmatrix}$ dans l'ensemble S . En additionnant les deux vecteurs, on obtient donc :

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y+2 \end{pmatrix} \notin S$$

On remarque donc que la somme n'est pas dans l'ensemble S , car la deuxième composante est 2 de plus que la première, contrairement aux éléments de l'ensemble où la seconde composante doit être seulement 1 de plus que la première. On peut donc conclure qu'il ne s'agit pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.10.3. On dit qu'un système d'équations linéaires est homogène si toutes les constantes sont zéro. L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène à n inconnus forme toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. C'est à dire que l'ensemble des solutions d'un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

forme toujours un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Remarquez qu'un tel système admet toujours au moins une solutions, la solution $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$. Pour le démontrer, il s'agit d'utiliser la notation matricielle pour un système d'équation linéaire. Prenons A une matrice de dimension $m \times n$, et considérons l'ensemble $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$. Nous voulons démontrer que S forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour la première propriété, prenons $\vec{x}, \vec{y} \in S$. Par définition de l'ensemble S , on doit donc avoir $A\vec{x} = \vec{0}$ et $A\vec{y} = \vec{0}$. On veut maintenant vérifier si $\vec{x} + \vec{y}$ fait aussi parti de l'ensemble S . On a donc :

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

On a donc que $\vec{x} + \vec{y} \in S$. La première propriété est satisfaite.

2. Pour la seconde propriété, prenons $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} \in S$. Par définition de S , on doit donc avoir $A\vec{x} = \vec{0}$. Nous voulons maintenant vérifier si $\lambda\vec{x}$ fait aussi parti de l'ensemble. On a donc :

$$A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

On peut donc affirmer que $\lambda\vec{x} \in S$. La seconde propriété est donc satisfaite.

Comme les deux propriétés sont satisfaites, on peut donc conclure que l'ensemble S est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.10.4. On veut montrer que l'ensemble V ci-dessous est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - z + 3w = 0, x + 2y + 3z - w = 0 \right\}$$

Pour ce faire, nous allons présenter 3 méthodes différentes.

Méthode 1 : On peut remarquer que l'ensemble V n'est en fait rien d'autre que l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogène suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = 0 \\ x + 2y + 3z - w = 0 \end{cases}$$

On peut donc appliquer l'exemple précédent qui nous affirme que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Méthode 2 : Commençons par montrer que la première propriété est satisfaite. Pour ce faire, prenons

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \in V$. On veut maintenant montrer que la somme est dans l'ensemble V . On a donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \\ w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que ce vecteur fait parti de V , il suffit de vérifier que les deux équations sont satisfaites :

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) + 3(w_1 + w_2) = (2x_1 + y_1 - z_1 + 3w_1) + (2x_2 + y_2 - z_2 + 3w_2) = 0 + 0 = 0$$

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) - (w_1 + w_2) = (x_1 + 2y_1 + 3z_1 - w_1) + (x_2 + 2y_2 + 3z_2 - w_2) = 0 + 0 = 0$$

La première propriété est donc satisfaite. Pour la seconde propriété, on prend $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \in V$. On veut

montrer que le produit scalaire est aussi dans V :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \\ \lambda z_1 \\ \lambda w_1 \end{pmatrix}$$

On doit à nouveau vérifier que les deux équations sont satisfaites. On a donc :

$$2(\lambda x_1) + (\lambda y_1) - (\lambda z_1) + 3(\lambda w_1) = \lambda(2x_1 + y_1 - z_1 + 3w_1) = \lambda(0) = 0$$

$$(\lambda x_1) + 2(\lambda y_1) + 3(\lambda z_1) - (\lambda w_1) = \lambda(x_1 + 2y_1 + 3z_1 - w_1) = \lambda(0) = 0$$

La seconde propriété est donc satisfaite. On peut donc affirmer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Méthode 3 : On peut commencer par résoudre le système d'équations linéaires en utilisant la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim_{L_1-2L_2 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

En posant $w = s$ et $z = t$, on obtient donc :

$$y = \frac{1}{3}(-7t + 5s) = -\frac{7}{3}t + \frac{5}{3}s$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}t - \frac{5}{3}s + t - 3s\right) = \frac{10}{6}t - \frac{14}{6}s$$

L'ensemble V peut donc être réécrit sous la forme suivante :

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 10t/6 - 14s/6 \\ -7t/3 + 5s/3 \\ t \\ s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 10t - 14s \\ -14t + 10s \\ 6t \\ 6s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5t - 7s \\ -7t + 5s \\ 3t \\ 3s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc appliquer la même méthode que le premier exemple de la section. Cette partie vous est laissée en exercice.

Exemple 3.10.5. L'ensemble des points d'une droite passant par l'origine ou d'un plan passant par l'origine forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ où n dépend de la dimension dans laquelle la droite ou le plan se trouve.

3.11 Ensembles générateurs

De manière générale, un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ contient un infini de vecteur. L'exception étant le sous-espace contenant uniquement le vecteur $\vec{0}$. Pour simplifier l'étude des sous-espaces vectoriel, il est donc plus pratique de travailler avec un sous-ensemble de V à partir duquel il est possible de retrouver tout les vecteurs de V . Un tel ensemble porte le nom d'ensemble générateur de V . Formellement, nous avons la définition suivante :

Définition 3.11.1. Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et S un sous-ensemble de V , alors on dit que S est générateur de V si tout les vecteurs de V peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de S .

À noter le cas particulier et très important où $V = \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, on dit qu'un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est générateur de $\mathbb{R}^n$ si tout les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de S . Ce n'est bien entendu pas tout les sous-ensembles S d'un sous-espace vectoriel V qui sont générateur de V . Dans ce cas, on peut s'intéresser au sous-espace vectoriel W de V contenant tout les vecteurs de V qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de S . C'est ce que l'on appelle l'espace généré par S , où plus simplement $\text{span}(S)$.

Définition 3.11.2. Si S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors le sous-ensemble généré par S , dénoté $\text{span}(S)$ est l'ensemble :

$$\text{span}(S) = \{ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ et } u_1, u_2, \dots, u_k \in S \}$$

On remarque facilement qu'à partir du span il est possible d'obtenir une formulation alternative d'un sous ensemble générateur. Un sous-ensemble S d'un sous-espace vectoriel V est générateur, si $\text{span}(S) = V$.

Théorème 3.11.1. Si S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors $\text{span}(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Le théorème précédent est particulièrement important dans l'étude des sous-espaces vectoriels. Nous ne sommes pas en mesure de l'expliquer pour le moment, mais il est possible de démontrer que tout les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ sont de la forme $\text{span}(S)$ pour un sous-ensemble S . Donc une bonne compréhension du span nous permet de bien comprendre tout les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.11.2. Tout sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ contenant moins de n vecteurs n'est pas générateur de $\mathbb{R}^n$.

À noter que de manière équivalente, il est possible de réécrire le théorème précédent sous la forme suivante : Si S est un sous ensemble générateur de $\mathbb{R}^n$ contenant exactement k vecteurs, alors $k \geq n$.

Exemple 3.11.1. Est-ce que les vecteurs ci dessous sont générateurs de $\mathbb{R}^3$?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs ne peuvent pas être générateurs de $\mathbb{R}^3$, car un ensemble générateur devrait avoir au minimum 3 vecteurs.

Exemple 3.11.2. Est-ce que les vecteurs ci dessous sont générateurs de $\mathbb{R}^2$?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pour le savoir, prenons un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$, disons $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On veut montrer que ce vecteur peut toujours s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. On doit donc résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = b \end{cases}$$

On a donc :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & a \\ 2 & 3 & b \end{array} \right) \sim_{L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & a \\ 0 & -7 & b - 2a \end{array} \right)$$

On obtient donc que le système possède toujours exactement une solution (en particulier on en a au moins une). On peut donc conclure que les vecteurs sont générateurs de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.11.3. Est-ce que les vecteurs de l'ensemble S ci-dessous sont générateurs de $\mathbb{R}^3$?

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour ce faire, nous devons trouver combien de solution possède le système d'équations linéaires suivant :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = a \\ 5\lambda_1 - 4\lambda_3 = b \\ 7\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = c \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss, nous obtenons donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & a \\ 5 & 0 & -4 & b \\ 7 & 1 & -1 & c \end{array} \right) \sim_{\substack{5L_1 - 2L_2 \rightarrow L_2 \\ 7L_1 - 2L_3 \rightarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & a \\ 0 & 5 & 23 & 5a - 2b \\ 0 & 5 & 23 & 7a - 2c \end{array} \right) \sim_{L_2 - L_3 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & a \\ 0 & 5 & 23 & 5a - 2b \\ 0 & 0 & 0 & -2a - 2b + 2c \end{array} \right)$$

On remarque donc que le système possède une infinité de solution si $-2a - 2b + 2c = 0$, et n'a aucune solution dans le cas contraire. En particulier, on remarque que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne fait pas partie de $\text{span}(S)$. L'ensemble n'est donc pas générateur de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.11.4. On veut montrer que l'ensemble S est générateur du sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour ce faire, on prend un vecteur quelconque $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \in V$ et on veut montrer qu'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de S . On doit donc trouver combien de solution possède le système d'équations linéaires suivant :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = x_1 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 2x_1 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2x_1 \end{array} \right) \xrightarrow{2L_1 - L_3 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On remarque donc que ce système d'équations linéaires possède toujours une infinité de solution. L'ensemble S est donc générateur de V .

Remarquez que dans l'exemple précédent, bien que S soit générateur de V , l'ensemble n'est pas générateur de $\mathbb{R}^3$ au complet. Ceci est facile à voir, car un ensemble contenant seulement 2 vecteurs ne peut jamais être générateur de $\mathbb{R}^3$.

3.12 Base et dimension

Lorsque l'on commence à travailler avec le plan cartésien, l'une des premières règles que l'on apprend concerne l'orientation des axes, l'un horizontal et l'autre vertical, ainsi que la convention que les coordonnées doivent toujours être donné en commençant par l'axe horizontal (l'axe des x), suivi de l'axe vertical (l'axe des y). Pourtant, il n'y a aucune raison mathématiques derrière le choix d'orientation de nos axes ou de l'ordre dans laquelle les coordonnées doivent être écrite. Il ne s'agit que d'une convention. Une telle convention est particulièrement utile pour faciliter la communication / compréhension, mais il ne s'agit pas toujours de l'approche la plus simple.

Dans cette section, nous voulons donc explorer les différentes options possible pour un système d'axe. C'est ce que nous appellerons une base d'un sous-espace vectoriel. Pour avoir un système d'axe acceptable, deux propriétés sont essentielles : On doit avoir le minimum d'axe possible, et on doit en avoir suffisamment pour d'écrire tout les points de notre espace. Ces deux propriétés ne sont en fait rien d'autre que l'indépendance linéaire et les ensembles générateurs que nous avons étudié dans les sections précédente. Nous allons donc définir une base formellement comme suit.

Définition 3.12.1. Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est appelé une base si S est un ensemble linéairement indépendant et générateur de $\mathbb{R}^n$. De plus, la dimension de $\mathbb{R}^n$ est définie comme étant n .

De manière générale, il existe une infinité de base possible pour un sous-espace vectoriel donné. Par contre, dans le cas de $\mathbb{R}^n$, nous avons des bases qui sont particulièrement importantes, et que nous utilisons discrètement depuis le début de la session. C'est ce que nous appelons la base canonique de $\mathbb{R}^n$. À noter qu'il en existe une pour chaque valeur de n .

- Dans $\mathbb{R}^2$, la base canonique est donné par les vecteurs $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, la base canonique est donné par les vecteurs $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique est donné par les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

où chacun des $\vec{e}_i$ est contient uniquement des 0, sauf pour la i-ème composante qui est un 1.

À noter que chacune des bases canoniques donné ci-dessus est véritablement une base dans le sens qu'il s'agit de vecteurs linéairement indépendant et générateurs de $\mathbb{R}^n$ pour leur valeur de n respective. Nous allons maintenant regarder quelques exemples un peu plus intéressant.

Exemple 3.12.1. Dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

ne forme pas une base, car 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ne sont jamais linéairement indépendant.

Exemple 3.12.2. Dans $\mathbb{R}^4$ l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

ne forme pas une base, car 2 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ ne sont jamais générateur.

Exemple 3.12.3. Est-ce que l'ensemble suivant forme une base de $\mathbb{R}^4$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Commençons par vérifier si les vecteurs sont linéairement indépendant. On doit donc vérifier combien de solution le système d'équations linéaire suivant possèdent :

$$\begin{cases} x + 2y - w = 0 \\ 2x + z + w = 0 \\ 3x + y - w = 0 \\ 4x + z + w = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne en appliquant la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 4L_1 \rightarrow L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \\ & \sim \begin{array}{l} 4L_3 - 5L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 2L_2 \rightarrow L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} 5L_4 - L_3 \rightarrow L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

La seule solution de ce système d'équations linéaires est $x = 0, y = 0, z = 0$ et $w = 0$. En particulier, comme il y a exactement une solution, les vecteurs sont linéairement indépendant. Il faut maintenant vérifier s'ils sont générateur de $\mathbb{R}^4$. Pour se faire, on veut montrer que le système d'équations linéaire suivant admet toujours au moins une solution :

$$\begin{cases} x + 2y - w = a \\ 2x + z + w = b \\ 3x + y - w = c \\ 4x + z + w = d \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & 1 & b \\ 3 & 1 & 0 & -1 & c \\ 4 & 0 & 1 & 1 & d \end{array} \right) &\sim \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 4L_1 \rightarrow L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & a \\ 0 & -4 & 1 & 3 & b - 2a \\ 0 & -5 & 0 & 2 & c - 3a \\ 0 & -8 & 1 & 5 & d - 4a \end{array} \right) \\ &\sim \begin{array}{l} 4L_3 - 5L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 2L_2 \rightarrow L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & a \\ 0 & -4 & 1 & 3 & b - 2a \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2a - 5b + 4c \\ 0 & 0 & -1 & -1 & d - 2b \end{array} \right) \\ &\sim 5L_4 - L_3 \rightarrow L_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & a \\ 0 & -4 & 1 & 3 & b - 2a \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2a - 5b + 4c \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2a - 5b - 4c + 5d \end{array} \right) \end{aligned}$$

Comme ce système a toujours au moins une solution, les vecteurs sont générateurs de $\mathbb{R}^4$. On peut donc conclure qu'il s'agit bien d'une base.

Remarquez que dans l'exemple précédent, vérifier si les vecteurs sont linéairement indépendant et vérifier s'ils sont générateur revient à faire pratiquement le même calcul (bien que ce soit deux notions complètement différente!!!). On obtient donc le théorème suivant qui nous sera très utile.

Théorème 3.12.1.

1. Dans $\mathbb{R}^n$, un ensemble de n vecteurs linéairement indépendant forme toujours une base.
2. Dans $\mathbb{R}^n$, un ensemble de n vecteurs générateur de $\mathbb{R}^n$ forme toujours une base.

La notion de base n'est pas restreinte seulement à $\mathbb{R}^n$. En fait nous pouvons montrer que tout les espaces vectoriels de dimension fini admettent des bases. Nous allons maintenant voir comment la notion de base s'applique à des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.12.2. Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et S un sous-ensemble de V . Alors on dit que S est une base de V , si S est un ensemble linéairement indépendant et générateur de V . Dans ce cas, on définit la dimension de V comme étant le nombre d'élément de S .

Théorème 3.12.2. La dimension d'un espace vectoriel est bien définie. C'est à dire que toutes les bases sur un espace vectoriel ont le même nombre d'élément.

Exemple 3.12.4. Vérifier que l'ensemble V ci-dessous est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis trouver une base de V et sa dimension.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + y \\ x - 2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Commençons par vérifier la première propriété d'un sous-espace vectoriel. Prenons

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 + y_1 \\ x_1 - 2y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ 2x_2 + y_2 \\ x_2 - 2y_2 \end{pmatrix} \in V$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 + y_1 \\ x_1 - 2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ 2x_2 + y_2 \\ x_2 - 2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \\ 2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2 \\ x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \end{pmatrix} \in V$$

La première propriété est donc satisfaite. Maintenant, pour la seconde propriété. Prenons

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 + y_1 \\ x_1 - 2y_1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 + y_1 \\ x_1 - 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + y_1) \\ \lambda(2x_1 + y_1) \\ \lambda(x_1 - 2y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ 2(\lambda x_1) + \lambda y_1 \\ \lambda x_1 - 2(\lambda y_1) \end{pmatrix}$$

La seconde propriété est donc satisfaite. On peut donc affirmer que l'ensemble V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Maintenant, pour trouver une base, remarquons qu'un vecteur de V peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x + y \\ 2x + y \\ x - 2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On peut donc affirmer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont générateur de V . Il ne nous reste plus qu'à vérifier qu'ils sont linéairement indépendant. Pour ce faire, nous devons trouver combien de solution possède le système d'équations linéaires suivant :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss, nous obtenons donc :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_1 - L_3 \rightarrow L_3]{2L_1 - L_2 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3L_2 - L_3 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Comme ce système d'équations linéaires possède exactement une solution, on peut donc que l'ensemble $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de V . La dimension de V est donc 2.

Si S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors nous avons appelé $\text{span}(S)$ l'ensemble de tout les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de S . C'est à dire que si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k\}$:

$$\text{span}(S) = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

Dans tous les cas, $\text{span}(S)$ sera donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Comme faire pour trouver une base de $\text{span}(S)$?

La méthode consiste à placer les vecteurs de S à l'**horizontal** dans une matrice, et d'appliquer la méthode de Gauss pour transformer la matrice sous forme échelon. Les lignes non nulle de la matrice obtenu formera alors une base de $\text{span}(S)$.

Exemple 3.12.5. Dans $\mathbb{R}^3$, on veut trouver une base de $\text{span}(S)$, où

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 7L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de $\text{span}(S)$ est donc :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

de plus, on obtient que $\dim(\text{span}(S)) = 2$.

Définition 3.12.3. Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base de V , alors tout vecteur de V peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ (car ils sont générateur). C'est à dire que si $\vec{z} \in V$, alors on peut trouver des α_i tel que :

$$\vec{z} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$$

Dans ce cas, nous écrivons :

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

C'est ce qu'on appelle l'écriture de $\vec{z}$ dans la base $\mathcal{B}$. Remarquez l'indice qui indique la base qui a été utilisé.

Exemple 3.12.6. Dans $\mathbb{R}^2$, on veut montrer que les vecteurs de l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

forment une base de $\mathbb{R}^2$, et on veut ensuite écrire le vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dans cette base. Pour ce faire, nous allons montrer que les deux vecteurs de $\mathcal{B}$ sont linéairement indépendant :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim^{5L_2 - L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{array} \right)$$

Comme ce système a exactement une solution, les vecteurs sont bien linéairement indépendant. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. On veut maintenant écrire le vecteur $\vec{u}$ dans cette base. Pour ce faire, nous devons résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 1x + 3y = 2 \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim^{5L_2 - L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 9 \end{array} \right)$$

Ce qui nous donne $y = \frac{9}{13}$ et $x = \frac{1 - 2y}{5} = \frac{1 - \frac{18}{13}}{5} = \frac{-1}{13}$. Et finalement :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/13 \\ 9/13 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

3.13 Noyau et image

Lorsque vous avez étudié les fonctions au secondaire, vous avez étudié des notions telles que le domaine et l'image de la fonction, ainsi que les zéros de la fonction. Nous allons maintenant faire la même chose avec les fonctions linéaires de plusieurs variables. Rappelons qu'une fonction linéaire peut toujours s'écrire sous la forme $f(\vec{x}) = A\vec{x}$. Dans ce cas, si A est de dimension $m \times n$, alors le domaine de la fonction sera toujours $\mathbb{R}^n$. Nous allons donc nous concentrer dans cette section sur l'image et les zéros d'une fonction linéaire. Les zéros seront appelés le noyau de la matrice, ce que nous allons définir immédiatement.

Définition 3.13.1. Si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors on définit le noyau de A , noté $\text{Ker}(A)$ comme étant l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{0}$. C'est à dire :

$$\text{Ker}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$$

Théorème 3.13.1. Si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors $\text{ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Nous serons donc particulièrement intéressés à trouver une base du noyau. Ceci est facilement obtenu en résolvant le système d'équations linéaires et en écrivant les solutions comme une combinaison linéaire de vecteurs multipliant les paramètres libres. Ces vecteurs formeront une base.

Exemple 3.13.1. On veut trouver une base du noyau de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, nous devons résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Comme seule la première colonne possède un pivot, nous aurons donc besoin de deux paramètres libres. On va donc poser :

$$y = s \text{ et } z = t$$

Ce qui nous donne que l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une base de $\text{ker}(A)$ sera donc :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Définition 3.13.2. Si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors l'image de A , noté $\text{Im}(A)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $A\vec{x}$ où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. C'est à dire :

$$\text{Im}(A) = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Théorème 3.13.2. Si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors $Im(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Comme l'image est un sous-espace vectoriel, nous serons donc particulièrement intéressé à trouver une base de l'image. Pour ce faire, remarquons que :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

On a donc que l'image de A n'est rien d'autre que le span des colonnes de la matrice A . C'est ce qu'on appelle l'espace colonne de la matrice A , dénoté $col(A)$. On a donc :

$$Im(A) = Col(A)$$

Exemple 3.13.2. On veut trouver une base de l'image (ou l'espace colonne) de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, on doit trouver une base de :

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de l'image de A est donc :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

3.14 Théorème du rang

Dans cette section, nous allons maintenant nous intéresser à la dimension des sous-espaces vectoriels $Ker(A)$ et $Im(A)$ pour une matrice A donné.

Définition 3.14.1. Si A est une matrice, alors on définit la nullité de A comme étant la dimension du noyau de A . C'est à dire :

$$nullite(A) = dim(Ker(A))$$

Théorème 3.14.1. (Théorème du rang) Si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors on a :

$$rang(A) = rang(A^T)$$

En particulier, nous avons que : $rang(A) = dim(Im(A))$. De plus, l'identité suivante est toujours satisfaite :

$$rang(A) + nullite(A) = n$$

À partir du théorème précédent, nous pouvons déduire une propriété intéressante. Si A est une matrice de dimension $m \times n$, nous savons que l'image de A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$, donc $\text{rang}(A) \leq m$. De plus, comme la nullité est toujours un entier ≥ 0 , nous avons aussi que $\text{rang}(A) \leq n$. En combinant c'est deux inégalités, on obtient donc :

$$\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$$

Exemple 3.14.1. Existe-t-il une matrice A de dimension 4×6 tel que $\text{nullite}(A) = 1$? Si oui, donner un exemple, autrement expliquer pourquoi. Premièrement, par le théorème du rang, on a

$$\text{rang}(A) + \text{nullite}(A) = n \Rightarrow \text{rang}(A) + 1 = 6 \Rightarrow \text{rang}(A) = 5$$

ce qui est impossible car

$$\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\} = \min\{4, 6\} = 4$$

Une telle matrice ne peut donc pas exister.

Exemple 3.14.2. Complétez le tableau ci dessous :

Dimension de A	Dimension de A^T	$\text{rang}(A)$	$\text{nullite}(A)$	$\text{rang}(A^T)$	$\text{nullite}(A^T)$
4×5	$a \times b$	c	2	d	e
$f \times g$	$h \times i$	5	1	j	0
$7 \times k$	$l \times m$	n	3	5	p

a : $a = 5$.

b : $b = 4$.

c : Par le théorème du rang, nous savons que $\text{rang}(A) + \text{nullite}(A) = c + 2 = 5$. On doit donc avoir $c = 3$

d : Par le théorème du rang, nous savons que $d = \text{rang}(A^T) = \text{rang}(A) = 3$

e : Par le théorème du rang, nous savons que $\text{rang}(A^T) + \text{nullite}(A^T) = 3 + e = 4$. Donc $e = 1$.

g : Par le théorème du rang, $g = \text{rang}(A) + \text{nullite}(A) = 5 + 1 = 6$.

j : Par le théorème du rang, $j = \text{rang}(A^T) = \text{rang}(A) = 5$.

i : Par le théorème du rang, $i = \text{rang}(A^T) + \text{nullite}(A^T) = j + 0 = 5 + 0 = 5$.

f : Par définition de la transposé, nous avons $f = i = 5$.

h : Par définition de la transposé, nous avons $h = g = 6$.

m : Par définition de la transposé, nous avons $m = 7$.

n : Par le théorème du rang, nous avons $n = \text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) = 5$.

k : Par le théorème du rang, nous avons $k = \text{rang}(A) + \text{nullite}(A) = n + 3 = 5 + 3 = 8$.

l : Par définition de la transposé, nous avons $l = k = 8$.

p : Par le théorème du rang, nous avons $\text{rang}(A^T) + \text{nullite}(A^T) = m$, donc $p = m - \text{rang}(A^T) = 7 - 5 = 2$.

On obtient donc le tableau complété suivant :

Dimension de A	Dimension de A^T	$\text{rang}(A)$	$\text{nullite}(A)$	$\text{rang}(A^T)$	$\text{nullite}(A^T)$
4×5	5×4	3	2	3	1
5×6	6×5	5	1	5	0
7×8	8×7	5	3	5	2

Exemple 3.14.3. On veut trouver une base du noyau et de l'image de la matrice A ci-dessous, ainsi que de sa transposé. Puis, nous voulons vérifier que le théorème du rang est bien satisfait pour cette matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Commençons par trouver une base du noyau. Pour ce faire, nous avons :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{array} \right) \sim_{6L_1 - L_2 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & 0 \end{array} \right)$$

Ce qui nous donne l'ensemble solution suivant :

$$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} r+2s+3t \\ -2r-3s-4t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t : r, s, t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On obtient donc la base suivante :

$$\mathcal{B}_{Ker(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En particulier, on remarque que $nullite(A) = 3$. Maintenant, cherchons une base de l'image de A . Pour ce faire, on doit trouver une base de :

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \\ 3L_1 - L_3 \rightarrow L_3 \\ 4L_1 - L_4 \rightarrow L_4 \\ 5L_1 - L_5 \rightarrow L_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \\ 0 & 10 \\ 0 & 15 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2L_2 - L_3 \rightarrow L_3 \\ 3L_2 - L_4 \rightarrow L_4 \\ 4L_2 - L_5 \rightarrow L_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc la base suivante :

$$\mathcal{B}_{Im(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Et on remarque que $rang(A) = 2$. Maintenant, nous allons refaire la même chose, mais avec la matrice A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Trouvons premièrement une base du noyau de A . Nous devons donc résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{matrix} 2L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \\ 3L_1 - L_3 \rightarrow L_3 \\ 4L_1 - L_4 \rightarrow L_4 \\ 5L_1 - L_5 \rightarrow L_5 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{matrix} 2L_2 - L_3 \rightarrow L_3 \\ 3L_2 - L_4 \rightarrow L_4 \\ 4L_2 - L_5 \rightarrow L_5 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On remarque donc que ce système d'équations linéaires possède exactement une solution : La solution triviale. On a donc $Ker(A^T) = \{\vec{0}\}$. Dans ce cas, la base est un ensemble vide (ne contient aucun vecteur), et sa dimension est 0. On a donc $nullite(A^T) = 0$. Il nous faut maintenant trouver une base de l'image de A^T . Pour faire, nous devons trouver une base de :

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \sim_{6L_1 - L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne la base suivante :

$$\mathcal{B}_{Im(A^T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \right\}$$

De plus, nous avons que la dimension de l'image de A^T est $\text{rang}(A^T) = 2$. Nous voulons maintenant vérifier que les différentes parties du théorème du rang sont satisfaites. On a donc :

$$\text{rang}(A) = 2 \quad \text{et} \quad \text{rang}(A^T) = 2$$

Donc le rang de la matrice A et de sa transposée sont bien égaux comme le théorème le prédisait. De plus, nous avons :

$$\text{rang}(A) + \text{nullite}(A) = 2 + 3 = 5$$

$$\text{rang}(A^T) + \text{nullite}(A^T) = 2 + 0 = 2$$

Ce qui correspond respectivement au nombre de colonnes et au nombre de lignes de la matrice A . Le théorème du rang est donc bel et bien satisfait pour cette matrice.

3.15 Méthode de Cramer (cas 2×2)

Finalement, pour compléter ce chapitre, nous allons revoir une formule que nous avons déjà vue au chapitre précédent, et qui nous permet de calculer directement les solutions d'un système d'équations linéaires à 2 équations et 2 inconnues. Considérons le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Nous avons vu que si $ad - bc \neq 0$, alors ce système a une unique solution donnée par :

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc} \quad \text{et} \quad y = \frac{af - be}{ad - bc}$$

Ce qui peut s'écrire sous forme de déterminant. On va donc poser les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A_x = \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}, A_y = \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Cramer. L'une des grandes questions qu'on peut maintenant se poser est comment généraliser cette idée à des systèmes ayant n équations et n inconnues. Cela fera l'objet du chapitre suivant. Mais avant, voici des exemples d'utilisation de la formule de Cramer.

Exemple 3.15.1. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivants à l'aide de la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ 4x + 5y = 53 \end{cases}$$

On va donc commencer par trouver nos matrices A, A_x, A_y :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_x = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 53 & 5 \end{pmatrix}, A_y = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 4 & 53 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{22}{11} = 2$$
$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{99}{11} = 9$$

En particulier, le système admet exactement une solution.

Exemple 3.15.2. En utilisant la méthode de Cramer, on veut montrer que le système d'équations linéaires suivant n'admet pas une unique solution.

$$\begin{cases} 5x + 6y = 10 \\ 10x + 12y = 8 \end{cases}$$

Pour ce faire, nous avons tout simplement à calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

comme $\det(A) = 0$, le système n'admet pas une unique solution. Remarquez que la méthode de Cramer ne nous permet absolument pas de savoir s'il y a aucune solution ou une infinité.

3.16 Application : Le modèle de Leontief

Wassily Leontief est né à Munich (Allemagne) en 1906. Il étudie à l'Université de Leningrad, puis à l'Université Humboldt de Berlin. En 1931, Il quitte pour les États-Unis et rejoint l'Université Harvard en 1932. À partir de 1949, il utilise les premiers ordinateurs de l'université et les données du Bureau of Labor Statistics pour étudier l'économie américaine. Il divise l'économie américaine en 500 secteurs, chacun d'entre eux représenté par une équation linéaire. Ses travaux l'ont amené à développer un modèle économique qui porte son nom et qui lui ont valu le prix Nobel d'économie en 1973. Il décède en 1999 à New-York.



Wassily Leontief - 1973

Source : Wikipedia

Le modèle de Leontief : Économie fermé

Le premier des deux problèmes que nous allons considérer est celui de l'économie fermée. Pour ce faire, imaginons que l'économie d'un petit village repose sur trois entreprises.

- **Entreprise A :** Une entreprise spécialisée dans l'agriculture produisant une variété de fruits, légumes et céréales.
- **Entreprise B :** Une entreprise spécialisée dans l'élevage de poule et de boeuf. Elle produit en particulier de la viande et des oeufs.
- **Entreprise C :** Une entreprise spécialisée dans la restauration. Elle offre en particulier un service de cantine pour les travailleurs du village.

Les trois entreprises sont interdépendantes. Par exemple, l'entreprise A consomme une partie de sa production pour nourrir ses employés, mais vend aussi une partie de sa production à l'entreprise B pour nourrir les animaux, et aussi à l'entreprise C pour la production des différents repas. Il en va de même pour les deux autres entreprises.

Le tableau ci-dessous indique en pourcentage à quel entreprise est envoyé la production de chacune d'entre elle.

		Vente		
Achat		Entreprise A	Entreprise B	Entreprise C
	Entreprise A	0,2	0,05	0,4
	Entreprise B	0,3	0,1	0,5
	Entreprise C	0,5	0,85	0,1
	Total	1	1	1

On remarque que le total de chaque colonne est 1, signifiant que 100% de la production est vendu et utilisé par l'une des trois entreprises du village. C'est ce que nous appelons une économie fermé. Ce tableau pour être représenté sous la forme d'une matrice d'échange :

$$E = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,05 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,85 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Si on connaît la production (en dollars) de chacune des entreprises, il nous est alors possible de calculer la consommation (en dollars) de chacune des entreprises. Par exemple, si le vecteur $\vec{x}$ ci-dessous représente la production de chacune des entreprises, alors le vecteur $E\vec{x}$ représente la consommation de chacune des entreprises.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix} \Rightarrow E\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,05 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,85 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 112 \\ 166 \end{pmatrix}$$

Ceci signifie que si la production des entreprises A,B et C est respectivement 100\$, 120\$ et 140\$, alors leur consommation sera respectivement de 82\$, 112\$ et 166\$. Remarquez qu'une telle production / consommation n'est pas soutenable. En particulier, on remarque facilement que l'entreprise C consomme beaucoup plus que ce qu'elle produit. Elle fera donc éventuellement faillite. Nous allons maintenant chercher pour quelle valeur du vecteur $\vec{x}$ le système est en équilibre. C'est à dire pour quelle valeur du vecteur $\vec{x}$ chacune des entreprises produit autant que ce qu'elle consomme. C'est à dire que nous devons résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$E\vec{x} = \vec{x}$$

Remarquez que ce système n'est pas écrit sous forme standard. En réarrageant les termes, on peut cependant facilement le transformer sous forme d'une système d'équations linéaires homogène :

$$E\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow E\vec{x} - I\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow (E - I)\vec{x} = \vec{0}$$

Dans le cas présent, nous avons donc :

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,05 & 0,4 & | & 0 \\ 0,3 & -0,9 & 0,5 & | & 0 \\ 0,5 & 0,85 & -0,9 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3L_1+8L_2 \rightarrow L_2 \\ 5L_1+8L_3 \rightarrow L_3}} \begin{pmatrix} -0,8 & 0,05 & 0,4 & | & 0 \\ 0 & -7,05 & 5,2 & | & 0 \\ 0 & 7,05 & -5,2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} -0,8 & 0,05 & 0,4 & | & 0 \\ 0 & -7,05 & 5,2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions de ce système est donné par :

$$Sol = \left\{ \begin{pmatrix} 6,546s \\ 0,738s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc pour être en équilibre, la production de l'entreprise A doit être 6,546 fois la production de l'entreprise C, et la production de l'entreprise B doit être 0,738 fois la production de l'entreprise C. Maintenant, cherchons qu'elle doit être la production en dollars de chacune des 3 entreprises si la production totale de la ville est de 100 000\$?

$$6,546s + 0,738s + s = 100\,000 \Rightarrow 8,284s = 100\,000 \Rightarrow 12\,071,46$$

Donc la production de chacune des 3 entreprises est donné par le vecteur suivant :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 79\,016,77 \\ 8\,908,74 \\ 12\,071,46 \end{pmatrix}$$

Le modèle de Leontief : Économie ouverte

Le second modèle que nous allons considérer est celui d'une économie ouverte. Pour ce faire, imaginons que dans une ville se trouve un secteur minier, un secteur forestier et un secteur de transformation. Chacun de ces secteurs nécessite des ressources produites pour les autres secteurs. De plus, chacun de ces secteurs doit remplir des commandes externes. Voici un tableau représentant les besoins en ressources minière, forestière et de transformation pour chacun des secteurs :

		Vente		
Achat		Minière	Forestière	Transformation
	Minière	0,1	0,05	0,2
	Forestière	0,1	0,1	0,2
	Transformation	0,3	0,4	0,1

À partir du dernier tableau, on remarque donc que pour produire 1 unité minière on a besoin de :

- 0,1 unité minière
- 0,05 unité forestière
- 0,2 unité de transformation

Voici maintenant un tableau décrivant la demande externe pour chacun des secteurs.

Demande externe	
Secteur minier	50 000 unités
Secteur forestier	70 000 unités
Secteur de transformation	100 000 unités

On cherche le nombre d'unité que chaque secteur doit produire pour remplir à la fois la demande interne, mais aussi la demande externe. Pour ce faire, nous devons résoudre l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}}_{\text{Demande interne}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 50\,000 \\ 70\,000 \\ 100\,000 \end{pmatrix}}_{\text{Demande externe}}$$

Qui peut être réécrit sous forme d'un système d'équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} 0,9 & -0,05 & -0,2 \\ -0,1 & 0,9 & -0,2 \\ -0,3 & -0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 70\,000 \\ 100\,000 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 109\,362 \\ 136\,170 \\ 208\,085 \end{pmatrix}$$

Remarquons que parmi les 109 362 unité minière qui doivent être produite, nous aurons :

- $109\,362 \cdot 0,1 \approx 10\,936$ unité qui seront réutilisé par le secteur minier
- $136\,170 \cdot 0,05 \approx 6\,808$ unité qui seront utilisé par l'industrie forestière
- $208\,085 \cdot 0,2 \approx 41\,617$ unité qui seront utilisé par le secteur de transformation

Il nous reste donc $109\,362 - 10\,936 - 6\,808 - 41\,617 \approx 50\,000$ unités qui seront disponible pour la vente. Comme la demande externe peut changer à tout moment, il peut devenir pratique d'obtenir une formule permettant de trouver la production nécessaire par chacun des secteurs directement à partir de la demande externe, sans devoir résoudre le système d'équations linéaires à chaque fois. C'est là que la matrice inverse peut s'avérer particulièrement utile.

$$\begin{pmatrix} 0,9 & -0,05 & -0,2 \\ -0,1 & 0,9 & -0,2 \\ -0,3 & -0,4 & 0,9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,243 & 0,213 & 0,323 \\ 0,255 & 1,277 & 0,340 \\ 0,528 & 0,638 & 1,370 \end{pmatrix}$$

Donc si on dénote par :

- DM : demande minière externe
- DF : demande forestière externe
- DT : demande externe secteur des transformations
- PM : production minière nécessaire pour remplir la demande interne et externe

On obtient donc :

$$PM \approx 1,243DM + 0,213DF + 0,323DT$$

3.17 Application : Le problème des moindres carrés

Pour déterminer le chapitre, nous allons maintenant considérer un autre problème particulièrement important en lien avec l'algèbre linéaire qui apparaît très souvent dans les applications. Malheureusement, il nous sera impossible dans ce cours de justifier en détail pourquoi cette technique fonctionne. Nous avons vu depuis le début du chapitre qu'un système d'équations linéaires peut avoir soit 0, 1 ou une infinité de solution. Le cas idéal correspond habituellement à celui où nous avons exactement une solution. Le problème est qu'en pratique, lors de la collecte des données, il est fréquent de devoir faire des approximations, ou bien d'avoir quelques erreurs de mesure. Ceci fait qu'un système qui devrait normalement avoir une solution peut très bien se retrouver en avoir aucune. Le problème des moindres carrés consiste donc à chercher la solution qui est la plus proche d'être correcte. C'est normalement cette solution que nous aurions dû obtenir s'il n'y avait eu aucune erreur dans la collecte des données.

Théorème 3.17.1. Si $A\vec{x} = \vec{b}$ est un système d'équations linéaires n'ayant aucune solution, alors le vecteur qui est le plus proche (au sens des moindres carrés) d'être une solution est la solution du système d'équations linéaires suivant :

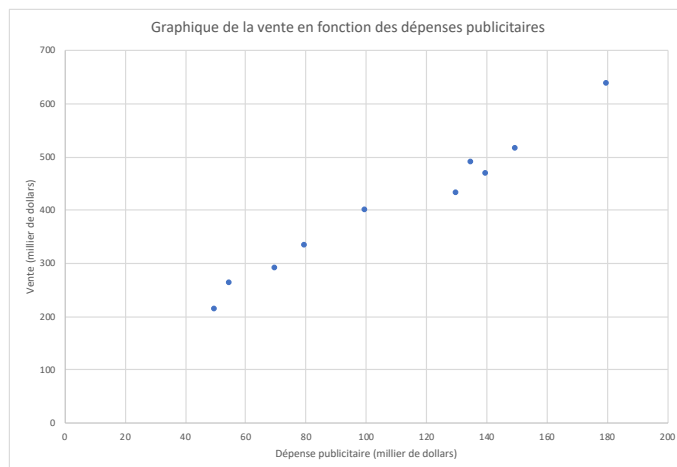
$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$$

- **Remarque 1 :** Certaines conditions sont nécessaires pour que le théorème soit valide. En particulier, les colonnes de la matrice A doivent être linéairement indépendantes. Nous allons cependant ignorer ces conditions dans ce cours.
- **Remarque 2 :** La justification complète de ce théorème est faite dans le cours d'algèbre linéaire 2. Elle consiste en trois parties :
 - La projection du vecteur $\vec{b}$ sur le sous-espace vectoriel $Im(A)$.
 - L'étude des bases orthonormales et de la méthode de Gram-Schmidt.
 - Les vecteurs de $Im(A)$ et de $ker(A^T)$ sont mutuellement orthogonaux.

Exemple 3.17.1. (Problème de régression linéaire) Dans une grande compagnie, on recueille les données suivantes comparant les ventes et les dépenses en publicité au cours des 10 dernières années. On souhaite trouver une expression permettant de relier ces deux variables.

Année	Publicité (x)	Vente (y)
1	50	212
2	55	261
3	70	289
4	80	333
5	100	399
6	130	431
7	135	488
8	140	467
9	150	515
10	180	635

(En millier de dollars)



À partir du graphique, on remarque facilement qu'il y a une relation (presque) linéaire entre les deux variables. On devrait donc pouvoir trouver des valeurs de m et b de sorte qu'on ait une relation de la forme

$$y = mx + b$$

En remplaçant les valeurs du tableau dans cette équation, on obtient donc le système d'équations linéaires

suivante :

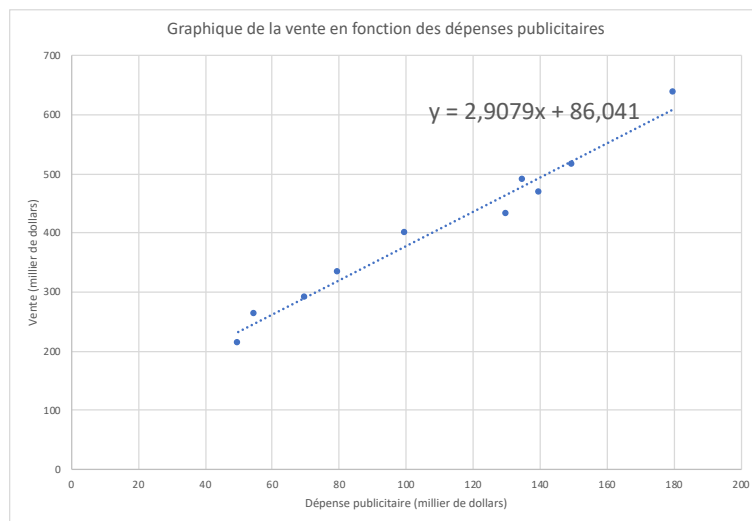
$$\begin{cases} 50m + b = 212 \\ 55m + b = 261 \\ 70m + b = 289 \\ 80m + b = 333 \\ 100m + b = 399 \\ 130m + b = 431 \\ 135m + b = 488 \\ 140m + b = 467 \\ 150m + b = 515 \\ 180m + b = 635 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 55 & 1 \\ 70 & 1 \\ 80 & 1 \\ 100 & 1 \\ 130 & 1 \\ 135 & 1 \\ 140 & 1 \\ 150 & 1 \\ 180 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 212 \\ 261 \\ 289 \\ 333 \\ 399 \\ 431 \\ 488 \\ 467 \\ 515 \\ 635 \end{pmatrix}$$

Il n'est pas très difficile de voir que ce système d'équations linéaires ne possède pas de solution. Nous allons donc le résoudre au sens des moindres carrés. On obtient donc le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 55 & 1 \\ 70 & 1 \\ 80 & 1 \\ 100 & 1 \\ 130 & 1 \\ 135 & 1 \\ 140 & 1 \\ 150 & 1 \\ 180 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 55 & 1 \\ 70 & 1 \\ 80 & 1 \\ 100 & 1 \\ 130 & 1 \\ 135 & 1 \\ 140 & 1 \\ 150 & 1 \\ 180 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 55 & 1 \\ 70 & 1 \\ 80 & 1 \\ 100 & 1 \\ 130 & 1 \\ 135 & 1 \\ 140 & 1 \\ 150 & 1 \\ 180 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 212 \\ 261 \\ 289 \\ 333 \\ 399 \\ 431 \\ 488 \\ 467 \\ 515 \\ 635 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 136450 & 1090 \\ 1090 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 490565 \\ 4030 \end{pmatrix}$$

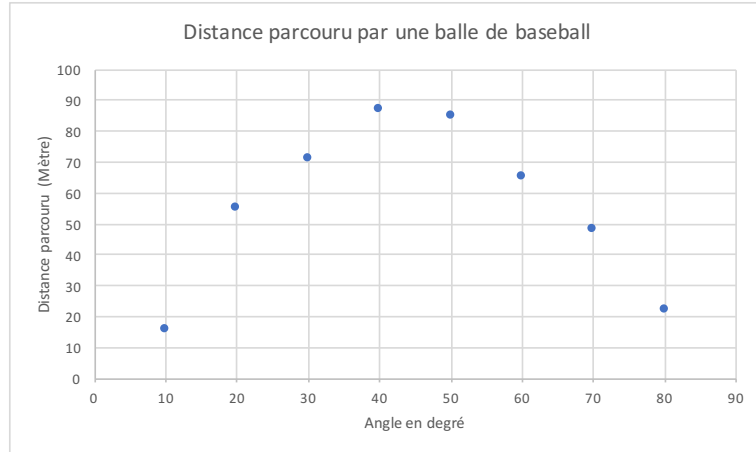
Qui a comme solution $m = 2,908$ et $b = 86,041$. L'équation de la droite des moindres carrés est donc :

$$y = 2,908x + 86,041$$



Exemple 3.17.2. (Régression quadratique) On cherche à trouver l'angle optimal nécessaire pour frapper une balle de baseball le plus loin possible. Pour ce faire, nous recueillons les données suivantes.

Angle (degré)	Distance (m)
10	16
20	55
30	71
40	87
50	85
60	65
70	48
80	22



On remarque d'après le graphique que la fonction décrivant la distance parcouru en fonction du temps correspond approximativement à une parabole. Nous allons donc chercher la parabole des moindres carrés. L'équation d'une parabole a la forme $y = ax^2 + bx + c$. En remplaçant les différents points dans cette équation, on obtient le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 100a + 10b + c = 16 \\ 400a + 20b + c = 55 \\ 900a + 30b + c = 71 \\ 1600a + 40b + c = 87 \\ 2500a + 50b + c = 85 \\ 3600a + 60b + c = 65 \\ 4900a + 70b + c = 48 \\ 6400a + 80b + c = 22 \end{cases}$$

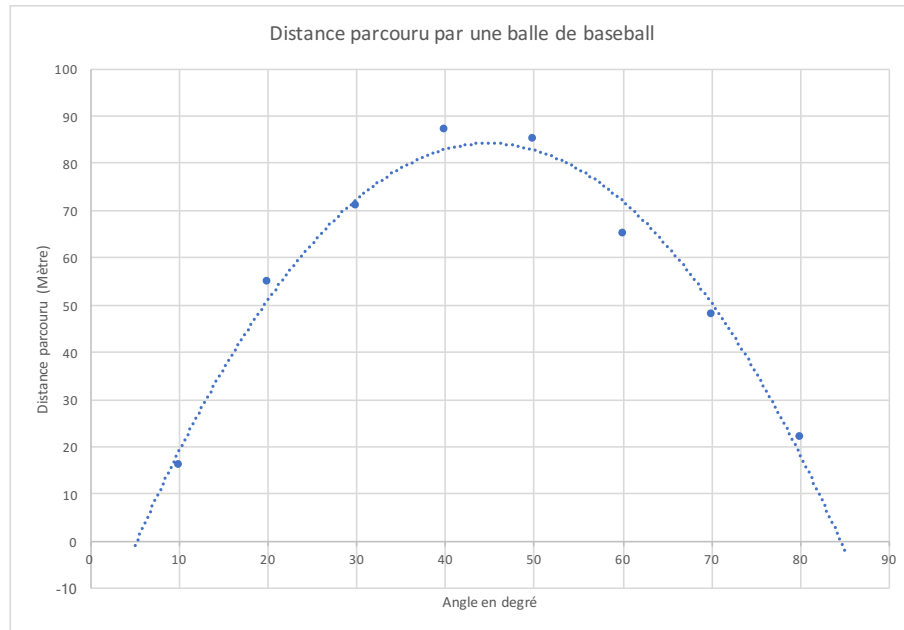
On doit donc chercher à résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 900 & 30 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \\ 2500 & 50 & 1 \\ 3600 & 60 & 1 \\ 4900 & 70 & 1 \\ 6400 & 80 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 900 & 30 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \\ 2500 & 50 & 1 \\ 3600 & 60 & 1 \\ 4900 & 70 & 1 \\ 6400 & 80 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 900 & 30 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \\ 2500 & 50 & 1 \\ 3600 & 60 & 1 \\ 4900 & 70 & 1 \\ 6400 & 80 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 16 \\ 55 \\ 71 \\ 87 \\ 85 \\ 65 \\ 48 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 87720000 & 1296000 & 20400 \\ 1296000 & 20400 & 360 \\ 20400 & 360 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1049200 \\ 20140 \\ 449 \end{pmatrix}$$

Ce qui a comme solution $a \approx -0,0535$, $b \approx 4,8006$ et $c \approx -23,4464$. L'équation de la parabole des moindres carrés est donc :

$$y = -0,0535x^2 + 4,8006x - 23,4464$$



Chapitre 4

Le déterminant

4.1 Introduction

Nous sommes maintenant prêt à étudier les déterminants dans toutes leur généralité, mais avons, rappelons quelques points intéressant. Pour le moment, nous avons vu seulement comment calculer le déterminant d'une matrice 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

et nous avons vu que cette quantité peut servir à calculer l'inverse d'une matrice, savoir si une matrice est inversible, vérifier si un système d'équations linéaire admet exactement une solution, calculer les solutions d'un système d'équations linéaires pour lequel il y a exactement une solution et finalement calculer l'aire d'un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$. Ces applications fonctionneront aussi pour des matrices $n \times n$ comme nous le verrons dans ce chapitre. Par contre, le calcul du déterminant deviendra de plus en plus complexes en augmentant la dimension de la matrice.

4.2 Le déterminant (cas général)

Le calcul peut se faire à partir de n'importe quel ligne ou colonne d'une matrice. Il faudra donc choisir une ligne ou une colonne avant de commencer. Normalement, pour facilité les calculs, on choisi le ligne ou la colonne contenant le plus de zéros. Posons :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarquez que la matrice doit obligatoirement être carré, autrement le déterminant n'est pas définie. Nous allons maintenant définir le mineur i, j de la matrice A , dénoté M_{ij} comme étant le déterminant de la matrice A à laquelle nous avons retiré la i -ième ligne et la j -ième colonne.

Exemple 4.2.1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors on a :

$$M_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

On définit maintenant le cofacteur i, j , dénoté C_{ij} comme étant :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Et finalement on définit le déterminant d'une matrice $n \times n$ avec $n \geq 3$ comme étant :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ik} C_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{kj} C_{kj}, \quad \text{avec } 1 \leq k \leq n$$

où k représente dans la première somme la ligne choisi, et dans la deuxième somme la colonne choisi.

Exemple 4.2.2. On veut calculer le déterminant suivant en utilisant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = 0$$

Exemple 4.2.3. On veut calculer à nouveau le déterminant de l'exemple précédent, mais cette fois en utilisant la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2(-6) + 5(-12) - 8(-6) = 0$$

Exemple 4.2.4. On veut calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Remarquez qu'il y a plusieurs 0, ce qui va nous faciliter un peu la tâche. Nous allons utiliser la 3e ligne pour faire nos calcul :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \left(1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right) - 4 \left(-1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2(13) - 4(-1(-3) + (-9)) \\ &= 26 - 4(-6) \\ &= 50 \end{aligned}$$

Théorème 4.2.1. Si A est une matrice carré triangulaire ou diagonale, alors le déterminant de A est le produit des éléments sur sa diagonale principale.

Exemple 4.2.5. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 15 = 11700$$

4.3 Déterminant et produit vectoriel

Dans le chapitre 1, nous avons vu que le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est définie comme étant :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

Remarquez que les termes de droite ressemble étrangement à des déterminants. C'est effectivement le cas. On pourra donc écrire le produit vectoriel sous la forme suivante qui est plus facile à retenir :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

où $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ représente la base habituelle de $\mathbb{R}^3$ que nous avons définie dans le chapitre précédent.

Exemple 4.3.1. On veut calculer le produit vectoriel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + 28\vec{j} - 13\vec{k} = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ -13 \end{pmatrix}$$

4.4 Théorème de la matrice inverse

Les déterminants ont plusieurs propriétés intéressantes, et la plupart des applications viennent du théorème ci dessous qui porte le nom de théorème de la matrice inverse :

Théorème 4.4.1. (Théorème de la matrice inverse) Si A est une matrice carré de dimension $n \times n$, alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. La matrice A est inversible
2. $\det(A) \neq 0$
3. Le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{0}$ a une unique solution
4. Le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ a une unique solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$
5. $\text{rang}(A) = n$
6. $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$
7. $\text{nullite}(A) = 0$
8. $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$

Exemple 4.4.1. Est-ce que la matrice A ci dessous est inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, nous avons tout simplement à calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

La matrice n'est donc pas inversible.

4.5 Calcul de la matrice inverse

Maintenant que nous avons définie le déterminant pour toutes matrices carrés, nous sommes maintenant prêt à donner une formule permettant de calculer l'inverse d'une matrice carré. Pour ce faire, commençons par rappeler que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dans le cas général, la formule sera cependant un peu plus compliqué.

Définition 4.5.1. Si A est une matrice carré, alors on définit la matrice des cofacteurs, notée $Cof(A)$ comme étant la matrice :

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 4.5.1. Si A est une matrice carré inversible (C'est à dire $det(A) \neq 0$), alors on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} [Cof(A)]^T$$

Exemple 4.5.1. Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour utiliser la formule, on doit commencer par calculer le déterminant. On a donc :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 8 - 2(0) + 3(-2) = 2$$

On obtient donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquez qu'en général, la méthode de Gauss-Jordan est beaucoup plus efficace pour calculer l'inverse d'une matrice. Par contre, la méthode ci dessus peut s'avérer parfois très utile.

4.6 Aire et volume

Nous avons déjà vu que l'aire d'un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$ est donné par :

$$\text{Aire} = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right)$$

où les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont les vecteurs qui engendrent le parallélogramme. Nous avons aussi vu au chapitre 1 que le volume d'un parallélépipède engendré par des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est donné par :

$$\text{Volume} = \text{abs} (\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}))$$

À l'aide du déterminant, nous pouvons maintenant réécrire cette dernière équation sous forme d'un déterminant. C'est ce que nous donne le théorème suivant :

Théorème 4.6.1.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, l'aire d'un parallélogramme engendré par des vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

est donné par :

$$\text{Aire} = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

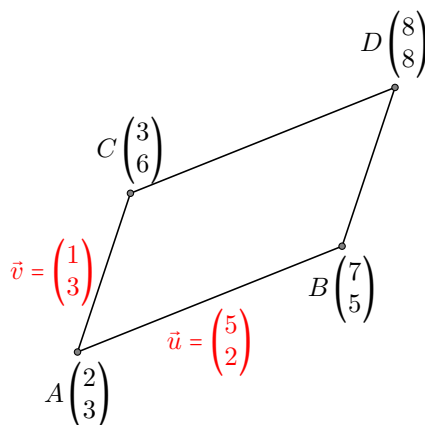
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le volume d'un parallélépipède engendré par des vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

est donné par :

$$\text{Volume} = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \right)$$

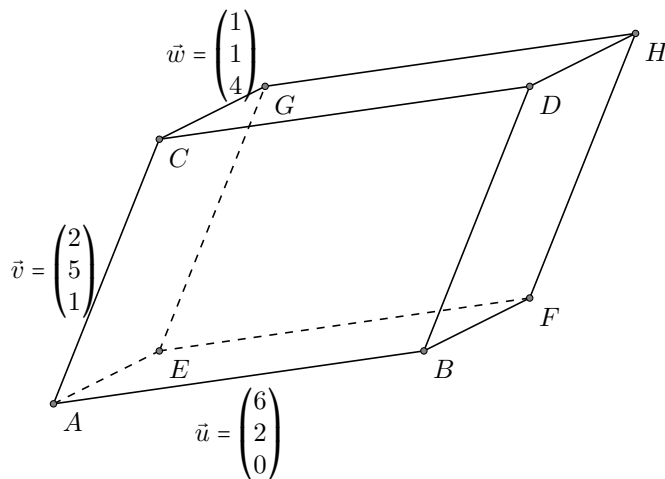
Exemple 4.6.1. Trouver l'aire du parallélogramme suivant :



On doit commencer par trouver les vecteurs définissant les côtés. C'est ce que nous avons fait en rouge. En utilisant le théorème on a donc :

$$\text{Aire} = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = \text{abs}(2 - 15) = \text{abs}(-13) = 13$$

Exemple 4.6.2. Trouver le volume du parallélépipède suivant :



En utilisant le théorème, on obtient donc :

$$\text{Volume} = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right) = \text{abs} \left(-1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right) = \text{abs}(-4 + 104) = \text{abs}(100) = 100$$

4.7 La méthode de Cramer (Le cas général)

Nous allons maintenant voir comment on peut généraliser la méthode de Cramer pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à n inconnus et n équations. Rappelons premièrement que cette méthode fonctionne uniquement dans le cas où le système d'équations linéaires possède une unique solution, ce qui peut facilement se vérifier en utilisant le théorème de la matrice inverse.

Considérons le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On va dénoté par A la matrice des coefficients. C'est à dire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le théorème de la matrice inverse nous dit donc que le système d'équations linéaires a une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$. On va maintenant dénoté par A_{x_i} la matrice A pour laquelle nous avons remplacé la i -ème colonne de A par les coefficients b_i .

$$A_{x_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 4.7.1. Le système d'équations $A\vec{x} = \vec{b}$ ci haut possède une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, nous avons :

$$x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$$

Exemple 4.7.1. On veut utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = -11 \\ 3x + 8y + 12z = 4 \\ 2x + 5z = 1 \end{cases}$$

On doit donc calculer les 4 déterminants suivants :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 8 & 12 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2(-64) + 5(14) = -58$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} -11 & -2 & 5 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -11 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -64 + 5(-80) = -464$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & -11 & 5 \\ 3 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 11 \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(8) + 11(-9) + 5(-5) = -116$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -11 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -11 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2(80) + 1(14) = 174$$

Ce qui nous donne :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-464}{-58} = 8$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-116}{-58} = 2$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{174}{-58} = -3$$

4.8 Propriétés des déterminants

Depuis le début du chapitre, nous avons calculer plusieurs déterminant. Par contre, la seule stratégie que nous avons était d'utiliser la ligne ou la colonne ayant le plus de zéro. Nous avons aussi vu que le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est particulièrement simple, il s'agit de multiplier les éléments de la diagonale. Dans cette section, nous allons étudier certaine propriétés des déterminants, qui nous permettrons dans la section suivante de simplifier nos calculs.

Théorème 4.8.1. Si A et B sont des matrices de dimension $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. $\det(A^T) = \det(A)$
2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, si A est inversible
3. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Exemple 4.8.1. Sachant que A et B sont des matrices de dimension 5×5 , $\det(A) = 3$ et $\det(B) = 4$, on veut calculer $\det(AB)$, $\det(A^{-1})$ et $\det(6A)$. En utilisant le théorème précédent, on a donc :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{3}$$

$$\det(6A) = 6^5 \det(A) = 6^5 \cdot 3 = 23328$$

4.9 Opérations sur les lignes pour le calcul du déterminant

Nous allons maintenant voir que les opérations élémentaires que nous avons vu dans la méthode de Gauss peuvent être utilisées pour calculer le déterminant d'une matrice. Par contre, il faut faire attention, car même si les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires, ils changent dans certains cas la valeur du déterminant.

Théorème 4.9.1. Si A est une matrice de dimension $n \times n$, alors

1. $L_i + cL_j \rightarrow L_i$ ne change pas la valeur du déterminant si $i \neq j$
2. $cL_i \rightarrow L_i$ multiplie la valeur du déterminant par c
3. $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe du déterminant si $i \neq j$

Nous pouvons donc utiliser ces opérations pour transformer une matrice carrée A sous forme triangulaire de sorte qu'il soit facile de calculer son déterminant.

Exemple 4.9.1. On veut utiliser le théorème précédent pour calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} && L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} && L_3 - 7L_1 \rightarrow L_3 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} && L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3 \\ &= 1 \cdot (-3) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemple 4.9.2. On veut calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Exemple 4.9.3. On veut calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -22 & -11 & 6 & -6 \\ 0 & -19 & -10 & 10 & -11 \\ 0 & -8 & 4 & 11 & -3 \\ 0 & -51 & -20 & 10 & -31 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - L_1 \rightarrow L_4 \\ L_5 - 6L_1 \rightarrow L_5 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -22 & -11 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 53/11 & -64/11 \\ 0 & 0 & 8 & 97/11 & -9/11 \\ 0 & 0 & 11/2 & -43/11 & -188/11 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_3 - \frac{19}{22}L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 - \frac{8}{22}L_2 \rightarrow L_4 \\ L_5 - \frac{51}{22}L_2 \rightarrow L_5 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -22 & -11 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 53/11 & -64/11 \\ 0 & 0 & 0 & 945/11 & -1033/11 \\ 0 & 0 & 0 & 540/11 & -892/11 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_4 + 16L_3 \rightarrow L_4 \\ L_5 + 11L_3 \rightarrow L_5 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -22 & -11 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 53/11 & -64/11 \\ 0 & 0 & 0 & 945/11 & -1033/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -192/7 \end{vmatrix} && L_5 - \frac{540}{945}L_4 \rightarrow L_5 \\ &= 1 \cdot (-22) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{945}{11}\right) \cdot \left(\frac{-192}{7}\right) \\ &= -25920 \end{aligned}$$

Remarquez que règle générale, plus la matrice est de grande dimension, plus la méthode que nous venons de voir sera efficace en comparaison avec la méthode que nous avons vu en début de chapitre. Pour vous en convaincre, vous pouvez essayer de recalculer le déterminant de l'exemple précédente en décomposant le déterminant selon une ligne ou colonne de votre choix.

Chapitre 5

Les droites et les plans

5.1 Les droites dans $\mathbb{R}^2$

Nous allons maintenant essayer d'appliquer la théorie que nous avons vu depuis le début du cours à l'étude des droites et des plans en 2 et 3 dimensions, en commençant par les droites dans $\mathbb{R}^2$. Ces dernières devraient être familières car vous les avez déjà étudiées en partie durant votre cours secondaire, et même dans un cours de calcul si vous l'avez déjà suivi.

Rappelons premièrement qu'au secondaire vous avez appris que l'équation d'une droite est une équation de la forme :

$$y = mx + b$$

où m est la pente que l'on peut calculer à l'aide de la formule

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

et b est l'ordonnée à l'origine.

Cet équation a plusieurs avantages. Premièrement, elle est écrite sous forme de fonction. En effet, nous aurions très bien pu écrire $f(x) = mx + b$ à la place de $y = mx + b$. De plus, cette forme de l'équation d'une droite est particulièrement utile en calcul différentiel et intégral car pour trouver l'équation de la droite tangente d'une fonction $g(x)$ en un point x_0 , le m n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction en ce point.

C'est à dire $m = \frac{dg}{dx}(x_0)$.

Par contre, cet équation possède aussi plusieurs inconvénients, et sera la plupart du temps à éviter en algèbre linéaire :

1. Pouvez-vous trouver une équation de la forme $y = mx + b$ qui décrit une droite verticale passant par le point $(1, 2)$?
2. De quel façon pourrions-nous généraliser cet équation pour nous permettre de trouver l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$?

Dans les deux cas, il nous sera impossible de répondre de façon satisfaisante à la question, qui devrait pourtant être relativement simple. Il nous sera donc nécessaire d'écrire l'équation d'une droite sous une autre forme qui nous sera plus pratique. En fait, nous n'allons pas voir seulement une forme, mais plutôt 4 formes différentes qui nous seront particulièrement utiles dépendant du contexte. Mais avant une petite définition.

Définition 5.1.1. On appelle vecteur directeur d'une droite d_1 un vecteur qui est dans la même direction que la droite d_1 . On appelle vecteur normal d'une droite d_1 un vecteur qui est perpendiculaire à la droite d_1 .

Voici les 5 formes de l'équations d'une droite dans $\mathbb{R}^2$ que nous allons étudier.

Nom	Forme	Description
Fonctionnelle	$y = mx + b$	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est la pente b est l'ordonnée à l'origine
Normale	$ax + by + c = 0$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal
Symétrique	$\frac{x - p_1}{a} = \frac{y - p_2}{b}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ est un point de la droite
Vectorielle	$\vec{x} = k\vec{v} + P, \quad k \in \mathbb{R}$	$\vec{v}$ est un vecteur directeur P est un point de la droite
Paramétrique	$\begin{cases} x = v_1 k + p_1 \\ y = v_2 k + p_2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ est un point de la droite

Comme première étape, nous allons devoir apprendre à utiliser chacune de ces formes, et passer d'une forme à une autre. Remarquez que seule la première forme (la forme fonctionnelle) est unique. Par contre, la forme fonctionnelle d'une droite n'existe pas lorsque la droite en question est verticale.

Exemple 5.1.1. On veut trouver un équation normale, symétrique, vectorielle et paramétrique d'une droite passant par les points $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$. Pour ce faire, commençons par trouver un vecteur directeur $\vec{v}$ et un vecteur normal $\vec{n}$. On a donc :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 9 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Remarquez qu'il y avait plusieurs possibilités. Nous pouvons maintenant écrire facilement un équation symétrique, vectorielle et paramétrique de la droite :

$$\text{Symétrique : } \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{7}$$

$$\text{Vectorielle : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Paramétrique : } \begin{cases} x = 4k + 1 \\ y = 7k + 2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

L'équation normale va nous demander légèrement plus de travail. Nous savons déjà que l'équation aura la forme :

$$-7x + 4y + c = 0$$

il ne nous reste plus qu'à trouver la valeur de c en utilisant un point :

$$-7(1) + 4(2) + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

Ce qui nous donne :

$$-7x + 4y - 1 = 0$$

Exemple 5.1.2. Sachant que l'équation paramétrique d'une droite est donné par :

$$\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = -2k - 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

trouver un équation normale, symétrique et vectorielle de cette même droite. L'équation paramétrique nous donne deux informations particulièrement importante : un point et un vecteur directeur. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

À partir du vecteur directeur, il nous est maintenant facile de trouver un vecteur normal. On a donc :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet maintenant d'écrire facilement l'équation vectoriel et symétrique de la droite :

$$\text{Symétrique : } \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-2}$$

$$\text{Vectorielle : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Finalement, encore une fois, pour l'équation normale nous avons un peu plus de travail à faire. Nous savons que l'équation doit avoir la forme : $2x + 5y + c = 0$, il nous reste donc à trouver la valeur de c à partir d'un point.

$$2(2) + 5(-3) + c = 0 \Rightarrow c = 11$$

Ce qui nous donne l'équation normal suivante :

$$2x + 5y + 11 = 0$$

En utilisant les différentes forme de l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$, nous allons maintenant pouvoir répondre à différentes questions d'intérêt :

1. Quelle est la position relative de deux droites. Sont-elles confondu, parallèles disjointes, perpendiculaire, ou sécante non perpendiculaire ?
2. Quelle est la plus courte distance entre un point et une droite ?
3. Quelle est la plus courte distance entre deux droites parallèles ?
4. Quel est le point d'intersection de deux droites non parallèles ?
5. Quel est l'angle entre deux droites sécantes ?

Exemple 5.1.3. On veut trouver le point d'intersection (s'il y en a) des deux droites suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2k + 5 \\ y = 3k + 1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 4t + 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On doit donc commencer par résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2k + 5 = 3t - 1 \\ 3k + 1 = 4t + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2k - 3t = -6 \\ 3k - 4t = 1 \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -6 \\ 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \sim^{2L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 20 \end{array} \right)$$

Ce qui nous donne $t = 20$ et $k = 27$. Pour trouver le point d'intersection, il nous suffit donc de remplacer le k dans l'équation de la droite d_1 ou de remplacer le t dans l'équation de la droite d_2 . On obtient donc :

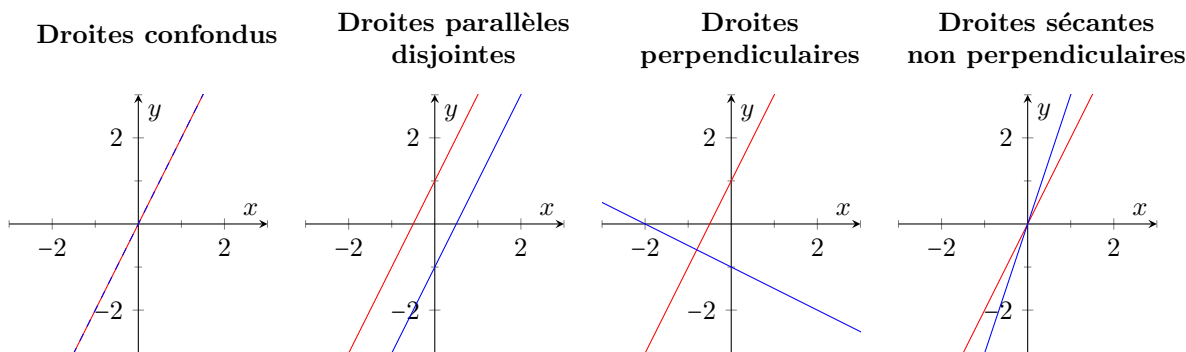
$$\begin{cases} x = 2(27) + 5 = 59 \\ y = 3(27) + 1 = 82 \end{cases}$$

Le point d'intersection est donc :

$$P = \begin{pmatrix} 59 \\ 82 \end{pmatrix}$$

Théorème 5.1.1. (Position relative de deux droites) Si d_1 et d_2 sont des droites dans $\mathbb{R}^2$, alors exactement un des 4 cas ci dessous est vrai :

1. Les droites sont confondues (i.e. il s'agit de la même droite)
2. Les droites sont parallèles disjointes
3. Les droites sont perpendiculaires
4. Les droites sont sécantes non perpendiculaires



Pour trouver la position relative de deux droites, nous avons le tableau suivant pour nous aider à faire la distinction entre chacun des cas.

	confondus	parallèles disjointes	perpendiculaires	sécantes non perpendiculaires
Nombre de points d'intersection ?	∞	0	1	1
Vecteurs directeurs dans la même direction ?	Oui	Oui	Non	Non
Vecteurs normaux dans la même direction ?	Oui	Oui	Non	Non
Produit scalaire des vecteurs directeurs ?	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Produit scalaire des vecteurs normaux ?	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$

Exemple 5.1.4. Trouver la position relative des deux droites suivantes :

$$d_1 : 5x - 3y + 2 = 0$$

$$d_2 : 2x + y - 5 = 0$$

Pour ce faire, commençons par trouver les points d'intersections des deux droites. Ceci nous permettra de savoir si les deux droites sont parallèles. Pour ce faire, on écrit le tout sous forme de système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Puis on applique la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim_{5L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 29 \end{array} \right)$$

Ce qui nous donne le point d'intersection suivant :

$$P = \left(\frac{13}{11}, \frac{29}{11} \right)$$

Comme il y a un point d'intersection, les deux droites ne peuvent donc pas être parallèles. Nous allons maintenant vérifier si elles sont perpendiculaires. Pour ce faire, nous allons calculer le produit scalaire de leur vecteurs normaux.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 - 3 = 7$$

Comme le produit scalaire n'est pas zéro, les droites ne sont pas perpendiculaires. On peut donc conclure qu'elles sont sécantes non perpendiculaires.

Exemple 5.1.5. On veut trouver la position relative des deux droites suivantes :

$$d_1 : \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{2}$$

$$d_2 : \frac{x-3}{20} = \frac{y-5}{8}$$

Pour ce faire, commençons par vérifier si les vecteurs normaux sont dans la même direction. On doit donc vérifier si le système d'équations linéaires suivant possède des solutions :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

On trouve facilement la solution $k = \frac{1}{4}$. Les droites sont donc parallèles. Il ne nous reste plus qu'à vérifier si elles sont confondues ou disjointes. Pour ce faire, vérifions si le point $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de la droite d_1 appartient aussi à la droite d_2 .

$$\frac{2-3}{20} \neq \frac{3-5}{8}$$

Les deux droites doivent donc être disjointes. On conclut donc que les droites sont parallèles disjointes.

Théorème 5.1.2. (Angle entre deux droites) Si d_1 et d_2 sont des droites dans le plan ($\mathbb{R}^2$) qui ne sont pas parallèles, ayant comme vecteurs directeurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ respectivement, et ayant comme vecteurs normaux $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ respectivement, alors l'angle entre les deux droites est donné par :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$$

Exemple 5.1.6. On veut trouver l'angle entre les deux droites suivantes :

$$d_1 : 3x + 4y - 1 = 0$$

$$d_2 : x - 2y + 5 = 0$$

Pour ce faire, on commence par trouver les vecteurs normaux :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Puis on applique la formule :

$$\cos(\theta) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-5}{5\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 117^\circ$$

Théorème 5.1.3. (Distance entre un point et une droite)

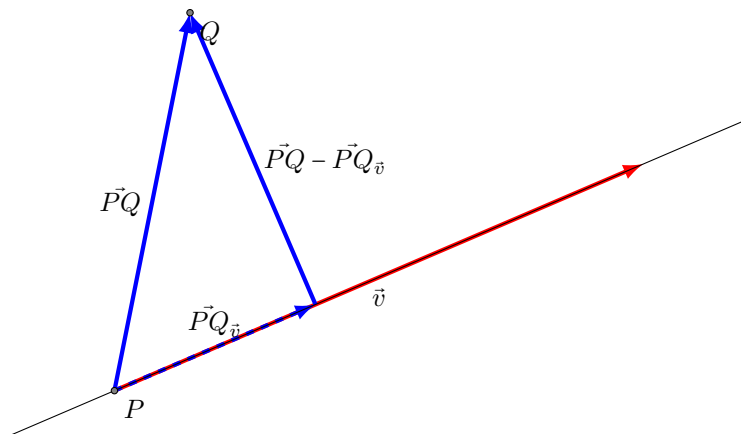
1. Si $d : \vec{x} = k\vec{v} + P$ est l'équation vectorielle d'une droite, et Q est un point qui n'est pas dans la droite, alors la plus courte distance entre la droite d et le point Q est donné par :

$$distance = \|\vec{PQ} - \vec{PQ}_{\vec{v}}\|$$

2. Si $d : ax + by + c = 0$ est l'équation normale d'une droite, et $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est un point qui n'est pas dans la droite. Alors la plus courte distance entre la droite et le point est donné par :

$$distance = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Démonstration. La démonstration de la première formule se fait essentiellement à l'aide du schéma ci dessous. Les détails vous sont laissés en exercice.



Pour ce qui est de la seconde formule, il nous faut faire un peu plus de travail. pour ce faire, considérons une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ qui ne fait pas partie de la droite. En regardant le schéma ci dessus, on remarque que le vecteur $\vec{PQ} - \vec{PQ}_{\vec{v}}$ n'est en fait que le vecteur $\vec{PQ}_{\vec{n}}$, où $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite. Pour calculer la distance, nous aurons donc besoin de trouver un vecteur normal $\vec{n}$ et d'un point de la droite P . On peut prendre par exemple :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

avec $ap + bq + c = 0$. Dans ce cas, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Distance} &= \|\vec{PQ}_{\vec{n}}\| = \left\| \left(\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \right) \vec{n} \right\| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{\left| \begin{pmatrix} p - x_0 \\ q - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a(p - x_0) + b(q - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|(ap + bq) - (ax_0 + by_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

□

Exemple 5.1.7. On veut trouver la plus courte distance entre le point $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite d'équation

$$d : 4x - 2y + 5 = 0$$

En utilisant la seconde formule pour le calcul de la distance entre un point et une droite, on obtient :

$$\text{distance} = \frac{4(1) - 2(2) + 5}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}}$$

Exemple 5.1.8. On veut trouver la plus courte distance entre le point $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite d'équation

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 4k + \frac{9}{2} \end{cases}$$

Remarquez qu'il s'agit exactement de la même droite que dans l'exemple précédent, mais cette fois écrit sous forme paramétrique. Dans ce cas, nous pouvons utiliser la première formule pour faire notre calcul :

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
distance &= \|\vec{PQ} - \vec{PQ}_{\vec{v}}\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix} - \frac{-10}{20} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, un peu d'arithmétique nous permet facilement de vérifier qu'il s'agit bien de la même réponse que nous avons obtenu précédemment.

Théorème 5.1.4. (Distance entre deux droites parallèles) Si d_1 et d_2 sont des droites parallèles, alors on peut calculer la plus courte distance entre ces deux droites en calculant la plus courte distance d'un point quelconque de la première droite, et la seconde droite.

Exemple 5.1.9. On veut calculer la plus courte distance entre les deux droites suivantes :

$$d_1 : 2x + 3y + 4 = 0$$

$$d_2 : 6x + 9y + 5 = 0$$

On remarque facilement que les deux droites sont parallèles car leur vecteur normaux sont dans la même direction. En effet, nous avons :

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Nous allons donc choisir un point de la première droite. On peut prendre par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Et nous allons calculer la distance entre ce point et la droite d_2 . Nous avons donc :

$$distance = \frac{|6(-5) + 9(2) + 5|}{\sqrt{6^2 + 9^2}} = \frac{7}{\sqrt{117}}$$

5.2 Les droites dans $\mathbb{R}^3$

Nous allons maintenant essayer de généraliser l'étude des droites que nous venons de faire dans $\mathbb{R}^2$, à l'étude des droites dans l'espace ($\mathbb{R}^3$). Quelques difficultés vont cependant se poser. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, deux droites peuvent n'avoir aucun point d'intersection et ne pas être parallèles. On appelle de telle droite, des droites gauches. De plus, les équations fonctionnelles et normales n'ont aucun sens pour les droites de $\mathbb{R}^3$. Finalement, la notion de vecteurs normaux nous sera pratiquement inutile, car elle ne nous donnera pas grande information sur la direction d'une droite dans $\mathbb{R}^3$. Nous serons donc ramener à utiliser uniquement les trois formes suivantes :

Nom	Forme	Description
Symétrique	$\frac{x-p_1}{a} = \frac{y-p_2}{b} = \frac{z-p_3}{c}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ est un point de la droite
Vectorielle	$\vec{x} = k\vec{v} + P, \quad k \in \mathbb{R}$	$\vec{v}$ est un vecteur directeur P est un point de la droite
Paramétrique	$\begin{cases} x = v_1k + p_1 \\ y = v_2k + p_2 \\ z = v_3k + p_3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ est un point de la droite

Nous allons donc maintenant nous intéresser aux mêmes questions que dans la section précédente.

Definition 5.2.1. On appelle deux droites des **droites gauches** si elles n'ont aucun point d'intersection et elle ne sont pas parallèles.

Théorème 5.2.1. (Position relative de deux droites) Si d_1 et d_2 sont des droites dans $\mathbb{R}^3$, alors exactement un des 5 cas ci dessous est vrai :

1. Les droites sont confondues (i.e. il s'agit de la même droite)
2. Les droites sont parallèles disjointes
3. Les droites sont sécantes perpendiculaires
4. Les droites sont sécantes non perpendiculaires
5. Les droites sont gauches

Pour trouver la position relative de deux droites, nous avons le tableau suivant pour nous aider à faire la distinction entre chacun des cas.

	confondus	parallèles disjointes	sécantes perpendiculaires	sécantes non perpendiculaires	gauches
Nombre de points d'intersection ?	∞	0	1	1	0
Vecteurs directeurs dans la même direction ?	Oui	Oui	Non	Non	Non
Produit scalaire des vecteurs directeurs ?	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	Aucun info

Exemple 5.2.1. Trouver la position relative des deux droites suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = -k + 1 \\ z = 5k + 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 5r + 10 \\ y = 2r + 2 \\ z = -3r + 5 \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}$$

On va donc commencer par regarder combien de point d'intersection il y a en résolvant le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2k + 3 = 5r + 10 \\ -k + 1 = 2r + 2 \\ 5k + 3 = -3r + 5 \end{cases} \implies \begin{cases} 2k - 5r = 7 \\ -k - 2r = 1 \\ 5k + 3r = 2 \end{cases}$$

Que l'on va résoudre à l'aide de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \begin{matrix} 2L_2 + L_1 \rightarrow L_2 \\ 2L_3 - 5L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 31 & -31 \end{array} \right) \sim^{9L_3 + 31L_2 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Comme ce système a exactement une solution, on peut donc déduire que les droites sont sécantes. Il ne nous reste plus qu'à vérifier si elles sont perpendiculaires ou non. Pour ce faire, nous allons calculer le produit scalaire des vecteurs directeurs.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 10 - 2 - 15 = -7$$

Comme le produit scalaire n'est pas zéro, on peut donc conclure que les deux droites sont sécantes non perpendiculaire.

Théorème 5.2.2. (Distance entre un point et une droite) Si $d : \vec{x} = k\vec{v} + P$, $k \in \mathbb{R}$ est l'équation vectorielle d'une droite, et Q est un point qui n'est pas sur la droite. Alors la plus courte distance entre P et d est donné par :

$$distance = \|\vec{PQ} - \vec{PQ}_{\vec{v}}\| = \frac{\|\vec{PQ} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Théorème 5.2.3. (Distance entre deux droites gauches) Si $d_1 : \vec{x} = r\vec{u} + P$, $r \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \vec{x} = s\vec{v} + Q$, $s \in \mathbb{R}$, sont des droites non parallèle, alors la plus courte distance entre d_1 et d_2 est donné par :

$$distance = \frac{\|\vec{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|det(\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Exemple 5.2.2. On veut trouver la plus courte distance entre les deux droites suivantes.

$$d_1 : \begin{cases} x = 2k + 7 \\ y = -k + 1 \\ z = 5k + 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 5r + 10 \\ y = 2r + 2 \\ z = -3r + 5 \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Nous allons donc commencer par vérifier que les deux droites sont bien gauches. Pour ce faire, commençons par trouver combien il y a de points d'intersection en résolvant le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2k + 7 = 5r + 10 \\ -k + 1 = 2r + 2 \\ 5k + 3 = -3r + 5 \end{cases} \implies \begin{cases} 2k - 5r = 3 \\ -k - 2r = 1 \\ 5k + 3r = 2 \end{cases}$$

Ce qui nous donne en appliquant la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \begin{matrix} 2L_2 + L_1 \rightarrow L_2 \\ 2L_3 - 5L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 3 \\ 0 & -9 & 5 \\ 0 & 31 & -11 \end{array} \right) \sim^{9L_3 + 31L_2 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 3 \\ 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 56 \end{array} \right)$$

Comme ce système n'a aucune solution, les droites sont donc soit parallèle disjointe ou gauches. Pour le savoir, il s'agit de vérifier si les vecteurs directeurs sont dans la même direction. On va donc vérifier si le système d'équations linéaires suivant possède des solutions :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que ce système n'a aucune solution. On peut donc conclure que les deux droites sont gauches.

On va maintenant utiliser la formule du théorème ci dessus pour calculer la distance entre les deux droites. On a donc :

$$distance = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 31 \\ 9 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -7 \\ 31 \\ 9 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{28}{\sqrt{1091}}$$

Théorème 5.2.4. (Distance entre deux droites parallèles) Pour trouver la plus courte distance entre deux droites parallèles, il s'agit de choisir un point de la première droite, et de trouver sa distance avec la deuxième droite.

5.3 Les plans dans $\mathbb{R}^3$

Pour terminer le chapitre, nous allons maintenant étudier les plans dans $\mathbb{R}^3$. Pour ce faire, nous aurons 3 formes avec lesquels nous pourrions travailler. Remarquez qu'il y a une difficulté particulière à faire attention. Dans le cas des droites de $\mathbb{R}^3$, nous avons vu qu'un seul vecteur directeur suffit pour définir la direction de la droite, par contre un vecteur normal n'est pas suffisant. Dans le cas des plans dans $\mathbb{R}^3$, nous aurons alors besoin de deux vecteurs directeurs pour décrire l'orientation du plan, par contre, un seul vecteur normal est suffisant.

Nom	Forme	Description
Normale	$ax + by + cz + d = 0$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal
Vectorielle	$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + P, \quad r, s \in \mathbb{R}$	$\vec{u}, \vec{v}$ sont des vecteurs directeurs P est un point du plan
Paramétrique	$\begin{cases} x = u_1r + v_1s + p_1 \\ y = u_2r + v_2s + p_2 \\ z = u_3r + v_3s + p_3 \end{cases}, \quad r, s \in \mathbb{R}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs du plan $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ est un point du plan

Exemple 5.3.1. Trouver une équation normale du plan π ayant l'équation paramétrique suivante :

$$\pi : \begin{cases} x = 2r + 3s - 1 \\ y = r + s + 2 \\ z = -r + 2s + 5 \end{cases}$$

Pour ce faire, on va commencer par trouver un vecteur normal au plan en calculant le produit vectoriel des deux vecteurs directeurs que l'équation paramétrique nous fournit. On a donc :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'équation normale aura donc la forme suivante :

$$3x - 7y - z + d = 0$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver la valeur de d en utilisant un point. On a donc :

$$3(-1) - 7(2) - (5) + d = 0 \quad \implies \quad d = 22$$

L'équation normale est donc :

$$\pi : 3x - 7y - z + 22 = 0$$

Exemple 5.3.2. Trouver une équation paramétrique du plan d'équation normale suivante :

$$\pi : x + 2y + 3z + 4 = 0$$

Pour ce faire, nous avons besoin de calculer 3 points de ce plan. En choisissant en tour de rôle deux variables comme étant zéro, et en calculant la troisième, on obtient les trois points suivants :

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En prenant les vecteurs $\vec{PQ}$ et $\vec{QR}$ comme étant les vecteurs directeurs, et en utilisant le point R , on obtient donc l'équation paramétrique suivante :

$$\pi : \begin{cases} x = -4s - 4 \\ y = -2r + 2s \\ z = \frac{4r}{3} \end{cases}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Remarquez que nous aurions très bien pu utiliser le vecteur directeur $3\vec{PQ}$ plutôt que $\vec{PQ}$ pour éviter de devoir travailler avec des fractions. Nous aurions alors obtenu une équation qui en apparence serait différente, mais représenterait bel et bien le même plan.

Nous allons maintenant nous intéresser à des questions similaires aux deux sections précédentes, en commençant par la position relative de deux plans.

Théorème 5.3.1. (Position relative de deux plans) Si π_1 et π_2 sont des plans dans $\mathbb{R}^3$, alors exactement un des 4 cas ci dessous est vrai :

1. Les plans sont parallèles disjoints
2. Les plans sont confondus
3. Les plans sont sécants perpendiculaires
4. Les plans sont sécants non perpendiculaires
5. Les droites sont gauches

Pour trouver la position relative de deux droites, nous avons le tableau suivant pour nous aider à faire la distinction entre chacun des cas.

	confondus	parallèles disjoints	sécants perpendiculaires	sécants non perpendiculaires
points d'intersection ?	un plan	aucun	une droite	une droite
Vecteurs normaux dans la même direction ?	Oui	Oui	Non	Non
Produit scalaire des vecteurs normaux ?	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$

Exemple 5.3.3. On veut trouver la position relative des deux plans suivant :

$$\pi_1 : 4x + 3y + 5z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : 5x + 5y - 7z + 3 = 0$$

Pour ce faire, commençons par trouver l'ensemble des points d'intersection de ces deux plans en utilisant la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & -7 & -3 \end{array} \right) \sim^{4L_2 - 5L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -53 & -7 \end{array} \right)$$

Comme ce système d'équations linéaire a exactement un paramètre libre, alors l'ensemble des points d'intersection de ces deux plans forme une droite. Les deux plans doivent donc être sécants. Il faut maintenant vérifier s'ils sont perpendiculaire ou non. Pour ce faire, on calcul le produit scalaire des vecteurs normaux :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$$

Les deux plans sont donc sécants perpendiculaires.

Théorème 5.3.2. Si $\pi : ax + by + cz + d = 0$ est l'équation normale d'un plan, et $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est un point ne faisant pas partie du plan, alors la plus courte distance entre π et P est donné par :

$$distance = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple 5.3.4. On veut trouver qu'elle est la plus courte distance entre le plan $\pi : 2x + 3y - 5z + 2 = 0$ et le point $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule, nous avons donc :

$$distance = \frac{|2(1) + 3(2) - 5(3) + 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-5)^2}} = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

Chapitre 6

Factorisations et moindres carrés

6.1 La factorisation LU

Supposons que nous voulons résoudre un système d'équations linéaires

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Nous avons vu jusqu'à présent plusieurs méthodes pour le résoudre : Méthodes de Gauss, méthode de Gauss-Jordan, méthode de la matrice inverse, méthode de Cramer. Ceci, sans compter les méthodes élémentaires que vous avez appris au secondaire. La méthode de Gauss est généralement la plus intéressante, mais dans certain contexte, les autres méthodes peuvent aussi s'avérer très utiles.

Maintenant considérons le problème de résoudre plusieurs systèmes d'équations linéaires de la forme

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

où seul le $\vec{b}$ change. Dans ce cas, la méthode de la matrice inverse semble être la plus intéressante. Par contre, le calcul de la matrice inverse peut devenir très long si la matrice est de grande dimension, et dans certain cas n'existe même pas. D'un autre côté, si nous voulons utiliser par exemple la méthode de Gauss, nous allons devoir recommencer tout les calculs à chaque fois que la valeur de $\vec{b}$ change. Pourtant, la plupart des calculs seront identiques. Il serait donc intéressant de développer une méthode permettant de mémoriser en quelques sorte les calculs que nous avons fait, et nous permettre de les réutiliser rapidement.

L'idée de la factorisation LU est donc d'appliquer la méthode de Gauss, mais de mémoriser en même temps tous les calculs importants qui seront identiques en changeant la valeur de $\vec{b}$. La méthode est relativement simple, elle consiste à remplacer les opérations élémentaires tel que $L_i + bL_j \rightarrow L_i$ par des produits de matrices, de sorte qu'à la fin, nous obtenons que $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure (lower) et U soit une matrice triangulaire supérieure (upper). Attention, la factorisation LU n'existe pas toujours. En fait, elle existera si et seulement si il est possible de transformer la matrice A sous forme échelon en utilisant uniquement des opérations élémentaires de la forme $L_i + bL_j \rightarrow L_i$.

Théorème 6.1.1. Si A est une matrice, alors il est possible d'écrire A sous la forme LU (C'est à dire $A = LU$) avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure si et seulement si il est possible de transformer A sous forme échelon en utilisant uniquement des opérations de la forme $L_i + aL_j \rightarrow L_i$ avec $i \neq j$. On a donc :

Exemple 6.1.1. Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -4x - 10y - z = -1 \\ 6x + 25y + z = -10 \end{cases}$$

Que l'on peut écrire sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -10 & -1 \\ 6 & 25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

On veut commencer par transformer la matrice A sous forme échelon en utilisant uniquement des opérations de la forme $L_i + aL_j \rightarrow L_i$ avec $i \neq j$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -10 & -1 \\ 6 & 25 & 1 \end{pmatrix} \sim_{L_2+2L_1 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \\ 6 & 25 & 1 \end{pmatrix} \sim_{L_3-3L_1 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 16 & -2 \end{pmatrix} \sim_{L_3+4L_2 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Théorème 6.1.2. Si A est une matrice, et B est la matrice obtenu en faisant l'opération $L_i + aL_j \rightarrow L_j, i \neq j$ à la matrice A . Alors il existe une matrice P tel que $B = PA$. De plus, la matrice P est obtenu en appliquant la transformation $L_i + aL_j \rightarrow L_j$ à la matrice identité.

Aux yeux du dernier théorème, on peut donc réécrire la méthode de Gauss comme étant un produit de matrices élémentaires.

Exemple 6.1.2. On veut réécrire les transformation de l'exemple précédent comme un produit de matrices élémentaires. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -10 & -1 \\ 6 & 25 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Théorème 6.1.3. Si P est une matrice tel que dans le théorème précédent (c'est à dire une matrice en faisant un opération de la forme $L_i + aL_j \rightarrow L_i$ à la matrice identité), alors la matrice P est inversible, et sont inverse est obtenu en changeant le signe de la valeur qui n'est pas sur la diagonale.

Exemple 6.1.3. On veut isoler la matrice A de l'exemple précédent en envoyant toutes les autres matrices à droite. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -10 & -1 \\ 6 & 25 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Théorème 6.1.4. Si on suit l'ordre habituel pour appliquer la méthode de Gauss (On place les zéros à partir de la colonne la plus à gauche et en commençant par le haut), alors la factorisation LU s'obtient facilement en multipliant les matrices P de l'exemple précédent. De plus, le calcul du produit est particulièrement simple comme le montre l'exemple ci dessous.

Exemple 6.1.4. Calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -10 & -1 \\ 6 & 25 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'exemple précédente, on a donc :

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -10 & -1 \\ 6 & 25 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = LU \end{aligned}$$

Exemple 6.1.5. On veut utiliser la factorisation LU pour résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -4x - 10y - z = -1 \\ 6x + 25y + z = -10 \end{cases}$$

On peut donc écrire le tout sous forme de produit de matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Nous allons poser :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Et nous allons résoudre le système d'équations linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à résoudre le système d'équations linéaires suivants pour trouver la solution du système original :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 6.1.6. On veut utiliser la méthode de la factorisation LU pour résoudre le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4z = 64 \\ -8x - 21y + 21z = -295 \\ 6x + 13y + z = 93 \end{cases}$$

On commence par transformer la matrice des coefficients sous forme échelon :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -8 & -21 & 21 \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix} \sim_{L_2+4L_1 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix} \sim_{L_3-3L_1 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \end{pmatrix} \sim_{L_3-2L_2 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On écrit maintenant le tout comme un produit de matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -8 & -21 & 21 \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Et en isolant la matrice des coefficients, on peut finalement obtenir la factorisation LU :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -8 & -21 & 21 \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut donc réécrire le système d'équations linéaires sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ -295 \\ 93 \end{pmatrix}$$

En posant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ -295 \\ 93 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ -39 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Et puis finalement :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ -39 \\ -21 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

6.2 Valeurs et vecteurs propres

Au chapitre 2, nous avons appris à calculer le produit matriciel. Nous avons en particulier appris à calculer A^2 , A^3 , A^4 , ... lorsque la matrice A est carré. Par contre qu'arriverait-il si vous deviez calculer A^{100} ? Rien de très compliqué, par contre vous devriez calculer le produit de A par lui même 100 fois ce qui serait particulièrement long. L'étude des valeurs et vecteurs propres permet de simplifier ce calcul.

Définition 6.2.1. Si A est une matrice, λ un nombre réel ou complexe et v un vecteur, alors on dit que λ est une valeur propre et v est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si l'équation ci dessous est satisfaite :

$$Av = \lambda v$$

Théorème 6.2.1.

1. Si A est une matrice, alors l'ensemble de valeurs propres de λ sont donnés par l'ensemble des solutions de l'équation suivante :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Cette équation est appelé équation (ou polynôme) caractéristique de A .

2. Si A est une matrice et λ est une valeur propre associé à A , alors l'ensemble des vecteurs propres associé à λ est l'espace vectoriel $\ker(A - \lambda I)$.
3. Supposons que A est une matrice carré $n \times n$ contenant exactement n valeurs propres distinctes, alors il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible pour lesquels

$$A = PDP^{-1}$$

de plus, la matrice D est une matrice contenant les valeurs propres sur la diagonale, et la matrice P est une matrice ayant pour colonne un vecteur propre pour chacune des valeurs propres, et placé dans le même ordre. On appelle ce type de factorisation la diagonalisation d'une matrice.

Exemple 6.2.1. Diagonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 39 & 54 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}$$

On commence par trouver les valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} 39 - \lambda & 54 \\ -15 & -18 - \lambda \end{vmatrix} = (39 - \lambda)(-18 - \lambda) + 810 = \lambda^2 - 21\lambda + 108 = (\lambda - 9)(\lambda - 12) = 0$$

Les valeurs propres sont donc 9 et 12. On doit maintenant trouver les vecteurs propres. Pour la valeur propre 9, on a donc :

$$\begin{pmatrix} 30 & 54 \\ -15 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 30 & 54 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc en posant $y = s$, on a $x = \frac{-9s}{5}$. Si on prend $s = 5$, on obtient donc le vecteur propre suivant :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On refait maintenant la même chose avec la valeur propre 12.

$$\begin{pmatrix} 27 & 54 \\ -15 & -30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 27 & 54 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $y = s$, on a $x = -2y = -2s$, et donc si on prend $s = 1$, on obtient le vecteur propre suivant :

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc maintenant écrire la factorisation de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 39 & 54 \\ -15 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Exemple 6.2.2. On veut utiliser l'exemple précédent pour calculer A^{100} si

$$A = \begin{pmatrix} 39 & 54 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, remarquons que

$$\begin{aligned} A^{100} &= (PDP^{-1})^{100} = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}_{100 \text{ fois}} \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\dots D(P^{-1}P) \\ &= PD^{100}P^{-1} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 39 & 54 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}^{100} &= \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9^{100} & 0 \\ 0 & 12^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -9^{101} & -2 \cdot 12^{100} \\ 5 \cdot 9^{100} & 12^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9^{101} + 10 \cdot 12^{100} & -2 \cdot 9^{101} + 18 \cdot 12^{100} \\ 5 \cdot 9^{100} - 5 \cdot 12^{100} & 10 \cdot 9^{100} - 9 \cdot 12^{100} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 6.2.3. Diagonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -6 & -4 & 18 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

On commence par calculer les valeurs propres :

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 4 \\ -6 & -4-\lambda & 18 \\ -3 & -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 18 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -6 & 18 \\ -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -6 & -4-\lambda \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) [(-4-\lambda)(9-\lambda) + 36] + 2 [-6(9-\lambda) + 54] + 4 [12 + 3(-4-\lambda)] \\ &= (2-\lambda) [\lambda^2 - 5\lambda] + 2 [6\lambda] + 4 [-3\lambda] \\ &= (-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda) + (12\lambda) + (-12\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda \\ &= -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que les valeurs propres sont 0, 2 et 5. On va maintenant chercher un vecteur propres pour chacune des valeurs propres, en commençant par 0, on doit donc trouver une base de $\ker(A - 0I)$:

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -2 & 4 \\ -6 & -4-0 & 18 \\ -3 & -2 & 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -6 & -4 & 18 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Et en appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 18 & 0 \\ -3 & -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim_{3L_1+2L_3 \rightarrow L_3}]{\sim_{3L_1+L_2 \rightarrow L_2}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 30 & 0 \\ 0 & -10 & 30 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\sim_{L_2-L_3 \rightarrow L_3}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow[\sim_{\frac{-1}{10}L_2 \rightarrow L_2}]{\sim_{\frac{1}{2}L_1 \rightarrow L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $z = s$, on obtient : $y = 3z = 3s$ et $x = y - 2z = 3s - 2s = s$, donc en prenant $s = 1$, on obtient notre premier vecteur propre :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant refaire la même chose pour la valeur propre 2 :

$$\begin{pmatrix} 2-2 & -2 & 4 \\ -6 & -4-2 & 18 \\ -3 & -2 & 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -6 & -6 & 18 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Et en appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 18 & 0 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim_{L_1 \leftrightarrow L_3}} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 & 0 \\ -6 & -6 & 18 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\sim_{2L_1-L_2 \rightarrow L_2}} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\sim_{L_2+L_3 \rightarrow L_3}} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\sim_{\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2}} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $z = s$, on obtient : $y = 2z = 2s$ et $-3x = 2y - 7z = 4s - 7s = -3s$ et donc $x = s$, et donc en prenant $s = 1$, on obtient le vecteur propre :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et finalement, on refait encore une fois la même chose, mais cette fois avec la valeur propre 5 :

$$\begin{pmatrix} 2-5 & -2 & 4 \\ -6 & -4-5 & 18 \\ -3 & -2 & 9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -6 & -9 & 18 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Et en appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 & 0 \\ -6 & -9 & 18 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim_{L_1-L_3 \rightarrow L_3}} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $z = s$, on obtient donc : $y = 2z = 2s$ et $-3x = 2y - 4z = 4s - 4s = 0$ ce qui nous donne $x = 0$. En prenant $s = 1$, on obtient donc finalement le vecteur propre :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant écrire la factorisation de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -6 & -4 & 18 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Pour le moment, nous avons appris comment diagonaliser une matrice $n \times n$ seulement dans le cas où nous avons n valeurs propres distinctes. Dans certains cas, il est aussi possible de le faire si nous avons moins que n valeurs propres distinctes, par contre c'est un peu plus compliqué. Il faudra alors trouver une base de vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres. Nous ne traiterons pas ce cas ici. Notez cependant que ce n'est pas toutes les matrices qui sont diagonalisables.

6.3 Gram-Schmidt et la factorisation QR

Nous allons maintenant compléter ce chapitre avec une dernière méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires. Il s'agit de la factorisation QR. L'idée est un peu semblable à celui de la factorisation LU, nous cherchons une méthode pour résoudre plusieurs systèmes d'équations linéaires pour lesquels seul le $\vec{b}$ change. La factorisation LU nous a permis de le faire au début du chapitre, mais possède un inconvénient important. Lorsque l'on utilise un ordinateur pour résoudre de très grand système, la factorisation LU n'est malheureusement pas très stable (des erreurs d'approximation apparaissent). La factorisation QR aura l'avantage d'être beaucoup plus stable, et donc donnera de meilleurs résultats.

Remarquez cependant qu'à la main, les calculs nécessaires pour trouver la factorisation QR sont beaucoup plus longs et pénibles. Par contre, garder en mémoire que la factorisation QR pour résoudre des systèmes d'équations linéaires est surtout une méthode utilisée en combinaison avec un ordinateur. Pour un ordinateur, la factorisation QR n'est absolument pas plus difficile à calculer que la factorisation LU.

Définition 6.3.1. On appelle factorisation QR d'une matrice A une décomposition de la forme $A = QR$ avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 6.3.1. Si A est une matrice ayant des colonnes linéairement indépendantes, alors la matrice A possède une factorisation QR. De plus, si les colonnes de A sont $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, alors les colonnes de Q sont obtenues en normalisant les vecteurs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 \\ v_3 = u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 \\ v_4 = u_4 - \frac{u_4 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{u_4 \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{u_4 \cdot v_3}{\|v_3\|^2} v_3 \\ \dots \end{array} \right.$$

Et R est obtenu en calculant $R = Q^T A$.

Exemple 6.3.1. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la factorisation QR.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 49 \\ 5x - y = 10 \end{cases}$$

On doit donc trouver la factorisation QR de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de la matrice Q seront donc :

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{19}{34} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 215/34 \\ -129/34 \end{pmatrix}$$

Puis on normalise ces deux vecteurs en divisant par leur norme, ce qui nous donne :

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{34} \\ 5/\sqrt{34} \end{pmatrix}$$

$$\frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{34} \\ -3/\sqrt{34} \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne la matrice Q suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{34} & 5/\sqrt{34} \\ 5/\sqrt{34} & -3/\sqrt{34} \end{pmatrix}$$

Puis on calcul la matrice R :

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{34} & 5/\sqrt{34} \\ 5/\sqrt{34} & -3/\sqrt{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{34} & 19/\sqrt{34} \\ 0 & 43/\sqrt{34} \end{pmatrix}$$

Le système d'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ peut donc maintenant s'écrire sous la forme $QR\vec{x} = \vec{b}$ ce qui nous donne finalement :

$$R\vec{x} = Q^T \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{34} & 19/\sqrt{34} \\ 0 & 43/\sqrt{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{34} & 5/\sqrt{34} \\ 5/\sqrt{34} & -3/\sqrt{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 197/\sqrt{34} \\ 215/\sqrt{34} \end{pmatrix}$$

Ce système est facile à résoudre car la matrice de gauche est déjà sous forme échelon. On obtient donc :

$$y = 5 \text{ et } x = 3$$

Exemple 6.3.2. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de la factorisation QR :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = -28 \\ 5x - 3y + 2z = -60 \\ 7x - 3y + z = -75 \end{cases}$$

On doit donc trouver la factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc que :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne en appliquant le théorème :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 34/83 \\ -54/83 \\ 24/83 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 9/7 \\ 3/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}$$

Puis on normalise les vecteurs :

$$\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{83} \\ 5/\sqrt{83} \\ 7/\sqrt{83} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \begin{pmatrix} 17/\sqrt{1162} \\ -27/\sqrt{1162} \\ 12/\sqrt{1162} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ -2/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne la matrice Q suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{83} & 17/\sqrt{1162} & 3/\sqrt{14} \\ 5/\sqrt{83} & -27/\sqrt{1162} & 1/\sqrt{14} \\ 7/\sqrt{83} & 12/\sqrt{1162} & -2/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

Et on calcul ensuite la matrice R :

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{83} & -39/\sqrt{83} & 23/\sqrt{83} \\ 0 & 28/\sqrt{1162} & -8/\sqrt{1162} \\ 0 & 0 & 6/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

Et donc le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ devient $R\vec{x} = Q^T \vec{b}$, ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{83} & -39/\sqrt{83} & 23/\sqrt{83} \\ 0 & 28/\sqrt{1162} & -8/\sqrt{1162} \\ 0 & 0 & 6/\sqrt{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{83} & 17/\sqrt{1162} & 3/\sqrt{14} \\ 5/\sqrt{83} & -27/\sqrt{1162} & 1/\sqrt{14} \\ 7/\sqrt{83} & 12/\sqrt{1162} & -2/\sqrt{14} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -28 \\ -60 \\ -75 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -909/\sqrt{83} \\ 244/\sqrt{1162} \\ 6/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$z = 1, \quad y = 9, \quad x = -7$$

Appendice 1 : Méthodes élémentaires pour la résolution des SEL

Au secondaire, vous avez appris 4 méthodes permettant de résoudre des systèmes d'équations linéaires. Ces 4 méthodes sont résumés dans cette appendice. Il s'agit des méthodes graphique, de substitution, de comparaison et d'élimination. Dans ce cours, nous supposons donc que vous êtes familier avec ces 4 méthodes.

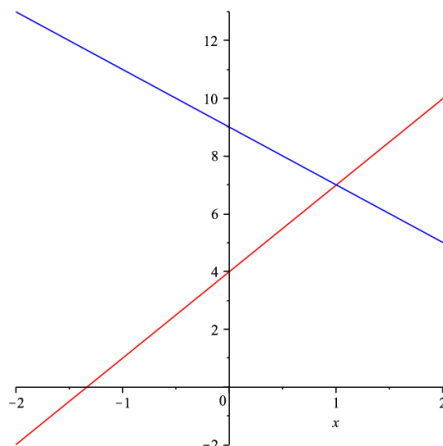
Méthode graphique

La méthode graphique consiste à représenter graphiquement chacune des équations qui forment le système d'équations (il s'agira de droite ou de plan) et de trouver graphiquement le point d'intersection. Attention : cette méthode est très imprécise et ne devrait normalement être utilisée que dans de très rares cas. Cette méthode est surtout utile pour comprendre la signification géométrique d'un système d'équations linéaires.

Exemple 7.1.1. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la méthode graphique :

$$\begin{cases} y - 3x = 4 \\ 2y + 4x = 18 \end{cases}$$

En représentant les deux équations graphiquement on obtient :



On remarque donc que le point d'intersection est $(1, 7)$, ce qui nous donne la solution :

$$x = 1, \quad y = 7$$

Méthode de substitution

La méthode de substitution consiste à isoler une variable dans la première équation, et la remplacer dans les autres équations, de sorte qu'à chaque étape, on obtient un système d'équations linéaires ayant une équation et une variable de moins.

Exemple 7.1.2. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la méthode de substitution :

$$\begin{cases} y - 3x = 4 \\ 2y + 4x = 18 \end{cases}$$

On va commencer par isoler le y dans la première équation, ce qui nous donne :

$$y = 3x + 4$$

puis on va le remplacer dans la seconde, ce qui nous donne :

$$2(3x + 4) + 4x = 18$$

Cette dernière équation est facile à résoudre. On obtient donc :

$$6x + 8 + 4x = 18 \implies 10x = 10 \implies x = 1$$

Pour trouver le y , il s'agit de remplacer le x dans l'équation $y = 3x + 4$ que nous avons obtenu précédemment. On obtient donc :

$$y = 3(1) + 4 = 7$$

Exemple 7.1.3. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la méthode de substitution :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ 4x - 3y + 2z = -11 \\ x + 7y + 2z = 13 \end{cases}$$

On commence par isoler une variable dans l'une des équations. Ici nous allons isoler le z dans la première équation, ce qui nous donne :

$$z = 7 - 3x - 2y$$

Puis on remplace le z dans les deux autres équations ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2(7 - 3x - 2y) = -11 \\ x + 7y + 2(7 - 3x - 2y) = 13 \end{cases} \implies \begin{cases} -2x - 7y = -25 \\ -5x + 3y = -1 \end{cases}$$

On va maintenant isoler le y dans la première équation, ce qui nous donne :

$$y = \frac{-2}{7}x + \frac{25}{7}$$

Puis on le remplace dans la deuxième équation, ce qui nous donne :

$$-5x + 3\left(\frac{-2}{7}x + \frac{25}{7}\right) = -1 \implies x = 2$$

Puis on calcule le y et le z à partir des équations que nous avons déjà obtenu :

$$y = \frac{-2}{7}(2) + \frac{25}{7} = 3$$

$$z = 7 - 3(2) - 2(3) = -5$$

Méthode de comparaison

La méthode de comparaison consiste à isoler une variable dans chacune des équations (la même variable), puis à évaluer les équations deux par deux, de sorte qu'à chaque étape, on obtient un système d'équations linéaires ayant une équation et une variable de moins.

Exemple 7.1.4. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la méthode de substitution :

$$\begin{cases} y - 3x = 4 \\ 2y + 4x = 18 \end{cases}$$

On va commencer par isoler le y dans chacune des équations, ce qui nous donne :

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x + 9 \end{cases}$$

puis on va évaluer les deux équations, ce qui nous donne :

$$3x + 4 = -2x + 9$$

Cette dernière équation est facile à résoudre. On obtient donc :

$$5x = 5 \implies x = 1$$

Pour trouver le y , il s'agit de remplacer le x dans l'équation $y = 3x + 4$ que nous avons obtenu précédemment. On obtient donc :

$$y = 3(1) + 4 = 7$$

Exemple 7.1.5. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la méthode de comparaison :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ 4x - 3y + 2z = -11 \\ x + 7y + 2z = 13 \end{cases}$$

On va commencer par isoler le x dans chacune des 3 équations, ce qui nous donne :

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{3}y + \frac{-1}{3}z + \frac{7}{3} \\ x = \frac{3}{4}y + \frac{-1}{2}z + \frac{-11}{4} \\ x = -7y - 2z + 13 \end{cases}$$

Puis nous allons évaluer la première et deuxième équation, ainsi que la première et la troisième équations, ce qui nous donne un nouveau système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \frac{-2}{3}y + \frac{-1}{3}z + \frac{7}{3} = \frac{3}{4}y + \frac{-1}{2}z + \frac{-11}{4} \\ \frac{-2}{3}y + \frac{-1}{3}z + \frac{7}{3} = -7y - 2z + 13 \end{cases} \implies \begin{cases} 17y - 2z = 61 \\ 19y + 5z = 32 \end{cases}$$

Puis on isole le y dans chacune des deux équations ci dessus ce qui nous donne :

$$\begin{cases} y = \frac{2}{17}z + \frac{61}{17} \\ y = \frac{-5}{19}z + \frac{32}{19} \end{cases}$$

Puis on évalue ces deux équations, ce qui nous donne :

$$\frac{2}{17}z + \frac{61}{17} = \frac{-5}{19}z + \frac{32}{19} \implies z = -5$$

Puis on utilise les équations que nous avons précédemment trouvé pour calculer le y et ensuite le x . On obtient donc :

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{17}z + \frac{61}{17} = \frac{2}{17}(-5) + \frac{61}{17} = 3 \\ x &= \frac{-2}{3}y + \frac{-1}{3}z + \frac{7}{3} = x = \frac{-2}{3}(3) + \frac{-1}{3}(-5) + \frac{7}{3} = 2 \end{aligned}$$

Méthode d'élimination

La méthode d'élimination (aussi appelé méthode d'addition) consiste à multiplier chacune des équations par une constante de sorte que le coefficient d'une variable soit le même pour chacune des équations. On prend ensuite la première équation et on lui soustrait chacune des autres une à la fois de sorte que l'on obtient un nouveau système d'équation ayant une équation et une variable de moins.

Exemple 7.1.6. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la méthode d'élimination :

$$\begin{cases} y - 3x = 4 \\ 2y + 4x = 18 \end{cases}$$

On va donc multiplier la première équations par 4 et la seconde équations par -3 de sorte que le coefficient de x soit le même dans chacune des équations. On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} 4y - 12x = 16 \\ -6y - 12x = -54 \end{cases}$$

Puis on soustrait les deux équations, ce qui nous donne :

$$10y = 70$$

On peut donc trouver que $y = 7$. Pour trouver la valeur de x , il suffit donc de remplacer la valeur de y dans la première équation, ce qui nous donne :

$$4(7) - 12x = 16 \implies x = 1$$

Exemple 7.1.7. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la méthode d'élimination :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ 4x - 3y + 2z = -11 \\ x + 7y + 2z = 13 \end{cases}$$

En va commencer par multiplier la première équation par 4, la seconde par 3 et la dernière par 12, ce qui va nous permettre d'obtenir un système d'équations linéaires pour lequel tous les coefficients de x sont le même (12). On obtient donc :

$$\begin{cases} 12x + 8y + 4z = 28 \\ 12x - 9y + 6z = -33 \\ 12x + 84y + 24z = 156 \end{cases}$$

Puis on prend la première équation et on lui soustrait la seconde, et ensuite on prend la première équation et on lui soustrait la troisième, ce qui nous donne un nouveau système d'équations linéaires ayant 2 inconnus et 2 équations.

$$\begin{cases} 17y - 2z = 61 \\ -76y - 20z = -128 \end{cases}$$

On va maintenant multiplier la première équation par 76 et la seconde par -17 de sorte qu'on va obtenir le même coefficient de y dans chacune des 2 équations.

$$\begin{cases} 1292y - 152z = 4636 \\ 1292y + 340z = 2176 \end{cases}$$

Puis on soustrait les deux équations, ce qui nous donne :

$$-492z = 2460 \implies z = -5$$

On utilise ensuite les équations que nous avons trouvé précédemment pour calculer les valeurs de y , puis de x .

$$\begin{aligned} 17y - 2z = 61 &\implies 17y - 2(-5) = 61 \implies y = 3 \\ 3x + 2y + z = 7 &\implies 3x + 2(3) + (-5) = 7 \implies x = 2 \end{aligned}$$

Appendice 2 : Les espaces vectoriels généraux

Au début du chapitre 1, nous avons mentionné qu'un vecteur n'est rien d'autre qu'un élément d'un espace vectoriel. Par contre, nous n'avons pour le moment étudié uniquement les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire d'espaces vectoriels très particulier. Nous allons définir dans cet appendice ce que sont les espaces vectoriels généraux, et regarder quelques propriétés. Ceci va permettre d'étudier l'algèbre linéaire dans toute sa généralité, si vous souhaitez continuer votre étude de l'algèbre linéaire.

Definition 7.2.1. Un espace vectoriel (réel) est un ensemble V muni d'une addition $\oplus$ et d'une multiplication par un scalaire $\otimes$ et qui respecte les 10 propriétés ci dessous :

1. $u \oplus v \in V$ pour tout $u, v \in V$
2. $u \oplus v = v \oplus u$ pour tout $u, v \in V$
3. $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ pour tout $u, v, w \in V$
4. Il existe un élément $0 \in V$ tel que $u \oplus 0 = 0 \oplus u = u$ pour tout $u \in V$
5. Pour tout $u \in V$, il existe $(-u) \in V$ tel que $u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = 0$
6. $\lambda \otimes u \in V$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in V$
7. $\lambda \otimes (\mu \otimes u) = (\lambda\mu) \otimes u$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u \in V$.
8. Il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$ tel que $1 \otimes u = u$ pour tout $u \in V$
9. $\lambda \otimes (u \oplus v) = (\lambda \otimes u) \oplus (\lambda \otimes v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $u, v \in V$
10. $(\lambda + \mu) \otimes u = (\lambda \otimes u) \oplus (\mu \otimes u)$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u \in V$

On définit un espace vectoriel complexe de la même manière que pour le cas réel, en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Les symboles $\oplus$ et $\otimes$ sont utilisé ci dessus pour mettre l'emphasis sur le fait qu'il ne s'agit pas nécessairement de l'addition et du produit scalaire auquel nous sommes habitués.

Exemple 7.2.1. Il existe beaucoup d'exemple d'espace vectoriel qui nous sont familier :

1. $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des vecteurs de dimension n
2. $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n
3. $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de dimension $m \times n$
4. $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Definition 7.2.2. Si V est un espace vectoriel de dimension finie (c'est à dire s'il existe un ensemble fini d'éléments qui est générateur de V) et $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de V , alors $\mathcal{B}$ est une base s'il s'agit d'un ensemble linéairement indépendant et générateur de V . De plus, on définit la dimension de V comme étant le nombre d'éléments dans une base de V .

Il est aussi possible de parler de base dans le cas d'espaces vectoriels de dimension infinie. Par contre, dans ce cas certaine difficulté se pose, et il est nécessaire de modifier légèrement notre définition. L'importance des bases en algèbre linéaire vient du fait qu'il nous est possible de représenter de façon unique n'importe quel vecteur de l'espace vectoriel à partir d'éléments de notre base, ce qui signifie qu'il nous est possible d'étudier un espace vectoriel à partir uniquement (ou presque) des éléments de notre base.

Théorème 7.2.1. Si V est un espace vectoriel de dimension fini, alors :

1. V possède au moins une base.
2. Si $\vec{x} \in V$ et $\mathcal{B}$ est une base de V , alors l'écriture de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ est unique.
3. Toutes les bases de V ont le même nombre d'éléments, c'est à dire la dimension de V est bien défini.
4. Si $\dim(V) = n$, alors V est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, c'est à dire qu'en ce qui concerne l'algèbre linéaire, V est identique à $\mathbb{R}^n$.

La dernière propriété ci dessus est particulièrement importante en ce qui nous concerne, elle montre d'une part qu'étudier l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ comme nous l'avons fait durant tout le cours est essentiel pour bien comprendre les autres espaces vectoriels plus compliqué, mais aussi qu'après avoir compris les éléments essentiels de la théorie des espaces vectoriels, leurs études se ramènent à celle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Bibliographie

- [1] Howard Anton and Chris Rorres. *Elementary linear algebra*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], tenth edition edition, 2010.
- [2] Gilles Charron and Pierre Parent. *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*. Chenelière, 5e édition edition, 2018.
- [3] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès Éditions, Toulouse, 1990.
- [4] Peter D. Lax. *Linear algebra and its applications*. Pure and Applied Mathematics (Hoboken). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, second edition, 2007.
- [5] David C. Lay. *Algèbre Linéaire : Théorie, Exercices et Applications*. De Boeck, 2009.
- [6] Gilbert Strang. The fundamental theorem of linear algebra. *Amer. Math. Monthly*, 100(9) :848–855, 1993.