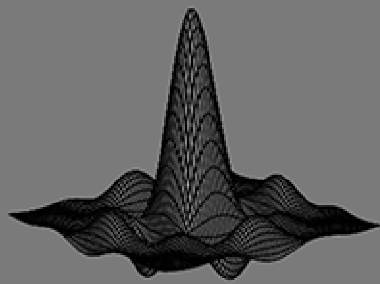
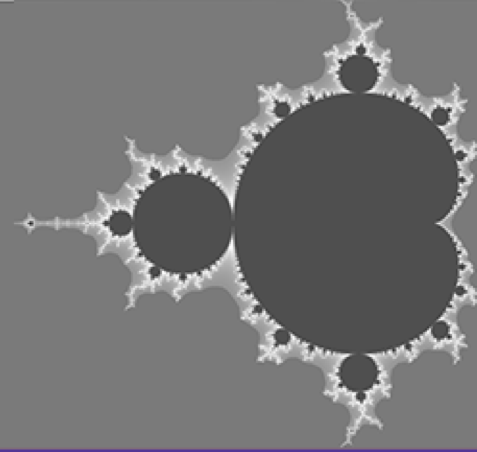
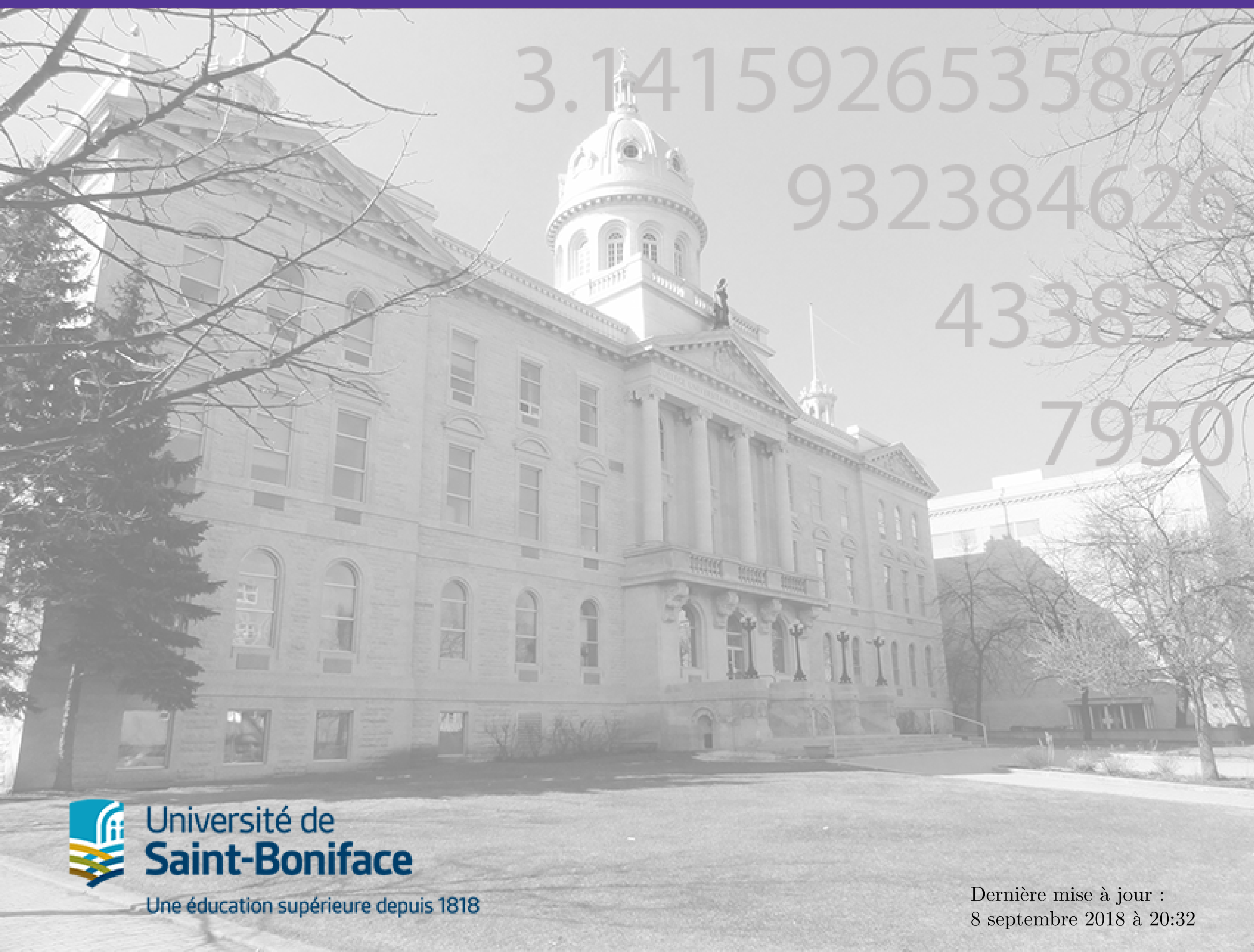




Algèbre classique et linéaire

Nicolas Bouffard



Université de Saint-Boniface
Une éducation supérieure depuis 1818

Dernière mise à jour :
8 septembre 2018 à 20:32

Table des matières

Chapitre 1

L'induction

1.1 La notation sigma

La notation sigma est une façon d'écrire une somme de manière condensé. L'idée est la suivante. Supposons que nous somme intéressé à calculer (ou étudier) la somme suivante :

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100$$

L'écriture d'une telle somme est particulièrement lourde. En particulier, pour pouvoir l'écrire en une seule ligne, il devient nécessaire d'utiliser des ... ce qui nous semble pas nécessairement très mathématiques. La notation sigma permet de réécrire la somme sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

qui avec un peu de pratique, devient beaucoup plus simple à écrire et manipuler. De façon plus générale, on aura la définition suivante.

Definition 1.1.1. Si $f(x)$ est une fonction (possiblement définie seulement sur certain entier) et $a, b \in \mathbb{Z}$, alors on écrira :

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + f(a+3) + ... + f(b-2) + f(b-1) + f(b)$$

Exemple 1.1.1. Évaluer la somme suivante :

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Exemple 1.1.2. Écrire sous forme de notation sigma la somme de tout les entiers impair entre 11 et 101. On a donc :

$$\begin{aligned} S &= 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + ... + 99 + 101 \\ &= 11 + (11+2) + (11+4) + (11+6) + ... + (11+88) + (11+90) \\ &= (11+2(0)) + (11+2(1)) + (11+2(2)) + (11+2(3)) + ... + (11+2(44)) + (11+2(45)) \\ &= \sum_{i=0}^{45} (11+2i) \end{aligned}$$

Remarquer que dans l'exemple précédent, on aurait pu trouver plusieurs façon d'écrire la même somme. Par exemple, les deux sommes suivantes représente aussi la somme de tout les entiers impairs entre 11 et 101 :

$$\sum_{i=5}^{50} (2i+1) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{46} (9+2i)$$

Exercice 1.1.1. Vérifier que les deux sommes ci-dessus représente bien la somme de tout les entiers impairs entre 11 et 101.

Théorème 1.1.1. **(Propriétés des sommes)** Si a_i et b_i sont des suites, c est un nombre réel (ou complexe), et k, m, n sont des entiers tel que $k < m < n$, alors on a les propriétés suivantes :

1. $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$
2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$
3. $\sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$
4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

Exemple 1.1.3. Sachant que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, calculer la somme $\sum_{i=1}^{n+1} (6i+3)$. Pour ce faire, en utilisant les propriétés que nous venons de voir, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} (6i+3) &= \sum_{i=1}^{n} (6i+3) + (6(n+1)+3) \\
&= 6\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 3 + (6n+9) \\
&= 6\frac{n(n+1)}{2} + 3n + (6n+9) \\
&= 3n^2 + 12n + 9
\end{aligned}$$

Remarquez qu'il existe une notation semblable pour le produit. Dans ce cas, on utilise la lettre grecque pi majuscule. On a donc par exemple :

$$\prod_{i=1}^{10} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$$

Cette notation, bien qu'importante à connaitre, est beaucoup moins souvent rencontré que celle pour les sommes. Elle sera utilisé que très rarement dans ce cours.

1.2 Le principe d'induction

Dans cette section, nous allons étudier le principe d'induction. Il s'agit d'une méthode très importante de démonstration, utilisé en particulier dans le cas des sommes.

Théorème 1.2.1. **(Principe d'induction)** Si P est une propriété satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. La propriété P est vraie pour un entier a.
2. En faisant l'hypothèse que la propriété P est vraie pour un entier k (avec $k \geq a$), on peut démontrer qu'elle est aussi vraie pour l'entier $k+1$.

Alors on peut conclure que la propriété P est vraie pour tout les entiers plus grand ou égal à a.

À partir du théorème, on remarque donc qu'une démonstration par induction doit se faire en 3 étapes :

1. On commence par choisir l'entier de départ a. Il s'agit du premier entier pour lequel on veut montrer que la propriété est vraie. On doit alors démontrer que la propriété est vrai pour l'entier a.
2. On fait l'hypothèse que la propriété est vrai pour un entier $n \in \mathbb{Z}$
3. On démontre que la propriété est encore vrai pour $n + 1$.

Si on parvient à compléter les trois étapes, on peut alors conclure que la propriété est vraie pour tout entier plus grand ou égal à a. Nous allons maintenant voir quelques exemples d'application du principe d'induction.

Exemple 1.2.1. On veut démontrer que pour tout nombre naturel n, on a :

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ou écrit de manière symbolique, on veut démontrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour ce faire, nous allons appliquer le principe d'induction.

1. On doit démontrer que la propriété est vraie lorsque $n = 1$. Pour ce faire, on remarque que :

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

donc la propriété est vrai lorsque $n = 1$.

2. Supposons maintenant que la propriété est vraie lorsque $n = k$, où k est un entier plus grand ou égal à 1. C'est à dire, on suppose que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

3. On veut maintenant vérifier que la propriété est vrai pour $n = k + 1$. On a donc :

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Donc à partir de notre hypothèse, on a bien que la propriété est vraie pour $n = k + 1$.

Par le principe d'induction, on peut donc conclure que la propriété est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2.2. On veut utiliser l'induction pour démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a que $n+4 < 7n^2$. Pour ce faire, nous allons suivre les 3 étapes d'une démonstration par induction :

1. On doit commencer par démontrer que la propriété est vrai si $n = 1$, en remplaçant dans l'équation on a : $1 + 4 < 7(1)^2$ ce qui est vrai car $5 < 7$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
2. On fait maintenant l'hypothèse que l'inégalité est vraie pour $n = k$. C'est à dire on suppose que $k + 4 < 7k^2$.
3. On veut maintenant démontrer que la propriété est encore vraie pour $n = k + 1$ on a donc :

$$\begin{aligned}
(k+1) + 4 &= (k+4) + 1 \\
&< 7k^2 + 1 \quad \text{(hypothèse d'induction)} \\
&< (7k^2 + 1) + (14k + 6) \\
&= 7k^2 + 14k + 7 \\
&= 7(k^2 + 2k + 1) \\
&= 7(k+1)^2
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement ce que nous voulions montrer.

On peut donc conclure que $n+4<7n^2$ pour tout $n \geq 1$.

Exemple 1.2.3. On veut utiliser l'induction pour démontrer que $8^n - 3^n$ est divisible par 5 pour tout entier $n \geq 1$. Pour ce faire, commençons par nous rappelle qu'un entier a est divisible par 5 si on peut l'écrire sous la forme $a = 5b$ où b est aussi un entier. Nous allons maintenant appliquer l'induction.

1. Comme première étape on doit démontrer que la propriété est vraie si $n = 1$. Dans ce cas, on a $8^1 - 3^1 = 5$, ce qui est évidement divisible par 5. Donc la propriété est satisfaite pour une première valeur.
2. Nous faisons maintenant l'hypothèse que la propriété est vraie pour $n = k$. C'est à dire, on suppose que $8^k - 3^k$ est divisible par 5.
3. On veut maintenant montrer que la propriété est aussi vrai pour $n = k+1$, on a donc :

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= 8 \cdot 8^k - 3 \cdot 8^k + 3 \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 5 \cdot 8^k - 3(8^k - 3^k) \end{aligned}$$

Comme $8^k - 3^k$ est divisible par 5 par l'hypothèse de la seconde étape, il existe donc un entier m tel que $8^k - 3^k = 5m$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= 5 \cdot 8^k - 3(8^k - 3^k) \\ &= 5 \cdot 8^k - 3(5m) \\ &= 5\left(8^k - 3m\right) \end{aligned}$$

Et donc $8^{k+1} - 3^{k+1}$ est aussi divisible par 5

On peut donc conclure que $8^n - 3^n$ est divisible par 5 pour tout entier $n \geq 1$.

Dans certain cas, le principe d'induction comme nous l'avons énoncé n'est pas suffisant pour démontrer un résultat. Lorsqu'on applique de manière stricte le principe d'induction, on utilise uniquement la valeur précédente pour démontrer qu'un propriété est vraie pour une certaine valeur. Nous allons maintenant énoncé un version généralisé du principe d'induction qui nous permettra d'utiliser plusieurs valeur précédente pour démontrer un énoncé.

Théorème 1.2.2. **(Principe d'induction généralisé)** Si P est une propriété satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. La propriété est vraie pour tout les entiers entre a et b (avec $a \leq b$).
2. En faisant l'hypothèse que la propriété est vraie pour tout les entiers entre a et k (avec $k \geq b$), on peut démontrer qu'elle est aussi vraie pour l'entier $k+1$.

Alors on peut conclure que la propriété P est vraie pour tout les entiers plus grand ou égal à a.

Exemple 1.2.4. Considérons la suite de nombre naturel définie par la relation

$$x_n = 7x_{n-1} - 10x_{n-2} \text{ avec } x_0 = 1 \text{ et } x_1 = 2$$

Utilisez l'induction pour démontrer que $x_n = 2^n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a bien l'égalité. Remarquez que l'on doit vérifier les deux premières valeurs car nous utilisons les deux valeurs précédente dans notre troisième étape.
2. Supposons que $x_n = 2^n$ pour tout $n \leq k$
3. On veut maintenant montrer que l'équation est vrai pour $n = k+1$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 7x_k - 10x_{k-1} \\ &= 7(2^k) - 10(2^{k-1}) \\ &= 2^{k-1}(7 \cdot 2 - 10) \\ &= 2^{k-1}(2^2) \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration.

Nous allons maintenant utiliser l'induction pour démontrer le théorème du binôme qui nous sera particulièrement utile au chapitre 4 quand nous étudierons les polynômes. Pour le moment, nous allons utilisez le théorème uniquement comme exemple d'utilisation de l'induction, mais nous allons voir au chapitre 4 comment le théorème peut être utiliser pour développer rapidement des expressions de la forme $(a+b)^n$.

Definition 1.2.1. Si $n \in \mathbb{N}$, alors on définit la factorielle, dénoté $n!$, comme étant :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n & \text{si } n > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Definition 1.2.2. Si $n, i \in \mathbb{N}$ avec $i \le n$, alors on définit $\binom{n}{i}$ comme étant :

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Lemme 1.2.1. *Si $n, i \in \mathbb{N}$ tel que $i \le n$, alors on a :*

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!i!(n-i)! + n!(i-1)!(n-i+1)!}{i!(i-1)!(n-i+1)!(n-i)!} \\
&= \frac{n!i! + n!(i-1)!(n-i+1)}{i!(i-1)!(n-i+1)!} = \frac{n!i + n!(n-i+1)}{i!(n-i+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{i!(n-i+1)!} = \frac{(n+1)!}{i!(n-i+1)!} = \binom{n+1}{i}
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.3. **(Théorème du binôme)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Démonstration. On fait la preuve par induction

1. Si $n = 0$, on a l'égalité $1 = 1$ qui est évidement vrai.
2. Supposons que l'égalité est vrai pour n
3. On doit montré que c'est toujours vrai pour $n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{i+1}b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right]a^i b^{(n+1)-i} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^i b^{(n+1)-i} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^i b^{(n+1)-i}
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. □

Chapitre 2

Les nombres complexes

2.1 Les ensembles de nombres

Au primaire et secondaire, vous avez appris à travailler avec différent ensemble de nombre. Vous avez premièrement définie l'ensemble des nombres naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Remarquez que certain auteurs préfère exclure le zéro de l'ensemble des nombres naturels. Il s'agit d'une question de préférence qui n'aura pas vraiment d'incidence dans ce cours. L'ensemble des nombres naturels vous a permis d'apprendre à compter, et faire des additions simple. Par contre, lorsqu'est venu le temps d'apprendre la soustraction, vous avez vite réalisé que cette opération n'est pas toujours possible. Par exemple, il n'existe aucun nombre dans $\mathbb{N}$ qui est égal à $1 - 2$. Vous avez donc été amené à élargir votre concept de nombre à l'ensemble des nombres entiers :

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Il était donc alors possible d'additionner et soustraire sans problème, et même d'effectuer des multiplications. Par contre, lorsqu'il est venu le temps d'apprendre à diviser, vous avez appris que ce n'était pas toujours possible. Par exemple, il n'existe aucun nombre de $\mathbb{Z}$ qui est égal à $1 \div 2$. Il a donc été encore une fois nécessaire d'élargir votre concept de nombre, ce qui vous a amené à définir l'ensemble des nombres rationnelles (les fractions) :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Dans cette ensemble, les choses vont particulièrement bien. Nous pouvons maintenant effectuer les 4 opérations de base : addition, soustraction, multiplication et division. Par contre, certain problème se posait toujours. Quelle est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle pour lequel les deux côté adjacent à l'angle droit mesure 1 cm ? Quel est la circonférence et l'aire d'un cercle de rayon 1 ? Comme c'est problème n'avait toujours pas de solution, vous avez encore une fois étendu votre concept de nombre. Vous avez donc commencer à parler des nombres réels :

$$\mathbb{R} = \text{complétion de } \mathbb{Q}$$

La complétude est de procédé relativement complexe que nous ne décrirons pas en détail dans ce cours. Il s'agit essentiellement de boucher les trous qui était toujours présent dans $\mathbb{Q}$, de sorte que toute les longueurs soit maintenant des nombres. La plupart des opérations fonctionne très bien, et vous avez terminé vos études secondaire (et même première année universitaire) en utilisant seulement les nombres réels. Il restait cependant encore un problème. Certaine opération qui semble très naturelle restait incorrecte. Nous avons donc :

$$(\sqrt{1})^2 = 1$$

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(\sqrt{3})^2 = 3$$

$$(\sqrt{4})^2 = 4$$

Ce qui nous amène à supposer que $(\sqrt{x})^2 = x$ pour tout x. Par contre, ceci est complètement faux. En effet, si $x = -1$, nous avons :

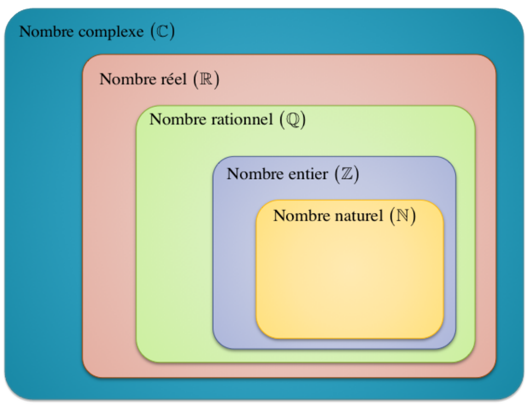
$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

qui semble juste à première vue, par contre $\sqrt{-1}$ n'existe pas dans les nombres réels. Ceci nous amène donc à définir un nouvel ensemble de nombre encore plus grand. Nous parlerons donc de l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

L'ensemble des nombres complexes est donc l'ensemble des nombres réels auquel nous ajoutons un nouveau nombre correspondant à $\sqrt{-1}$. Nous appelons ce nouveau nombre i. Nous allons donc voir dans ce chapitre comment travailler avec ces nouveaux nombres, et en particulier comment effectuer les opérations arithmétiques de base dans ce nouvel ensemble.

FIGURE 2.1 – Les ensembles de nombres



2.2 Concepts de base

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est définie comme étant l'ensemble des nombres réels auxquels on ajoute un nombre dénoté i correspondant à $\sqrt{-1}$. Formellement, on définit l'ensemble des nombres complexes comme étant :

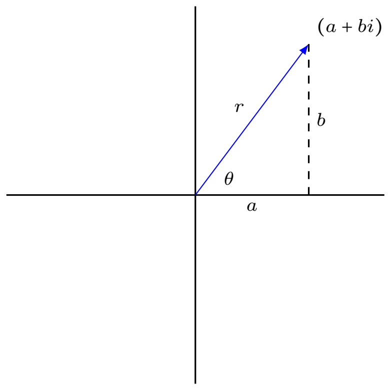
$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

L'avantage de travailler avec les nombres complexes plutôt que les nombres réels, c'est essentiellement que dans les nombres complexes, tous les polynômes qui ne sont pas constant admettent au moins une racine. En fait, dans tous les cas, ils se factorise complètement.

Un nombre complexe peut donc être représenté par un couple de deux nombres réels :

$$(a, b) \longleftrightarrow a + bi$$

Ce qui nous permet de représenter un nombre complexe dans le plan (complexe).



Ceci nous permet d'introduire nos 4 premières opérations sur les nombres complexes. Si z est un nombre complexe, alors on peut écrire z sous la forme cartésienne $z = a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On obtient donc :

1. **La partie réelle :** $\Re(z) = a$
2. **La partie imaginaire :** $\Im(z) = b$
3. **Le module :** $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$
4. **L'argument :** $arg(z) = \theta$

Maintenant, un peu de trigonométrie nous permet d'obtenir les relations suivantes :

$$a = r\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad b = r\sin(\theta)$$

Ce qui nous permet d'obtenir la forme polaire d'un nombre complexe. Si z est un nombre complexe, alors on peut écrire z sous la forme :

$$z = r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$$

où $r = \|z\|$ et $\theta = arg(z)$. De plus, pour calculer l'argument d'un nombre complexe, la trigonométrie nous donne :

$$arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{ou} \quad arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$$

Il faut cependant faire attention car les deux formules ne sont pas interchangeable. Pour décider laquelle des deux nous devons utiliser, on regarde graphiquement si l'angle se trouve dans l'intervalle $[0, \pi]$ ou $[\pi, 2\pi]$.

Exemple 2.2.1. On veut trouver la forme polaire du nombre complexe $4 + 4i$. On a donc :

$$r = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} \qquad \text{et} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

On obtient donc :

$$4 + 4i = \sqrt{32}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

2.3 Opérations sur les nombres complexes

Notre but dans cette section est maintenant d'étendre les opérations habituelles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division à l'ensemble des nombres complexes. Les opérations d'addition et de soustraction se font relativement facilement. Il suffit de penser au i comme s'il s'agissait d'une simple variable :
Si $(a + bi)$ et $(c + di)$ alors on a :

1. **Addition :** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
2. **Soustraction :** $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Maintenant, pour ce qui est de la multiplication, la méthode est relativement semblable à ce que nous avons fait pour l'addition et la soustraction. Il faut cependant se rappeler que $i^2 = -1$.
Si $(a + bi)$ et $(c + di)$ alors on a :

1. **Multiplication :** $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$

La seule opération qui nous reste à définir est la division. Ici l'idée se complique un peu et nous aurons besoin d'une opération que l'on appelle conjugué pour arriver à nos fins.
Si $(a+bi)$ et $(c+di)$ alors on a :

1. **Conjugué :** $\overline{a+bi} = a - bi$
2. **Division :** $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{a+bi}{c+di} \cdot \dfrac{c-di}{c-di} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

Exercice 2.3.1.

1. Démontrez que si z est un nombres complexes tel que $\overline{z} = z$, alors z est aussi un nombre réel.
2. Démontrez que si z est un nombre complexe, alors $z\overline{z}$ est un nombre réel.

Exemple 2.3.1. On veut effectuer l'opération suivante dans les nombres complexes :

$$\frac{7i-11}{3i+5}$$

On a donc :

$$\frac{7i-11}{3i+5} = \frac{7i-11}{3i+5} \cdot \frac{3i-5}{3i-5} = \frac{21i^2 - 35i - 33i + 55}{9i^2 - 25} = \frac{-68i+34}{-34} = 2i+1$$

2.4 Forme exponentielle et racines

Nous avons déjà vu dans les sections précédente qu'un nombres complexes peut s'écrire sous forme cartésienne et sous forme polaire. Dans cette section, nous allons voir qu'il est aussi possible d'écrire un nombre complexe sous forme exponentielle. L'idée provient des définitions des fonctions exponentielle, sinus et cosinus à l'aire des séries de Taylor.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Ces définitions ont aussi du sens dans les nombres complexes, et ce sont celles qui sont habituellement utilisées. En manipulant les sommes, on obtient la relation d'Euler suivante qui est particulièrement utile :

$$\textbf{Identité d'Euler :}\ e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Ce qui nous permet entre autre d'en déduire la formule de De Moivre qui est souvent très utile :

$$\textbf{Formule de De Moivre :}\ (\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Cette identité nous permet donc d'écrire un nombre complexe z sous les trois formes suivantes :

1. **Forme cartésienne :** $z = x + iy$ où $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$
2. **Forme polaire :** $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$
3. **Forme exponentielle :** $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$

À partir de l'identité d'Euler, on peut aussi retrouver les expressions suivantes pour les fonctions sinus et cosinus :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{ix} + e^{-iz}}{2}$$

Au secondaire, vous avez appris que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques avec une période 2π. C'est à dire :

$$\sin(z + 2k\pi) = \sin(z), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(z + 2k\pi) = \cos(z), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

L'identité d'Euler nous permet maintenant de remarquer que la fonction exponentielle aussi est périodique, mais cette dernière a une période de $2ki\pi$. C'est à dire :

$$e^{iz + 2ki\pi} = e^{iz}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Cette dernière propriété va maintenant nous permettre de calculer toutes les racines d'un nombre. Par exemple, si on souhaite calculer toutes les valeurs de $\sqrt{4}$, on aura :

$$\sqrt{4} = \sqrt{4e^{0i+2ki\pi}} = \left(4e^{2ki\pi}\right)^{1/2} = 2e^{ki\pi} = 2e^{0} \text{ ou } 2e^{i\pi} = 2 \text{ ou } -2$$

En générale, si z est un nombre complexe différent de 0, alors $\sqrt[n]{z}$ aura n solutions. Il sera possible de trouver toutes ces solutions en utilisant la forme exponentielle d'un nombre complexe.

Exemple 2.4.1. On veut calculer la valeur de $\sqrt{-16}$. On a donc :

$$\sqrt{-16} = \sqrt{(-1)(16)} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = \pm 4i$$

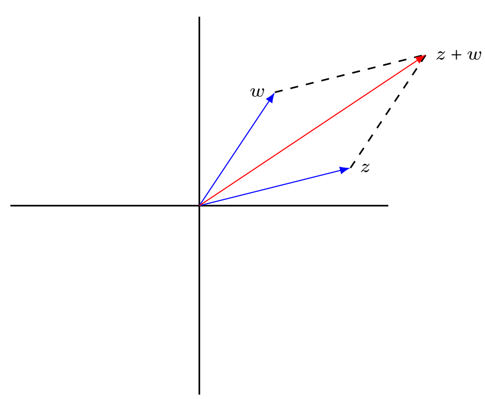
Exemple 2.4.2. Trouvez toutes les racines (dans les nombres complexes) du polynôme $x^2 + 2x + 6$. En appliquant la formule quadratique, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 24}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{-5} \\ &= -1 \pm \sqrt{5}\sqrt{-1} \\ &= -1 \pm i\sqrt{5} \end{aligned}$$

2.5 Interprétation géométrique des opérations élémentaires

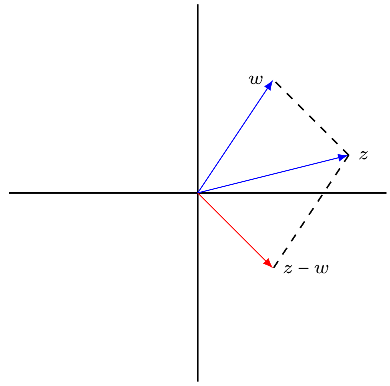
Nous allons maintenant regarder ce que signifie géométriquement les opérations élémentaires que nous avons vu sur les nombres complexes. Commençons par l'addition de deux nombres complexes. Si $z = a + bi$ et $w = c + di$ sont deux nombres complexes, alors on peut représenter leur somme en commençant par dessiner graphiquement les nombres z et w (en bleu), puis en complétant le parallélogramme (les lignes pointillés). La somme $z + w$, sera donc le nombre complexe se trouvant à l'extrémité du parallélogramme (représenté en rouge). Nous allons voir au chapitre 4 qu'il s'agit en fait d'un addition de vecteurs.

Figure 2.2 – Addition de nombres complexes



Pour soustraire d'un nombre complexe, le principe est semblable. Il s'agit essentiellement de refaire les opérations que nous venons de faire à l'envers. On commence par dessiner les nombres complexes z et w (en bleu), puis on relie les deux points ainsi obtenu. On complete ensuite le parallélogramme en tenant compte que la ligne allant de l'origine jusqu'à z représente maintenant la diagonale du parallélogramme. Le nombre complexe $z - w$ sera alors l'autre sommet du parallélogramme.

Figure 2.3 – Soustraction de nombres complexes



La multiplication et la division de deux nombres complexes est un peu plus étrange. Supposons que z et w sont deux nombres complexes, alors nous avons vu qu'on peut les écrire sous forme exponentielle :

$$z = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad w = r_2 e^{i\theta_2}$$

En multipliant, en obtient donc :

$$zw = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Donc un obtient le produit de deux nombres complexes en multipliant leur module, et en addition leur argument. De manière similaire, en divisant, on obtient :

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Donc la division est obtenu en divisant les modules, et en soustrayant les arguments.

2.6 Théorème fondamental de l'algèbre

Dans cette section, nous allons voir un théorème particulièrement important en mathématiques, et pour lequel la démonstration dépasse largement la niveau du cours. Pourtant, ce théorème est particulièrement simple à énoncé et est souvent appris dès le secondaire. Nous allons cependant inclure une version pour les nombres complexes qui sera sans doute nouvelle pour vous. Il s'agit du théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 2.6.1. **(Théorème fondamental de l'algèbre dans les nombres réels)** Si $p(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients réels, alors l'équation $p(x) = 0$ possède au plus n solutions dans les nombres réels. De plus, $p(x)$ peut se factoriser sous forme d'un produit de facteur linéaire et / ou de facteur quadratique irréductible.

Par exemple, bien que nous ne soyons pas capable de calculer facilement les racines du polynôme $p(x) = 3x^5 + 4x^3 + 2x^2 - 5$, nous pouvons affirmer qu'il aura au plus 5 racines dans les nombres réels. Nous ne pouvons cependant pas garantir qu'il en a exactement 5. Par exemple, le théorème fondamental de l'algèbre nous garantie que le polynôme $q(x) = x^2 + 1$ possède au plus 2 racines dans les nombres réels, mais un calcul relativement simple nous permet de nous convaincre qu'il en a en fait aucune. Nous allons maintenant voir une version du théorème pour les nombres complexes qui va nous permettre d'aller beaucoup plus loin.

Théorème 2.6.2. **(Théorème fondamental de l'algèbre)** Si $p(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients complexes tel que $p(x) \neq 0$, alors $p(x)$ possède exactement n racines dans les nombres complexes lorsque ces dernières sont comptés avec leur multiplicité.

Pour pouvoir bien comprendre le théorème, il nous est nécessaire d'expliquer ce que l'on entend par multiplicité d'une racine. L'existence d'une racine est équivalente à dire que le polynôme peut se factoriser. Par exemple, si a est une racine du polynôme $p(x)$, alors il existe un polynôme $q(x)$ tel que $p(x) = (x-a)q(x)$. Le théorème fondamental de l'algèbre revient donc à dire qu'il nous est possible de factoriser complètement n'importe quel polynôme. Par exemple, on aura :

$$x^4 - 17x^3 + 105x^2 - 275x + 250 = (x-2)(x-5)^3$$

On a donc que 2 et 5 sont les racines du polynôme. On appelle la multiplicité d'une racine, l'exposant qui accompagne cette dernière. On dira donc que 2 est une racine de multiplicité 1 (c'est à dire une racine simple), et on dira que 5 est une racines de multiplicité 3. On peut donc vérifier que le théorème fondamental de l'algèbre fonctionne bien dans ce cas. En effet, comme il s'agit d'un polynôme non nul de degré 4, le théorème fondamental nous affirme que nous devons avoir exactement 4 racines, ce qui est bien le cas lorsqu'on les comptes avec leur multiplicité : $1 + 3 = 4$.

Remarquez qu'il s'agit uniquement d'un théorème d'existence. Le théorème ne nous donne aucune indication sur comment trouver les racines du polynôme. Dans les deux prochaines sections, nous allons voir comment trouver toutes les racines de certain polynômes relativement simple, et dans le chapitre suivant, nous allons voir comment trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme à coefficient entier. Par contre, en général il est impossible de trouver toutes les racines d'un polynôme de manière exacte, comme l'affirme le théorème ci-dessous. Il sera donc nécessaire d'utiliser des méthodes numérique pour les approximer, ce que nous ne ferons pas dans ce cours.

Théorème 2.6.3. **(Abel / Galois)** Il n'existe aucune formule permettant de trouver (en calcul exacte) toutes les racines d'un polynôme général de degré ≥ 5.

Faites attention cependant à ce que signifie ce théorème. Dans certain cas il est possible de calculer toutes les racines d'un polynôme de degré plus grand ou égal à 5. Ce que le théorème nous affirme c'est que ce n'est pas toujours possible.

2.7 Résolution de l'équation $z^n = a$

Nous allons maintenant nous intéresser à trouver toutes les solutions d'une équation de la forme $z^n = a$. Pour ce faire, il suffit d'utiliser la forme exponentiel comme nous l'avons déjà fait avec les racines carrés.

Exemple 2.7.1. On veut trouver toutes les solutions de l'équation $z^3 = 27$. Pour ce faire, on se rappel que $27 = 27e^{0+2\pi ik}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En calculant la racine cubique, on obtient donc :

$$z = \left(27e^{2\pi ik}\right)^{1/3} = 27^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi ik} = 3e^{\frac{2}{3}\pi ik}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

On doit maintenant se rappeler que la fonction exponentielle est périodique, et par le théorème fondamental de l'algèbre nous savons que nous cherchons exactement 3 solutions. Nous allons donc considérer uniquement les valeurs $k = 0, 1, 2$. On obtient donc les trois solutions suivantes :

$$z_0 = 3e^{\frac{2}{3}\pi i(0)} = 3e^0 = 3$$

$$z_1 = 3e^{\frac{2}{3}\pi i(1)} = 3e^{\frac{2}{3}\pi i} = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{-3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

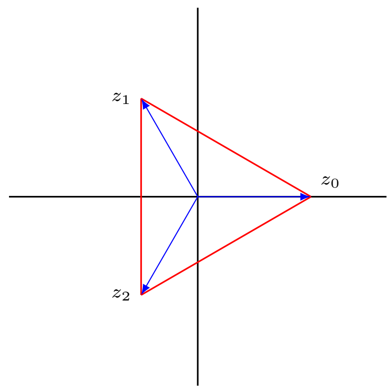
$$z_2 = 3e^{\frac{2}{3}\pi i(2)} = 3e^{\frac{4}{3}\pi i} = 3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \frac{-3}{2} + i\frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

Les solutions de l'équations $z^n = a$ est particulièrement curieuse et possède un lien important avec la géométrie comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2.7.1. En reliant ensemble les solutions de l'équations $z^n = a$ où $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, on obtient toujours un polygone régulier à n côtés.

Bien qu'en apparence le théorème soit plutôt une curiosité mathématiques, il peut aussi être utile pour vérifier qu'aucune erreur de calcul n'a été commise, ou bien pour nous permettre de trouver géométriquement les solutions de l'équation lorsqu'une première solution est connue. Pour illustrer le théorème, regardons géométriquement ou se trouve les solutions de l'équation $z^3 = 27$ que nous avons trouvé précédemment.

FIGURE 2.4 – Solutions de l'équations $z^3 = 27$



On obtient donc que les solutions de l'équations $z^3 = 27$ représentent bien un triangle équilatéral comme le théorème l'avait prédis.

2.8 Racines d'une fonction quadratique

Nous avons déjà vu à l'aide d'un exemple comment trouver les racines d'une fonction quadratique (i.e. un polynôme de degré 2). Nous allons maintenant le refaire de manière un peu plus précise. Au secondaire, vous avez appris qu'un polynôme de degré 2 (à coefficients réels) possède soit aucune, une seule, ou exactement deux racines. Ceci correspond au théorème fondamental de l'algèbre dans le cas réel. Vous avez aussi appris que les racines (lorsqu'il y en a) du polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$ sont donné par la formule :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et que le nombre de solution est obtenu en étudiant le signe du discriminent $\Delta = b^2 - 4ac$ qui se trouve sous la racine. Le cas où $\Delta < 0$ correspondait alors à aucune solution, car il n'était pas possible de calculer la racine carré d'un nombre négatif. Maintenant que vous connaissez les nombres complexes, il nous ait maintenant possible de calculer la racine carré d'un nombre négatif. Le cas où nous avions aucune solution dans les nombres réels, correspondra donc à deux solutions dans les nombres complexes.

Théorème 2.8.1. Si $p(z) = az^2 + bz + c$ est un polynôme à coefficient complexes, alors les racines du polynôme sont donné par la formule :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemple 2.8.1. On veut trouver toutes les racines du polynôme $p(z) = z^2 - 4z + 29$ dans les nombres complexes. Pour ce faire, on utilise la formule quadratique, ce qui nous donne :

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(29)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i$$

Théorème 2.8.2. Si $p(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme à coefficient réel pour lequel $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est l'une des racines, alors l'autre racine sera $\overline{z}$. C'est à dire que les racines non-réel apparaissent toujours par paire qui sont conjugué l'une à l'autre.

Exemple 2.8.2. Sachant que $\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}$ est l'une des racines du polynôme $x^2 - 5x + 9$, on veut trouver l'autre sans faire de calcul. Comme il s'agit d'un polynôme de degré 2 à coefficient réel, le théorème précédent nous garantie que l'autre racine sera donné par le conjugué. On a donc que l'autre racine est :

$$\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}$$

Exemple 2.8.3. Sachant que $2i$ et 5 sont des racines du polynôme $p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20$, on veut trouver la troisième. Pour ce faire, remarquons que comme 5 est une racine du polynôme $p(x)$, alors on peut trouver un polynôme $q(x)$ qui sera aussi à coefficient réels tel que $p(x) = (x - 5)q(x)$. On aura donc que $q(x)$ est un polynôme de degré 2 pour lequel $2i$ est une racine. La troisième racine devra donc être le conjugué de $2i$, c'est à dire que la troisième racine est $-2i$.

2.9 Application à la trigonométrie

Nous allons maintenant voir dans cette section une application des nombres complexes à la trigonométrie. En effet, il est possible de retrouver la plupart des identités trigonométriques en comparant les formes polaires et exponentielles d'un nombre complexe.

Exemple 2.9.1. À l'aide de la formule d'Euler et des nombres complexes, nous pouvons retrouver les identités trigonométriques pour $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

$$\begin{aligned}
\cos(2x) + i\sin(2x) &= e^{2xi} \\
&= (e^{xi})^2 \\
&= (\cos(x) + i\sin(x))^2 \\
&= \cos^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x)
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \Re(\cos(2x) + i\sin(2x)) \\
&= \Re(\cos^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x)) \\
&= \cos^2(x) - \sin^2(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= \Im(\cos(2x) + i\sin(2x)) \\
&= \Im(\cos^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x)) \\
&= 2\cos(x)\sin(x)
\end{aligned}$$

Exercice 2.9.1. Utiliser la formule d'Euler et les nombres complexes pour obtenir des identités trigonométrique pour $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.

Chapitre 3

Les polynomes

3.1 Opérations sur les polynômes

Les polynômes sont des objets mathématiques qui devrait vous être familier depuis le secondaire. Dans ce chapitre, nous allons principalement nous intéresser à trouver, ou du moins obtenir de l'information, sur les racines d'un polynôme, ce qui est souvent utile dans les applications. Mais avant, dans cette section nous allons regarder rapidement certaine propriétés des opérations sur les polynômes.

Definition 3.1.1. On définit l'ensemble $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble de tout les polynômes à coefficients réels et de degré au plus n. De la même manière, on définit l'ensemble $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ comme étant l'ensemble de tout les polynômes à coefficients complexes et de degré au plus n.

Théorème 3.1.1. Si $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes appartenant à $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ respectivement, alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $p(x) + q(x)$ appartient aussi à $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$, où $k = \max(m, n)$
2. $p(x) - q(x)$ appartient aussi à $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$, où $k = \max(m, n)$
3. $p(x)q(x)$ appartient aussi à $\mathbb{P}_{m+n}(\mathbb{R})$

De plus, les propriétés ci-dessus sont aussi satisfaite si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Les trois propriétés du théorème ci-dessus devrait déjà vous être familière, à l'exception possiblement de la notation. Le prochain théorème devrait aussi vous être familier et sera particulièrement important pour ce qui suit.

Théorème 3.1.2. Si $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ respectivement, alors $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ est un polynôme si et seulement si toutes les racines de $q(x)$ sont aussi des racines de $p(x)$, et leur multiplicité respectivement est plus grande ou égale pour $p(x)$ que pour $q(x)$. Dans ce cas, $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ sera un polynôme de $P_{n-m}(\mathbb{C})$.

Remarquez que dans le théorème précédent, il est nécessaire de travailler dans les nombres complexes pour avoir le si et seulement si. Remarquez qu'il est tout de même possible de calculer la division de deux polynômes même dans le cas où le théorème n'est pas satisfait. Cependant, dans ce cas nous allons obtenir un reste dans la division, et donc nous n'obtiendrons pas un polynôme. Nous allons maintenant se rafraîchir rapidement la mémoire sur comment calculer la division de deux polynômes.

Exemple 3.1.1. On veut calculer la division suivante : $\dfrac{x^4-13x^3+25x^2+129x-270}{x^2-6x-27}$. On a donc :

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^2 & -7x & +10 & & \\
\hline
x^2-6x-27 & x^4 & -13x^3 & +25x^2 & +129x & -270 \\
 & -x^4 & +6x^3 & +27x^2 & & \\
\hline
 & & -7x^3 & +52x^2 & +129x & \\
 & & 7x^3 & -42x^2 & -189x & \\
\hline
 & & & 10x^2 & -60x & -270 \\
 & & & -10x^2 & +60x & +270 \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{x^4-13x^3+25x^2+129x-270}{x^2-6x-27}=x^2-7x+10$$

Comme les racines du polynôme $x^2-6x-27$ sont 9 et -3, alors 9 et -3 sont aussi des racines du polynôme $x^4-13x^3+25x^2+129x-270$. De plus, une simple manipulation algébrique nous donne :

$$\frac{x^4-13x^3+25x^2+129x-270}{x^2-7x+10}=x^2-6x-27$$

Comme les racines du polynôme $x^2-7x+10$ sont 2 et 5, on a donc que 2 et 5 sont aussi des racines du polynôme $x^4-13x^3+25x^2+129x-270$. Finalement, par le théorème fondamental de l'algèbre, on peut donc conclure que $-3,2,5$ et 9 sont les seules racines de ce polynôme de degré 4.

3.2 Retour sur le théorème du binôme

Dans le chapitre sur l'induction, nous avons démontré le théorème du binôme qui nous dit essentiellement que :

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

Nous pouvons maintenant utiliser ce théorème pour calculer rapidement certain produit. Pour ce faire, nous allons regarder premièrement le triangle de Pascal :

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

La triangle est obtenu en plaçant premièrement un 1 sur la première ligne, et toutes les autres lignes sont obtenu en commençant et terminant par un 1, et d'autre les autres valeurs sont la somme des deux valeurs qui se trouve immédiatement au dessus. Le triangle de Pascal est utilisé pour calculer rapidement les coefficient de la forme :

$$\binom{n}{i}$$

Par exemple, si on souhaite trouver la valeur de $\binom{4}{2}$, on regardera dans la ligne identifié $n=4$, puis on prendra le 3^e élément. Attention, il ne s'agit pas d'un typos. Le premier élément de chaque ligne est l'élément $i=0$.

On aura donc :

$$\binom{4}{2} = 6$$

Ce qui correspond à la valeur que vous auriez obtenu en calculant les factoriels (vous devriez le vérifier !!!).

Exemple 3.2.1. On veut utiliser le triangle de Pascal pour calculer le produit $(x+2)^5$. On a donc :

$$\begin{aligned}(x+2)^5 &= x^5 + 5x^4(2)^1 + 10x^3(2)^2 + 10x^2(2)^3 + 5x(2)^4 + 2^5 \\ &= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32\end{aligned}$$

Exemple 3.2.2. On veut utiliser le triangle de Pascal pour calculer le produit $(4x-1)^3$. On a donc :

$$\begin{aligned}(4x-1)^3 &= 1(4x)^3 + 3(4x)^2(-1)^1 + 3(4x)^1(-1)^2 + 1(-1)^3 \\ &= 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1\end{aligned}$$

3.3 Le théorème du reste

Dans la première section du chapitre, nous avons vu que si $p(x)$ est un polynôme et $a \in \mathbb{C}$, alors $p(a) = 0$ si et seulement si $x-a$ divise $p(a)$ sans reste. Nous allons maintenant voir que l'on peut légèrement modifier ce théorème pour nous permettre de calculer le reste de la division lorsque a n'est pas une racine du polynôme. Mais avant, rappelons nous comment effectuer la division de deux polynômes lorsqu'il y a un reste.

Exemple 3.3.1. On veut calculer la division suivante : $\dfrac{x^3-4x^2+5x-7}{x-8}$. Pour ce faire, on a :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +4x & +37 & \\
\hline
x-8 & x^3-4x^2 & +5x & -7 & \\
 & -x^3+8x^2 & & & \\
\hline
 & 4x^2 & +5x & & \\
 & -4x^2 & +32x & & \\
\hline
 & & 37x & -7 & \\
 & & -37x & +296 & \\
\hline
 & & & 289 &
\end{array}$$

On dira donc que 289 est le reste de la division, et on écrira :

$$\frac{x^3-4x^2+5x-7}{x-8} = x^2+4x+37+\frac{289}{x-8}$$

Exemple 3.3.2. On veut calculer la division suivante : $\dfrac{21x^4+41x^3-51x^2-28x+31}{3x^2+5x-7}$. Pour ce faire, on a :

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & 7x^2 & +2x & -4 \\
\hline
3x^2+5x-7 & 21x^4 & +41x^3 & -51x^2 & -28x & +31 \\
 & -21x^4 & -35x^3 & +49x^2 & & \\
\hline
 & & 6x^3 & -2x^2 & -28x & \\
 & & -6x^3 & -10x^2 & +14x & \\
\hline
 & & & -12x^2 & -14x & +31 \\
 & & & 12x^2 & +20x & -28 \\
\hline
 & & & & 6x & +3
\end{array}$$

On dira donc que $6x+3$ est le reste de la division, et on écrira :

$$\frac{21x^4+41x^3-51x^2-28x+31}{3x^2+5x-7} = 7x^2+2x-4+\frac{6x+3}{3x^2+5x-7}$$

Le problème étant que nous voulons faire ce type de calcul en utilisant des coefficients qui sont des nombres complexes. Théoriquement, ceci n'est pas vraiment plus difficile que ce que nous venons de faire, par contre en pratique, le calcul devient beaucoup plus technique. Si par contre nous pouvons trouvez facilement le reste de la division, le calcul devient alors une simple multiplication, ce qui est beaucoup plus facile. Le théorème suivant nous dit comment faire pour calculer facilement le reste de la division.

Théorème 3.3.1. **(Théorème du reste)** Si $p(x)$ est un polynôme, et $a \in \mathbb{C}$, alors le reste de la division de $p(x)$ par $(x-a)$ est donné par $p(a)$.

Pour illustrer l'utilisation du théorème, nous allons commencer par un exemple très simple, que nous savons déjà faire de manière plus simple en effectuant directement la division.

Exemple 3.3.3. On veut effectuer la division suivante : $\dfrac{7x^2-16x-12}{x-3}$. Pour ce faire, commençons par calculer le reste de la division. Si $p(x) = 7x^2-16x-12$, alors on a : $p(3) = 7(3)^2-16(3)-12 = 3$. De plus, en regardant le degré des polynômes, on obtient donc que la division doit avoir la forme suivante :

$$\frac{7x^2-16x-12}{x-3} = ax+b+\frac{3}{x-3}$$

En multipliant des deux côtés par $x-3$, on obtient donc :

$$7x^2-16x-12 = (ax+b)(x-3)+3 = ax^2+(-3a+b)x+(-3b+3)$$

On obtient donc le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} a = 7 \\ -3a+b = -16 \\ -3b+3 = -12 \end{cases}$$

Ce qui nous donne $a = 7$ et $b = 5$. On obtient donc :

$$\frac{7x^2-16x-12}{x-3} = 7x+5+\frac{3}{x-3}$$

Nous pouvons maintenant vérifier la validité de notre calcul en effectuant directement la division :

$$\begin{array}{r|l} & 7x \quad +5 \\ \hline x-3 & 7x^2-16x-12 \\ & \underline{-7x^2+21x} \\ & 5x-12 \\ & \underline{-5x+15} \\ & 3 \end{array}$$

L'avantage du théorème c'est qu'il fonctionne tout aussi bien dans le cas des nombres complexes, et peut donc en simplifier beaucoup le calcul car la multiplication est beaucoup plus simple que la division.

Exemple 3.3.4. On veut trouver le reste de la division de x^3-5x+2 par $x-2i$. Pour ce faire, posons $p(x) = x^3-5x+2$. Il suffit donc maintenant de calculer $p(2i)$. On a donc :

$$p(2i) = (2i)^3-5(2i)+2 = 8i^3-10i+2 = -8i-10i+2 = -18i+2$$

3.4 Théorème des racines rationnelles

Nous avons vu qu'en général il est impossible de trouver toutes les racines d'un polynôme lorsque son degré est élevé. Par contre, lorsque les coefficients sont entiers, il nous est possible de trouver une liste de candidats possible suffisamment petite pour nous permettre de trouver toutes les racines rationnels. C'est ce que nous allons faire dans cette section. Pour ce faire, le théorème suivant nous sera d'une grande utilité :

Théorème 3.4.1. **(Théorème des racines rationnelles)** Si $p(x)$ est un polynôme à coefficient entier tel que :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

où a_n et a_0 sont différent de zéro, alors toutes les racines rationnelles $x = \frac{p}{q}$ écrite en fraction réduite satisfont les deux propriétés suivantes :

1. p est un diviseur entier du terme a_0
2. q est un diviseur entier du terme a_n

Nous allons maintenant illustrer le théorème à l'aide de quelques exemple, en commençant par un exemple à l'aide d'un polynôme du second degré pour lequel nous savons déjà trouver les racines à l'aide de la formule quadratique.

Exemple 3.4.1. On veut utiliser le théorème des racines rationnelles pour trouver les racines du polynôme $p(x) = 3x^2 - 22x + 7$. Comme 3 et 7 sont des nombres premiers, on obtient que les seules possibilités pour des racines rationnelles sont :

$$\left\{ \pm 1, \pm 7, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{7}{3} \right\}$$

En testant les possibilités une par une, on peut ensuite trouver toutes les solutions rationnelles.

$$\begin{array}{rcl} p(1) & = & -12 \\ p(-1) & = & 32 \\ p(7) & = & 0 \\ p(-7) & = & 308 \\ p\left(\frac{1}{3}\right) & = & 0 \\ p\left(\frac{-1}{3}\right) & = & \frac{44}{3} \\ p\left(\frac{1}{7}\right) & = & \frac{192}{49} \\ p\left(\frac{-1}{7}\right) & = & \frac{500}{49} \end{array}$$

On obtient donc que les racines du polynôme sont 7 et $\frac{1}{3}$. Remarquez que par le théorème fondamental de l'algèbre, nous savons que le polynôme a exactement 2 racines dans les nombres complexes. Nous aurions donc pu arrêter notre recherche des racines après avoir calculer $p\left(\frac{1}{3}\right)$. De plus, dès que nous avions trouver que 7 est une racines, nous aurions pu faire la division pour trouver l'autre racine :

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 1 \\ \hline x - 7 & 3x^2 - 22x + 7 \\ & -3x^2 + 21x \\ \hline & -x + 7 \\ & x - 7 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Ce qui nous donne $3x - 1 = 0$ et donc $x = \frac{1}{3}$ est l'autre racine. Nous allons maintenant continuer notre étude de l'exemple avec un petit truc qui peut s'avérer parfois très utile. On va essayer de faire le changement de variable $x = t + 1$. On obtient donc :

$$p(t+1) = 3t^2 - 16t - 12$$

En utilisant le théorème des racines rationnelles, on obtient que les différentes possibilités pour les racines de ce dernier polynôme (en terme de t) sont :

$$\left\{1, 2, 3, 4, 6, 12, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -1, -2, -3, -4, -6, -12, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}\right\}$$

Comme nous avons poser $x = t + 1$, les différentes options pour les racines rationnelles en terme de x sont donc :

$$\left\{2, 3, 4, 5, 7, 13, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 0, -1, -2, -3, -5, -11, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right\}$$

En comparant cette dernière liste avec la liste des options que nous avions trouvé au début de l'exemple, on obtient donc qu'il n'y a en fait que 5 options :

$$\left\{7, \frac{7}{3}, -1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right\}$$

Ce qui diminue la liste des possibilités à tester. Nous pourrions refaire de même avec d'autre changement de variable si cela est nécessaire.

Bien sur, l'intérêt du théorème des racines rationnelles n'est pas de trouver les racines d'un polynôme du second degré, mais bien de trouver les racines de polynôme de degré plus élevé. La technique reste cependant la même.

Exemple 3.4.2. On veut utiliser le théorème des racines rationnelles pour trouver toutes les racines du polynôme

$$6x^3 - 23x^2 - 123x - 70$$

Le théorème affirme que toutes les racines rationnelles écrite sous forme de fraction réduite $\frac{p}{q}$ seront tel que p divise 70 et q divise 6. Comme l'ensemble des diviseurs de 70 est $\{1, 2, 5, 7, 10, 20, 35, 70\}$. De plus, les diviseurs de 6 sont $\{1, 2, 3, 6\}$. On obtient donc la liste des candidats possible suivante :

$$\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 5, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{6}, \pm 7, \pm\frac{7}{2}, \pm\frac{7}{3}, \pm\frac{7}{6}, \pm 10, \pm\frac{10}{3}, \pm 20, \pm\frac{20}{3}, \pm 35, \pm\frac{35}{2}, \pm\frac{35}{3}, \pm\frac{35}{6}, \pm 70, \pm\frac{70}{3}\right\}$$

Cette liste est relativement longue, mais avec de la patience, on trouve que les racines du polynôme sont :

$$\left\{\frac{-5}{2}, \frac{-2}{3}, 7\right\}$$

3.5 La règle des signes de Descartes

Théorème 3.5.1. Lorsque les termes d'un polynôme sont ordonné en ordre décroissant de degré, alors le nombre de racines positives est soit égal au nombre de changement de signe entre les termes non nul consécutif, ou bien moins par un multiple de 2. Les racines multiples sont compté séparément.

Corollaire 3.5.1. Pour trouver le nombre de racine négative d'un polynôme $p(x)$ on applique le théorème au polynôme $p(-x)$.

Exemple 3.5.1. On veut savoir combien il y a de racine positive et de racine négative au polynôme $p(x) = 3x^2 - 22x + 7$. Pour ce faire, remarquons que les signes consécutif sont $+-$ et $-+$. Il y a donc 2 changement de signe. On a donc soit 0 ou 2 racines positive. Regarderons maintenant le nombre de racine négative. On va donc considérer le polynôme $p(-x) = 3x^2 + 22x + 7$. Comme les signes consécutif sont $++$ et $++$, il n'y a donc aucun changement de signe. On peut donc être certain qu'il n'y a aucune racines négatives. Les racines du polynôme sont donc toutes deux positives, ou toutes deux non-réelles. En combinant ce que nous venons de trouver avec le théorème des racines rationnelles, on pourrait maintenant simplifier notre recherche des racines rationnelles.

Exemple 3.5.2. On veut savoir combien il y a de racine positive et de racine négative au polynôme $p(x) = x^3 - 14x^2 + 61x - 84$ et ensuite on veut utiliser le théorème des racines rationnelles pour trouver une liste de candidat possible pour les racines rationnelles du polynôme. Comme il y a 3 changement de signe, on a donc 1 ou 3 racines qui sont positive. Maintenant, comme le polynôme $p(-x) = -x^3 - 14x^2 - 61x - 84$ n'a aucune changement de signe, on peut donc affirmer qu'aucune des racines du polynôme n'est négative. Maintenant, en applicant le théorème des racines rationnelles combiner avec l'information que nous venons d'obtenir, on obtient donc qu'une liste des candidats possible pour les racines rationnelles est :

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$$

3.6 Bornes pour les racines d'un polynôme

Nous allons maintenant regarder comment trouver des bornes pour les racines complexes d'un polynôme. Il s'agit de conséquences d'un théorème d'analyse complexe, le théorème de Rouché.

Théorème 3.6.1. Si $p(z)$ est un polynôme tel que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0$, supposons que z_{min} et z_{max} sont les racines du ayant respectivement le plus petit module et le plus grand module. Alors on a :

$$|z_{min}| \geq \frac{|a_0|}{|a_0| + \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\}}$$

$$|z_{max}| \leq 1 + \frac{1}{|a_n|} \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{n-1}|\}$$

Le théorème nous permet donc d'identifier un anneau (du plan complexe) dans lequel on peut retrouver toutes les racines d'un polynôme. Nous allons illustrer ceci à l'aide d'un exemple.

Exemple 3.6.1. On veut trouver des bornes pour l'ensemble de toutes les racines du polynôme $p(x) = 5x^3 - 6x^2 + 13x - 7$. Pour ce faire, en applicant le théorème précédent, on obtient :

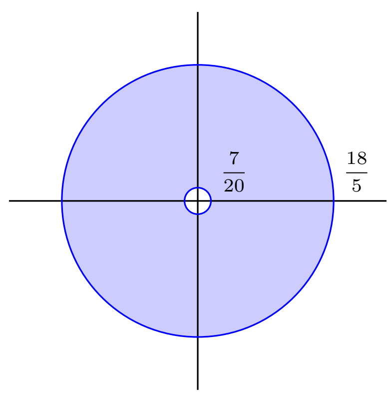
$$|z_{min}| \geq \frac{7}{7 + 13} = \frac{7}{20}$$

$$|z_{max}| \leq 1 + \frac{1}{5}(13) = \frac{18}{5}$$

L'ensemble de toutes les racines du polynôme se trouvent donc dans l'anneau suivant :

Bien que cela ne nous donne pas la position exacte des trois racines. Au moins, nous avons maintenant une idée de l'endroit ou les chercher, ce qui peut être fait entre autre à l'aide d'approximation numérique.

Figure 3.1 – Bornes pour les racines du polynôme



Chapitre 4

Opérations sur les vecteurs

4.1 Introduction

Depuis le début de vos études élémentaires, vous avez eu l'habitude de travailler avec des quantités que l'on appelle scalaire. Il s'agit de simple nombre dépourvu de direction. On considère habituellement un scalaire comme étant un nombre réel, mais il peut aussi s'agir de nombre complexe (ou plus généralement d'un corps quelconque). Par contre, dans la vie courante, plusieurs valeur sont directement lié à une direction particulière. Par exemple, nous pouvons dire qu'une voiture roule à 100 km/h, il s'agit alors d'un scalaire, par contre en pratique nous somme beaucoup plus intéressé à savoir que la voiture roule à 100 km/h dans la direction est. Il s'agira alors d'un vecteur. C'est à dire d'une quantité associé à une direction.

On aura donc que des quantités tel qu'un prix, l'age de quelqu'un ou la grandeur d'une personne seront des scalaires, alors qu'une vitesse, une force ou le poids (ne pas confondre avec la masse) d'une personne seront des vecteurs.

De façon général, un vecteur est un élément d'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est habituellement choisi comme étant l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$) ou l'ensemble des nombres complexes ($\mathbb{C}$). Vous trouverez la définition d'un espace vectoriel en appendice.

Dans ce cours, nous n'allons cependant pas étudier les espaces vectoriel dans toute leur généralité, et nous allons nous concentrer sur deux espaces vectoriels particulier, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$. Notez cependant que si vous prenez d'autre cours d'algèbre linéaire plus avancé, le cas général sera alors étudié.

Pour le cours MATH-1211 : Techniques d'algèbre classique et linéaire, nous allons donc définir un vecteur comme étant un objet ayant :

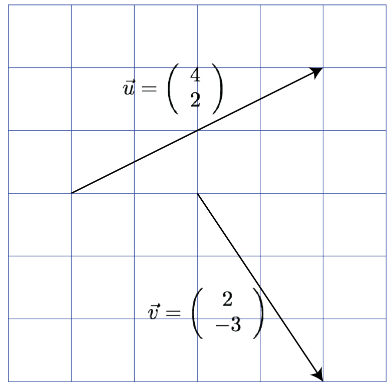
1. une longueur
2. une orientation

Géométriquement, nous allons se représenté un vecteur comme étant une flèche (dans le plan, dans l'espace, ou même dans un espace de dimension plus grande que 3. Algébriquement, nous dirons qu'un vecteur est un élément $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, et nous écrirons

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Où n représente le nombre de composante dans le vecteur. Remarquez que nous écrivons nos vecteurs par une lettre surmonté d'une petite flèche (Dans certain manuel, on utilise plutôt une lettre écrit en caractère gras).

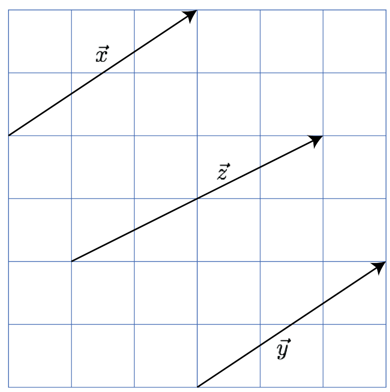
Définir un vecteur algébriquement ou géométriquement est bien sur équivalent, et nous pouvons facilement passer de l'un à l'autre comme l'illustre la figure ci dessous :



Remarquez qu'un vecteur n'a pas de position fixe. Seul sa longueur et sa direction sont importantes.

4.2 Égalité de vecteurs

Géométriquement, on dit que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, s'ils ont la même longueur et la même direction. Dans ce cas, nous écrirons $\vec{u} = \vec{v}$. Dans la figure ci dessous, nous avons donc $\vec{x} = \vec{y}$, et $\vec{x} \neq \vec{z}$.



Algébriquement, deux vecteurs sont égaux s'ils ont le même nombre de composante, et que chacun des composantes sont égales. Par exemple, nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.2.1. Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels nous avons :

$$\begin{pmatrix} 2x+5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Comme nous avons que $4 = 4$, pour que les deux vecteurs soient égaux nous devons donc avoir

$$2x + 5 = 3x + 2 \Longrightarrow x = 3$$

4.3 Addition et soustraction de vecteurs

Algébriquement, on définit l'addition et la soustraction de deux vecteurs ayant le même nombre de composante (i.e. même dimension) en additionnant ou soustrayant composante par composante. On a donc :

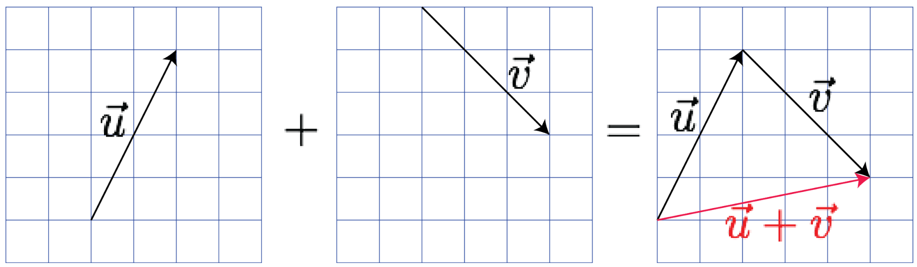
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$$

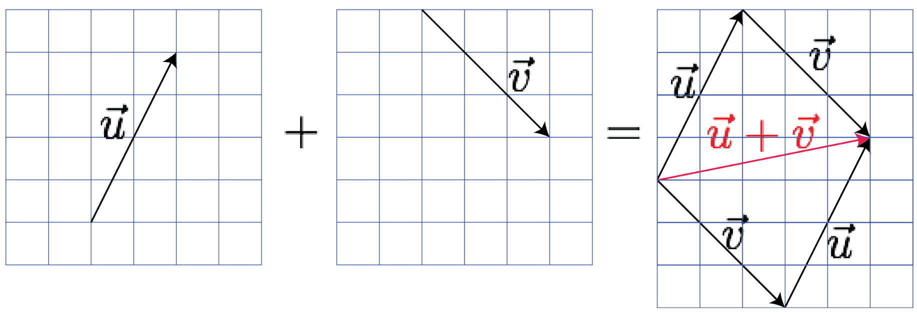
Remarquez que l'addition et la soustraction ne sont pas définit lorsque les vecteurs n'ont pas le même nombre de composante.

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \text{ n'est pas définie}$$

Géométriquement, on additionne deux vecteurs en les plaçant bout à bout, comme l'illustre la figure ci dessous. On appelle cette méthode la méthode du triangle.



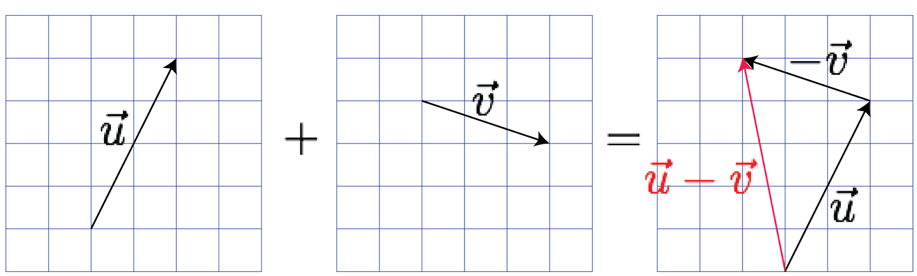
Alternativement, de manière géométrique, nous pouvons aussi définir la somme de deux vecteurs par la méthode du parallélogramme en plaçant les deux vecteurs à la même origine et en complétant le parallélogramme. La diagonale principale du parallélogramme est la somme des deux vecteurs.



La soustraction se définie de manière analogue. Premièrement, si $\vec{u}$ est un vecteur, alors on définit le vecteur $\vec{-u}$ comme étant un vecteur de même longueur, mais de direction opposé. On peut alors définir

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (\vec{-v})$$

On peut alors utiliser la méthode du triangle ou du parallélogramme pour dessiner la différence entre les deux vecteurs.



Si vous appliquer un principe semblable avec la méthode du parallélogramme, vous allez remarquer que la différence correspond à la seconde diagonale du parallélogramme (la première étant la somme).

On remarque alors que si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs tel que :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \text{ alors } \vec{w} - \vec{u} = \vec{v}$$

tel que nous nous en attendions. Nous allons maintenant énoncé certaine propriétés élémentaires de l'addition et de la soustraction des vecteurs.

Théorème 4.3.1. L'addition de vecteur satisfait les propriétés suivantes :

1. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
3. Si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, alors $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{z} + (\vec{y} + \vec{z})$.
4. Il existe un vecteur $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
5. Pour chaque $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe un vecteur $(-\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

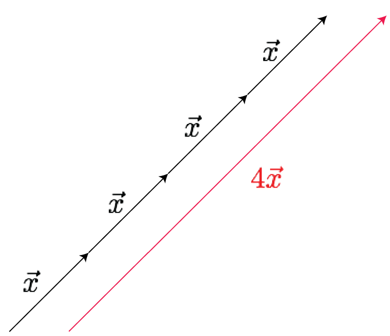
Notez que le vecteur $\vec{0}$ dans le théorème précédent est le vecteur ayant des 0 dans chacune de ses composantes.

4.4 Multiplication par un scalaire

Dans les sections précédente, nous avons introduit la notion de vecteur. Il est maintenant temps de parler de scalaire. Dans le contexte de notre cours, un scalaire n'est rien d'autre qu'un nombre réel. Dans le contexte des espaces vectoriel abstrait, un scalaire sera définit comme étant un élément du corps $\mathbb{K}$

La multiplication par un scalaire est un opération qui prend en entré un scalaire et un vecteur et qui nous donne un vecteur comme réponse. Nous dénotons la multiplication par un scalaire à l'aide d'aucun symbole. Les symboles $\cdot$ et $\times$ seront utilisé plus tard pour d'autre forme de multiplication.

Géométriquement, si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit le vecteur $\lambda\vec{x}$ comme étant un vecteur dans la même direction que $\vec{x}$ et de λ fois ça longueur. La figure ci dessous illustre le principe.



Algébriquement, la multiplication par un scalaire consiste à multiplier chacune des composantes d'un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Exemple 4.4.1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ nous avons :

$$5 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.4.2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ nous avons :

$$4\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\12\\20\end{pmatrix}$$

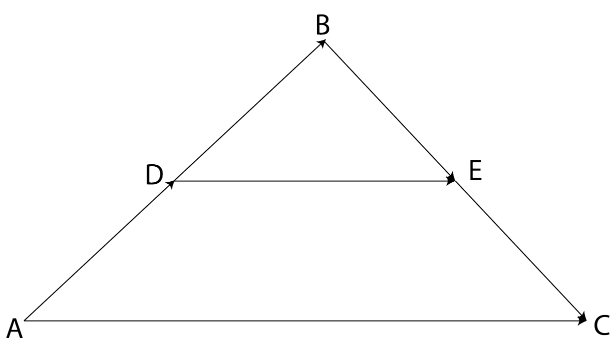
Nous allons maintenant énoncé certaine propriétés de la multiplication par un scalaire.

Théorème 4.4.1. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors nous avons les propriétés suivantes :

1. $\lambda\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
2. $1\vec{x} = \vec{x}$
3. $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$
4. $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
5. $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

Nous allons maintenant voir un application de ce que nous avons vu jusqu'à présent à un problème de géométrie.

Exemple 4.4.3. Démontrer que dans un triangle ABC, le segment joignant le milieu du segment AB et le milieu du segment BC est parallèle au segment AC, et est exactement la moitié de sa longueur. Voici une figure qui illustre le problème :

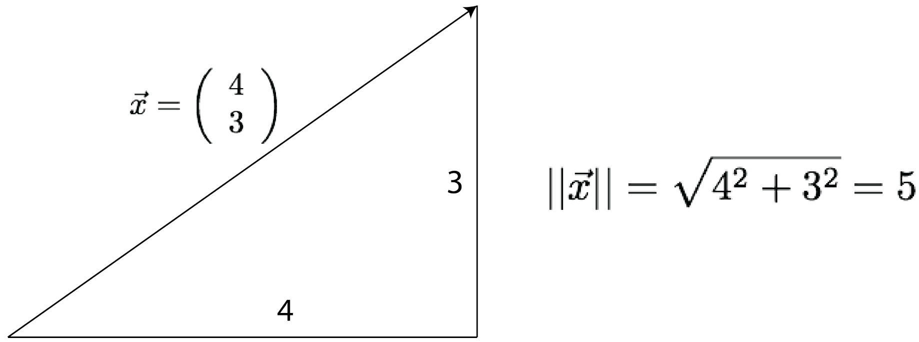


$$\begin{aligned}
\vec{AC} &= \vec{AB} + \vec{BC} \\
&= \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{BE} + \vec{EC} \\
&= 2\vec{DB} + 2\vec{BE}, \quad \text{car } \vec{AD} = \vec{DB} \text{ et } \vec{BE} = \vec{EC} \\
&= 2(\vec{DB} + \vec{BE}) \\
&= 2\vec{DE}
\end{aligned}$$

On a donc obtenu que $\vec{AC} = 2\vec{DE}$, ou de manière équivalente : $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. C'est à dire que $\vec{AC}$ et $\vec{DE}$ sont dans la même direction (i.e. parallèle), et DE est la moitié de la longueur de AC, ce qui est exactement ce que nous devions démontrer.

4.5 La norme d'un vecteur

Géométriquement, la norme d'un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, que l'on dénote par $\|\vec{x}\|$ est tout simplement sa longueur. Algébriquement, nous pouvons calculer sa longueur à l'aide du théorème de Pythagore.



De manière général, nous aurons donc :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}$$

Exemple 4.5.1. Calculer la norme du vecteur $\vec{x}$ ci dessous :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad ||\vec{x}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Definition 4.5.1. Un vecteur $\vec{x}$ est dit unitaire si $||\vec{x}|| = 1$.

Théorème 4.5.1. *Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors on peut trouver un vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ unitaire qui est dans la même direction que $\vec{x}$ en calculant :*

$$\vec{y} = \frac{1}{||\vec{x}||}\vec{x}$$

On dit alors que $\vec{y}$ est la normalisation du vecteur $\vec{x}$.

Nous allons compléter cette section avec quelques propriétés de la norme d'un vecteur.

Théorème 4.5.2. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. $||\vec{x}|| \geq 0$
2. $||\lambda\vec{x}|| = |\lambda| \, ||\vec{x}||$
3. $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$
4. $||x|| = 0$ si et seulement si $\vec{x} = \vec{0}$.

4.6 Le produit scalaire

Le produit scalaire est un opération qui permet d'associer à deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ un scalaire. On dénote le produit scalaire à l'aide d'un point « · ». Algébriquement, nous définissons le produit scalaire comme étant :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n$$

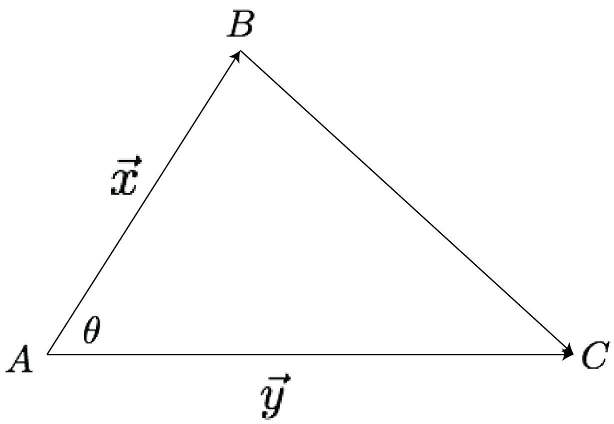
Nous allons maintenant essayer d'interpréter géométriquement le produit scalaire.

Théorème 4.6.1. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}||\ ||\vec{y}|| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Démonstration.



En commençant avec la loi des cosinus (aussi appellé théorème d'Al Kashi) on obtient :

$$\begin{aligned}
& (BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos(\theta) \\
\implies\ & (AB)(AC)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left[(AB)^2 + (AC)^2 - (BC)^2\right] \\
\implies\ & ||\vec{x}||||\vec{y}||\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left[||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - ||\vec{y} - \vec{x}||^2\right] \\
\implies\ & ||\vec{x}||||\vec{y}||\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right)\right] \\
\implies\ & ||\vec{x}||||\vec{y}||\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2x_iy_i + x_i^2)\right)\right] \\
\implies\ & ||\vec{x}||||\vec{y}||\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2x_iy_y \\
\implies\ & ||\vec{x}||||\vec{y}||\cos(\theta) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_y \\
\implies\ & ||\vec{x}||||\vec{y}||\cos(\theta) = \vec{x} \cdot \vec{y}
\end{aligned}$$

□

Application du produit scalaire en physique mécanique : Une application du produit scalaire en physique est donné par le calcul du travail W effectué par une force $\vec{F}$ ayant effectué un déplacement $\vec{d}$. Dans ce cas, nous avons la relation :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

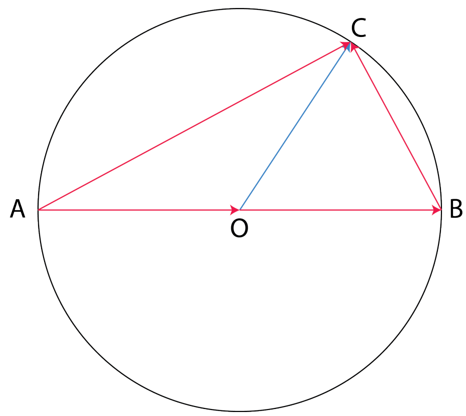
Nous allons maintenant regarder quelques propriétés du produit scalaire :

Théorème 4.6.2. Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, et $c \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$.
2. $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2 \geq 0$.
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.
6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaire.

Finalement, compléter cette section, nous allons voir un application du produit scalaire en géométrie.

Exemple 4.6.1. Démontrer que dans un cercle ayant pour diamètre AB, alors l'angle formé entre les segments AC et BC, où C est un point quelconque du cercle, est toujours un angle droit.



Remarquons premièrement que comme O est le centre du cercle, alors $\vec{AO} = \vec{OB}$. De plus, les 3 rayons sur la figure doivent avoir la même longueur. On a donc :

$$||\vec{AO}|| = ||\vec{OB}|| = ||\vec{OC}||$$

Maintenant, pour vérifier si l'angle entre les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$ est bien un angle droit, nous allons devoir calculer le produit scalaire entre ces deux vecteurs.

$$\begin{aligned}
\vec{AC} \cdot \vec{BC} &= (\vec{AO} + \vec{OC}) \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) \\
&= \vec{AO} \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) + \vec{OC} \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) \\
&= \vec{AO} \cdot \vec{BO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} + \vec{OC} \cdot \vec{BO} + \vec{OC} \cdot \vec{OC} \\
&= -\vec{AO} \cdot \vec{AO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} - \vec{OC} \cdot \vec{AO} + \vec{OC} \cdot \vec{OC} \\
&= -\vec{AO} \cdot \vec{AO} + \vec{OC} \cdot \vec{OC} \\
&= -||\vec{AO}||^2 + ||\vec{OC}||^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme le produit scalaire est 0, on peut donc conclure qu'il s'agit bien d'un angle droit.

4.7 Angle entre deux vecteurs

Dans la section précédente, nous avons vu que si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| \; ||\vec{y}|| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs. Nous pouvons maintenant utiliser ce résultat pour calculer l'angle entre les deux vecteurs. Nous avons donc :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}||\ ||\vec{y}||}$$

Exemple 4.7.1. On veut trouver l'angle entre les deux vecteurs suivants :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Par la formule précédente, nous avons donc :

$$\cos(\theta) = \frac{(1)(3) + (2)(4)}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{\sqrt{125}}$$

On obtient donc finalement que :

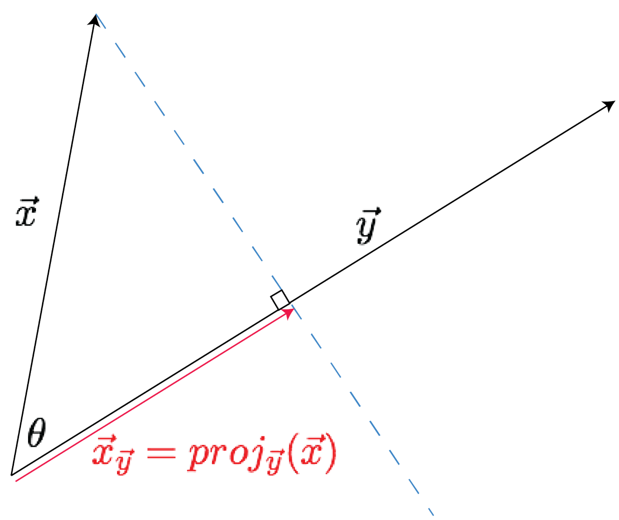
$$\theta = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{125}}\right) \approx 10,3\text{degrés}$$

Definition 4.7.1. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors on dit que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont :

1. orthogonaux s'ils sont perpendiculaires, c'est à dire si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.
2. orthonormaux s'ils sont perpendiculaires et unitaires, c'est à dire si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ et $||\vec{x}|| = ||\vec{y}|| = 1$

4.8 La projection

Supposons que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Nous définissons la projection du vecteur $\vec{x}$ sur le vecteur $\vec{y}$, dénoté $\vec{x}_{\vec{y}}$, comme étant un vecteur dans la même direction que $\vec{y}$ et perpendiculaire à $(\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}})$, comme l'illustre la figure i dessous. Noté que la projection est parfois aussi dénoté par $proj_{\vec{y}}(\vec{x})$.



Pour calculer la projection, commençons par calculer l'angle θ. On a donc :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}||\ ||\vec{y}||}$$

de plus, en trigonométrie, vous avez appris que $cos = \dfrac{adjacent}{hypotenuse}$, ce qui nous donne :

$$\cos(\theta) = \frac{||\vec{x}_{\vec{y}}||}{||\vec{x}||}$$

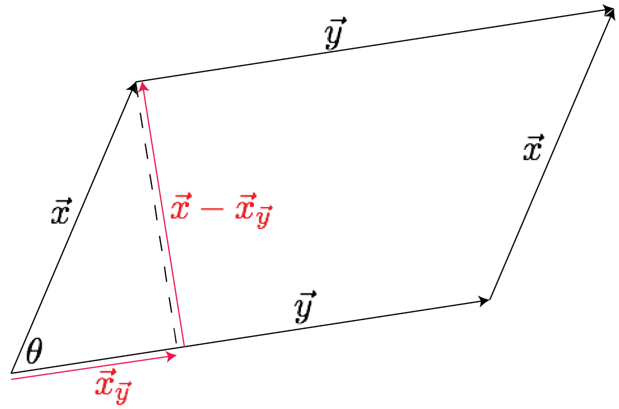
En comparant c'est deux équations, on obtient donc :

$$||\vec{x}_{\vec{y}}|| = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{y}||}$$

Nous avons donc trouver la longueur de la projection. Comme sa direction est la même que celle de $\vec{y}$ par définition, alors il s'agit maintenant de multiplier la longueur de la projection obtenu, par la normalisation du vecteur $\vec{y}$, ce qui nous donne finalement :

$$\vec{x}_{\vec{y}} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{y}||^2} \vec{y}$$

Exemple 4.8.1. Calculer l'aire d'un parallélogramme ayant pour côté les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.



Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}^2 &= ||\vec{y}||^2 \ ||\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}||^2 \\
&= ||\vec{y}||^2 \left(||\vec{x}||^2 - ||\vec{x}_{\vec{y}}||^2\right) \quad \text{Par le théorème de Pythagore} \\
&= ||\vec{y}||^2 \left(||\vec{x}||^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{||\vec{y}||^4} ||\vec{y}||^2\right) \\
&= ||\vec{y}||^2 \left(||\vec{x}||^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{||\vec{y}||^2}\right) \\
&= ||\vec{x}||^2 ||\vec{y}||^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2
\end{aligned}$$

Ce qui est valide pour n'importe quel parallélogramme, peut importe dans un espace à combien de dimension on se trouve. En particulier, s'il s'agit d'un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$ avec $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}^2 &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \\
&= (x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2) - (x_1^2 y_1^2 + 2 x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_2^2) \\
&= x_1^2 y_2^2 - 2 x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 \\
&= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2
\end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\text{Aire } = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

Remarquez que la valeur absolue est nécessaire pour garantir que l'aire est une valeur positive.

La formule pour l'aire du parallélogramme que nous venons de calculer joue un rôle particulièrement important en algèbre linéaire. Nous allons revoir cette équation dans un contexte différent dans la résolution des systèmes d'équations linéaires à 2 équations et 2 inconnus, puis nous allons l'utiliser pour définir le déterminant d'une matrice 2×2.

4.9 Le produit vectoriel

Nous allons maintenant étudier le produit vectoriel. Il s'agit d'un opération qui n'est définie que pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Supposons que $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Nous voulons construire un vecteur $\vec{z}$ qui est perpendiculaire à $\vec{x}$ et à $\vec{y}$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0 \\ \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0 \end{array}\right.$$

Maintenant, en multipliant la première équation par y_1 et la seconde équation par x_1, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 y_1 z_1 + x_2 y_1 z_2 + x_3 y_1 z_3 = 0 \\ x_1 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_2 + x_1 y_3 z_3 = 0 \end{array}\right. \implies (x_2 y_1 - x_1 y_2) z_2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_3 = 0$$

On obtient donc :

$$(x_3 y_1 - x_1 y_3) z_3 = (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_2$$

Nous cherchons une solution pour z_1, z_2 et z_3. Bien sur, cette dernière équation nous donne un infinité de solution. Nous allons donc devoir en choisir une. Posons

$$z_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \text{ et } z_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Maintenant pour calculer z_1 on va utiliser l'équation $x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} x_1 z_1 &= -x_2 z_2 - x_3 z_3 \\ &= -x_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) - x_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= -x_2 x_3 y_1 + x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 \\ &= x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$z_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

Nous allons donc définir le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ comme étant :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

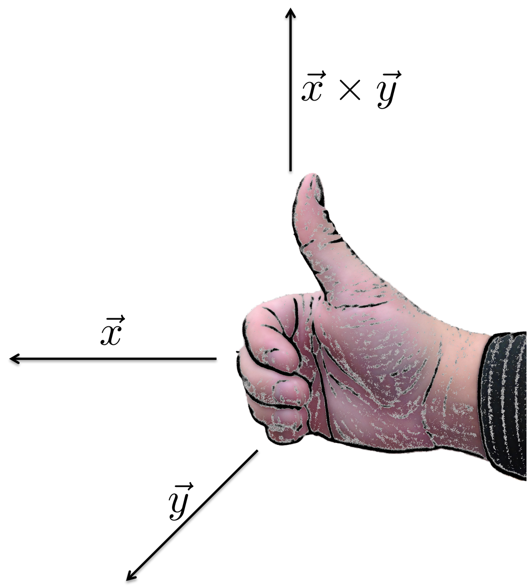
Nous allons maintenant voir que le produit vectoriel peut aussi être définit géométriquement

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \sin^2(\theta) &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(1 - \cos^2(\theta)) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\left(1 - \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}\right) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

On obtient donc que :

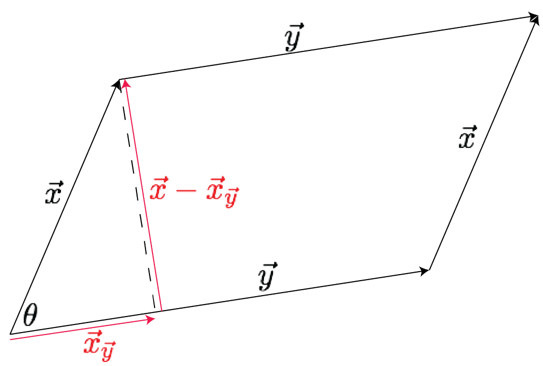
$$\vec{x} \times \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \sin(\theta) \vec{n}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire qui est perpendiculaire à $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Remarquez qu'il y a deux vecteurs qui sont à la fois perpendiculaire à $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Le choix de $\vec{n}$ va donc dépendre de la règle de la main droite.



La règle de la main droite nous dit que pour trouver la direction du vecteur normal et unitaire $\vec{n}$ on doit placer notre main droite de sorte que lorsque notre main est ouverte, nos doigts pointent dans la direction du vecteur $\vec{x}$, et lorsque nous replions nos doigts, ils pointent dans la direction du vecteur $\vec{y}$. La direction de notre pouce indiquera alors la direction du vecteur $\vec{n}$ (donc la direction du vecteur $\vec{x} \times \vec{y}$). Attention à ne pas confondre vos deux mains. Il est essentiel que vous preniez votre main DROITE pour que la méthode fonctionne. Si vous prenez votre main gauche, vous obtiendrez un vecteur dans la direction opposée.

Le produit vectoriel peut être utiliser pour calculer l'aire d'un parallélogramme dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple, si nous souhaitons trouver l'aire du parallélogramme ci dessous.



$$\text{Aire} = \|\vec{y}\| \, \|\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}\| = \|\vec{y}\| \, \|\vec{x}\| \sin(\theta) = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$$

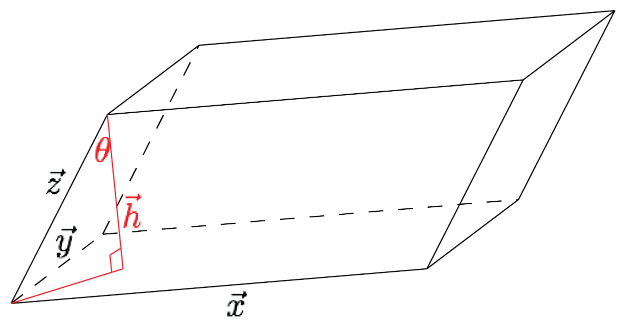
Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 4.9.1. L'aire d'un parallélogramme (dans $\mathbb{R}^3$) engendré par des vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ est donné par :

$$\text{Aire } = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$$

Le produit vectoriel combiné avec le produit scalaire peut être utiliser pour calculer le volume d'un parallélépipède. Par exemple, essayons de calculer la volume du parallélépipède ci dessous. Pour ce faire, nous devons calculer :

$$\text{Volume} = \text{Aire de la base } \times \text{ hauteur}$$



L'aire de la base n'est pas très difficile à trouver. Comme la base est un parallélogramme, nous pouvons utiliser la formule que nous avons vu précédemment.

$$\text{Aire de la base } = ||\vec{x} \times \vec{y}||$$

La hauteur (que nous dénoterons $\vec{h}$) est un peu plus difficile à trouver. Remarquons cependant que la hauteur doit être perpendiculaire à la base, ce qui signifit que la hauteur doit être perpendiculaire à $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Nous allons donc chercher la longueur du vecteur $\vec{h}$. Un peu de trigonométrie nous donne :

$$||h|| = ||z|| \cos(\theta)$$

Où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{h}$ et $\vec{z}$. Comme le vecteur $\vec{h}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, le vecteur $\vec{h}$ doit donc être dans la même direction que $\vec{x} \times \vec{y}$ ou dans la direction opposé. Nous avons donc que θ est l'angle formé entre $\vec{z}$ et $\vec{x} \times \vec{y}$. On obtient donc :

$$\text{Volume} = ||\vec{h}|| \; ||\vec{x} \times \vec{y}|| = ||\vec{x} \times \vec{y}|| ||\vec{z}|| \; |\cos(\theta)| = |(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}|$$

Remarquez que la valeur absolue est nécessaire, car nous ne savons pas si $\vec{h}$ est dans la même direction que $\vec{x} \times \vec{y}$, ou dans la direction opposé, ce qui change le signe de $\cos(\theta)$, mais pas la valeur absolue. Nous allons maintenant réécrire ce que nous venons de démontrer sous forme d'un théorème.

Théorème 4.9.2. Le volume d'un parallélépipède engendré par des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ est donné par la formule :

$$\text{Volume } = |(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}|$$

Nous allons maintenant compléter cette section en énonçant certaine propriétés du produit vectoriel.

Théorème 4.9.3. Supposons que $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a les propriétés suivantes :

1. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z})$
2. $\lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = (\lambda\vec{x}) \times \vec{y})$
3. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
4. $\vec{x} \times \vec{y}$ est orthogonal à $\vec{x}$ et à $\vec{y}$.

Notez cependant que le produit vectoriel n'est en général pas associatif. Ce qui signifie qu'en général nous avons :

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \neq (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$$

notez cependant que dans certain cas, il est possible d'avoir l'égalité.

Chapitre 5

Opérations sur les matrices

5.1 Introduction

Les matrices sont des tableaux de nombres nous permettant de simplifier l'étude des fonctions linéaires, et comme nous le verrons dans le prochain chapitre, l'étude des systèmes d'équations linéaires. Une fonction linéaire est une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pour laquelle

$$f(0) = 0$$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

Par exemple, la fonction ci dessous est un fonction linéaire :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 5z \\ -3x + 4y + 10z \\ x + 5y + 12z \end{pmatrix}$$

Les matrices vont nous permettre de séparer les constantes des variables. Nous allons donc écrire la fonction sous la forme suivante à la place.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nous avons donc écrit la fonction comme étant le produit d'une matrice par un vecteur. En particulier, remarquer que les vecteurs sont des matrices ayant une seule colonne. Dans ce chapitre, nous allons traduire les différentes opérations sur les fonctions dans le language des matrices.

Si A est une matrice, nous dirons que A est de dimension $m \times n$ si la matrice A a exactement m lignes et n colonnes. Dans ce cas, nous écrirons $A_{m \times n}$. Nous allons habituellement (même si ce n'est pas obligatoire) dénoté une matrice par une lettre majuscule. Nous dénoterons habituellement les éléments de la matrice par la lettre correspondante en minuscule avec des indices. Nous aurons donc par exemple :

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

5.2 Addition et soustraction de matrices

L'addition et la soustraction de matrice se fait de manière similaire à l'addition et la soustraction de vecteur. On effectue l'opération en additionnant (ou soustrayant) composante par composante. Remarquez que ces opérations sont définies seulement pour des matrices ayant la même dimension. C'est à dire ayant le même nombre de colonnes et le même nombre de lignes. Voici quelques exemples illustrant l'idée :

Exemple 5.2.1.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \text{ n'est pas définie}$$

Le théorème ci dessous donne une liste de propriétés de l'addition et la soustraction de matrice.

Théorème 5.2.1. Si A, B et C sont des matrices de dimension $m \times n$, et 0 est la matrice de dimension $m \times n$ contenant uniquement des 0. Alors on a :

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = 0 + A = A$
4. $A - A = 0$

5.3 Multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire est aussi très semblable dans le cas des matrices que celui des vecteurs. Il s'agit de multiplier chacune des composantes de la matrice par le scalaire. La dimension de la matrice obtenu sera donc la même que celle de la matrice originale.

Exemple 5.3.1.

1.

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2.

$$5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 25 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Le théorème ci dessous nous donne quelques propriétés de la multiplication par un scalaire :

Théorème 5.3.1. Si A et B sont des matrices de même dimension, et 0 la matrice de même dimension que A et B qui contient uniquement des 0, alors :

1. $0A = 0$
2. $1A = A$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

5.4 Multiplication de matrices

La multiplication de matrice est plus difficile à définir. Pour pouvoir le faire, nous allons devoir nous rappeler qu'un matrice n'est en fait rien d'autre qu'un représentation d'une fonction linéaire. Dans ce cas, la multiplication de matrice n'est en fait rien d'autre que la composition de fonction. Commençons par un exemple simple qui nous a permis de définir ce qu'est une matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1) + 2(2) + 3(3) \\ 4(1) + 5(2) + 6(3) \\ 7(1) + 8(2) + 9(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Le cas général est en fait très semblable, mais commençons d'abord avec des fonctions. Supposons que nous avons deux fonctions : $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie comme suit :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \text{ et } g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ex + fy \\ gx + hy \end{pmatrix}$$

et supposons que nous voulons calculer $f \circ g$. On a donc :

$$\begin{aligned} (f \circ g)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\left(g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} ex + fy \\ gx + hy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(ex + fy) + b(gx + hy) \\ c(ex + fy) + d(gx + hy) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ae + bg)x + (af + bh)y \\ (ce + dg)x + (cf + dh)y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans le language des matrices, cela nous donnera :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

En utilisant la même idée pour des matrices d'autres dimensions, on remarque donc que si A et B sont des matrices de dimension $m \times n$ et $p \times q$, alors le produit AB est définie seulement lorsque $n = p$. Dans ce cas, la dimension de la matrice AB est $m \times q$. Supposons dans que le produit AB existe, et appelons le par la lettre C. Nous définirons alors :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

C'est à dire que nous calculons la composante c_{ij} en calculant le produit scalaire de la i-ème ligne de la matrice A avec la transposer de la j-ème colonne de la matrice B. Ceci peut sembler particulièrement étrange à première vu, par contre les chapitres suivants devrait vous convaincre qu'il s'agit bien de la meilleure façon de définir la multiplication de matrices.

Exemple 5.4.1.

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & 18 \\ 84 & 69 & 54 \\ 138 & 114 & 90 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{ n'est pas définie}$$

En lien avec le produit de matrice, il y a une matrice (ou plus particulièrement, une matrice pour chaque entier ≥ 1) qui est particulièrement important. Il s'agit de la matrice identité. Si n est un entier, $n \geq 1$, alors on définit la matrice I_n comme étant une matrice de dimension $n \times n$ ayant des 0 partout, sauf des 1 sur la diagonale principale.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsque la dimension de la matrice est claire d'après le contexte, on écrira tout simplement I plutôt que I_n. L'importance de la matrice identité est qu'elle sert d'identité pour le produit de matrice. On aura donc :

$$AI = IA = A$$

pour toutes matrice A. Ici on suppose que la dimension de I est choisi de sorte que le produit soit bien définie.

Théorème 5.4.1. Si A, B et C sont des matrices pour lesquels les produits et sommes ci dessous sont définies, et k est un scalaire, alors le produit de matrices a les propriétés suivantes :

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

Attention : En général le produit de matrice n'est pas commutatif. C'est à dire qu'en général, si A et B sont des matrices, alors $AB \neq BA$. Par contre, dans certain cas particulier l'équation est satisfaite.

5.5 L'inverse d'une matrice

Dans cette section, nous allons nous intéressé à la question de trouver une matrice B pour laquelle $AB = I$ où A est une matrice connu. Si une telle matrice B existe, nous la dénoterons par A^{-1}. Nous allons donc faire la définition suivante :

Definition 5.5.1. Si A est une matrice carré, alors on appelle matrice inverse de A, et on la dénote A^{-1} une matrice tel que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

dans le cas où il n'existe aucune matrice A^{-1} ayant cette propriété, nous dirons que la matrice A n'est pas inversible.

Exemple 5.5.1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, on veut vérifier si la matrice A est inversible, et si elle l'est, on veut calculer sont inverse. Pour ce faire, on doit trouver x, y, z, w tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en multipliant les matrices de gauche, nous obtenons alors :

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+5z & 3y+5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2w=0 \\ 3x+5z=0 \\ 3y+5w=1 \end{cases}$$

Comme les équations 1 et 3 contiennent seulement des x et des z, et que les équations 2 et 4 contiennent seulement des y et w, on peut donc séparer le système en deux systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ 3x+5z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y+2w=0 \\ 3y+5w=1 \end{cases}$$

On obtient donc $x=-5$, $y=2$, $z=3$ et $w=-1$, ce qui nous donne la matrice :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous allons voir plus tard dans le cours que la matrice inverse joue un rôle très important en lien avec la résolution des systèmes d'équations linéaires et allons voir des façons plus efficaces de la calculer dans les deux chapitres suivants. Remarquez que la matrice inverse n'existe pas toujours. Certaine matrice n'ont pas d'inverse, un peu comme dans le cas des nombres réels, la division par zéro n'est pas possible.

Voici quelques propriétés de la matrice inverse :

Théorème 5.5.1. Si A et B sont des matrices inversible, alors :

1. $I^{-1} = I$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. L'inverse d'une matrice est unique

5.6 La transposé

La transposé est une opération définie pour n'importe quelle matrices, et qui n'a malheureusement aucune correspondance avec les fonctions. Par contre, la simplicité de calculer la transposé en fait un opération particulièrement intéressante à étudier. Dans certain cas, elle peut aussi nous simplifier grandement la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Si A est une matrice, alors on définit la transposé, dénoté A^T, comme étant la matrice A pour laquelle ont inverse les lignes et les colonnes de la matrice.

Exemple 5.6.1. Voici quelques exemples de transposé d'une matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarquez que A est une matrice de dimension $m \times n$, alors A^T est une matrice de dimension $n \times m$.

Definition 5.6.1. Si A est une matrice carré pour laquelle $A^{-1} = A^T$, alors on dit que la matrice A est orthogonale.

Exemple 5.6.2. On veut montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. Pour ce faire, il s'agit de vérifier que $A^T A = I$.

$$\begin{aligned}
A^T A &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice A est donc une matrice orthogonale.

Voici quelques propriétés de la transposé d'une matrice :

Théorème 5.6.1. Si A et B sont des matrices pour lesquels les produits et sommes ci dessous sont définies, et k est un scalaire, alors la transposé d'une matrice a les propriétés suivantes :

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$

5.7 Le déterminant (cas 2×2)

À chaque matrice carré, nous voulons maintenant définir un nombres réels que nous appellerons le déterminant. Mais comment définir le déterminant ? Quelle valeur choisir ?

Commençons par essayer de résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

En isolant y dans chacune des 2 équations, on obtient :

$$\begin{cases} y = \dfrac{e - ax}{b} \\ y = \dfrac{f - cx}{d} \end{cases}$$

Puis on égale les deux équations :

$$\begin{aligned}
\frac{e - ax}{b} = \frac{f - cx}{d} &\Rightarrow d(e - ax) = b(f - cx) \\
&\Rightarrow de - adx = bf - bcx \\
&\Rightarrow (bc - ad)x = bf - de \\
&\Rightarrow x = \frac{bf - de}{bc - ad} \\
&\Rightarrow x = \frac{de - bf}{ad - bc}
\end{aligned}$$

Puis on utilise cette valeur pour trouver y :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e - ax}{b} \\
&= \frac{e - a\left(\frac{de-bf}{ad-bc}\right)}{b} \\
&= \frac{(ad-bc)e - a(de-bf)}{b(ad-bc)} \\
&= \frac{ade - bce - ade + abf}{b(ad-bc)} \\
&= \frac{abf - bce}{b(ad-bc)} \\
&= \frac{af - ce}{ad - bc}
\end{aligned}$$

On remarque que dans les deux cas, le dénominateur est $ad - bc$. Cette valeur doit donc être relativement importante en algèbre linéaire. Bien sur, la solution que nous avons trouver ci dessus est valable si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Maintenant, essayons de trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} ae + bg = 1 \\ af + bh = 0 \\ ce + dg = 0 \\ cf + dh = 1 \end{cases}$$

Rappellons qu'ici nous considérons a, b, c, d comme étant des constantes. Donc on peut diviser le système d'équations linéaires, en deux systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} ae + bg = 1 \\ ce + dg = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} af + bh = 0 \\ cf + dh = 1 \end{cases}$$

Ce qui nous donne les solutions suivantes :

$$e = \frac{d}{ad - cb}, \quad f = \frac{-b}{ad - bc}, \quad g = \frac{-c}{ad - bc}, \quad h = \frac{a}{ad - bc}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

en particulier, on remarque que la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Finalement, on se rappelle que si on a un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$ engendré par des vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

alors l'aire du parallélogramme est donne par :

$$\text{Aire } = abs(ad - bc)$$

Donc la valeur de $ad - bc$ semble particulièrement importante. On va donc définir le déterminant d'une matrice 2×2 de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Remarquez la notation pour le déterminant d'une matrice. On utilise des barres verticales. Il ne faut pas confondre le déterminant d'une matrice avec la valeur absolue d'un nombre réel. Il s'agit de deux notions complètement différentes.

Exemple 5.7.1. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

Finalement, remarquez que le déterminant peut être définie pour n'importe quelle matrice carré. Par contre, il faudra attendre au chapitre 4 avant de pouvoir définir le déterminant des matrices de plus grande dimension.

Chapitre 6

La résolution des systèmes d'équations linéaires

6.1 Introduction

Un système d'équations linéaires est un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Vous avez déjà appris au secondaire quelques méthodes pour résoudre ce type de système, et c'est ce que nous avons utilisé dans les chapitres 1 et 2 pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Ces méthodes sont résumé en appendice.

Par contre, les méthodes que vous avez appris au secondaire ne sont pas toujours très efficaces, en particulier lorsque le nombre d'équations ou d'inconnues est grand. Nous allons remédier à cette situation dans ce chapitre en étudiants d'autres techniques de résolutions des systèmes d'équations linéaires tel que les méthodes de Gauss, Gauss-Jordan, Cramer et de la matrice inverse.

Ces nouvelles méthode auront un point en commun : l'utilisation des matrices. Nous allons donc réécrire le système d'équation ci haut sous forme matricielle (ce qui est toujours possible) :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Maintenant, nous allons simplifier un peu notre notation. Remarquez que dans nos calcul, le nom des variables n'a pas vraiment d'importance. Il n'est donc pas vraiment nécessaire de les écrire. On va donc écrire le système d'équations linéaires sous la forme :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

C'est ce qu'on appelle une matrice augnementé.

Théorème 6.1.1. Si $A\vec{x} = \vec{b}$ est un système d'équations linéaires, alors l'un des trois cas ci dessous est vrai :

1. Le système a une unique solution
2. Le système n'a aucune solution
3. Le système a une infinité de solutions

Il sera donc important dans ce chapitre d'être capable de traiter chacun de ces trois cas.

6.2 Méthode de Gauss : généralité

La méthode de Gauss est l'une des méthodes les plus efficaces pour résoudre un système d'équations linéaires. Pour utiliser la méthode, nous devons commencer par écrire le système sous forme de matrice augnementé, puis faire des opérations sur cette matrice jusqu'à ce que cette dernière soit sous forme échelon. Lorsque la matrice est sous forme échelon, il est alors facile de trouver l'ensembles des solutions (s'il y en a).

Definition 6.2.1. Une matrice est sous forme échelon si le nombre de zéro au début d'une ligne qui ne contient pas uniquement des zéros est toujours plus grand que le nombre de zéro au début de la ligne précédente. De plus, les lignes contenant uniquement des zéros doivent être au bas de la matrice.

Exemple 6.2.1. Les matrices suivantes sont sous forme échelon :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 6.2.2. Les matrices suivantes ne sont pas sous forme échelon :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La question est maintenant de savoir comment faire pour prendre la matrice augnementé d'un système d'équations linéaires et la transformé sous forme de matrice augmenté.

Théorème 6.2.1. Si L_i représente la i-ème ligne d'une matrice augmenté, alors les opérations suivantes ne change pas l'ensemble des solutions :

1. $cL_i \to L_i$ où c est une constante différente de zéro
2. $L_i + cL_j \to L_i$ où c est une constante et $i \neq j$
3. $L_i \leftrightarrow L_j$
4. $aL_i + bL_j \to L_i$ où $i \neq j$ et a est une constante différente de zéro

Exemple 6.2.3. On veut transformé la matrice $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$ sous forme de matrice échelon.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim^{L_2-3L_1\to L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right)$$

Exemple 6.2.4. On veut transformé la matrice $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array}\right)$ sous forme de matrice échelon.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array}\right) \sim^{L_2-4L_1\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array}\right) \sim^{L_3-7L_1\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & -6 & -12 & -58 \end{array}\right)$$

$$\sim^{L_3-2L_2\to L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & -3 & -6 & -29\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

6.3 Le rang et le théorème de Rouché-Fontené

Definition 6.3.1. Si A est une matrice, alors on définie le rang de A (dénoté $rang(A)$) comme étant le nombre de ligne non nul de la matrice A après qu'elle est été transformé sous forme échelon.

Théorème 6.3.1. Si A est une matrice, alors $rang(A)$ est bien définie. C'est à dire que peut importe les étapes que l'on suit pour transformé la matrice sous forme échelon, le nombre de ligne non nul sera toujours le même.

Si $A\vec{x} = b$ est un système d'équations linéaires, alors on dit que A est la matrice des coefficients, et on dénote par $[A|\vec{b}]$ la matrice augmenté du système. Nous allons maintenant utiliser le concept de rang pour déterminer le nombre de solutions du système d'équations linéaires.

Théorème 6.3.2. **(Rouché-fontené)** Si A est une matrice de dimension $m \times n$ et $A\vec{x} = \vec{b}$ est un système d'équations linéaires tel que :

1. $rang\left([A|\vec{b}]\right) > rang(A)$ alors le système n'a aucune solution
2. $rang\left([A|\vec{b}]\right) = rang(A) = n$ alors le système a exactement une solution
3. $rang\left([A|\vec{b}]\right) = rang(A) < n$ alors le système a une infinité de solutions

Exemple 6.3.1. On veut savoir combien de solution le système d'équations linéaires suivant possèdent :

$$\begin{cases} x + 2y = 5\\ 3x + 4y = 6\end{cases}$$

On doit donc écrire le système sous forme de matrice augmenté, et la transformé sous forme échelon comme nous avons fait dans la section précédente. On obtient donc :

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{array}\right)\sim^{L_2-3L_1\to L_2}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 0 & -2 & -9\end{array}\right)$$

On a donc :

$$rang\left([A|\vec{b}]\right) = rang(A) = 2$$

Le système a donc exactement une solution.

Exemple 6.3.2. On veut savoir combien de solution le système d'équations linéaires suivant possèdent :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10\\ 4x + 5y + 6z = 11\\ 7x + 8y + 9z = 12\end{cases}$$

On doit donc écrire le système sous forme de matrice augmenté, et la transformé sous forme échelon comme nous avons fait dans la section précédente. On obtient donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 4 & 5 & 6 & 11\\ 7 & 8 & 9 & 12\end{array}\right)\sim^{L_2-4L_1\to L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & -3 & -6 & -29\\ 7 & 8 & 9 & 12\end{array}\right)\sim^{L_3-7L_1\to L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & -3 & -6 & -29\\ 0 & -6 & -12 & -58\end{array}\right)$$

$$\sim^{L_3-2L_2\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On a donc :

$$rang\left([A|\vec{b}]\right) = rang(A) = 2 < 3$$

Le système a donc une infinité de solutions.

Exemple 6.3.3. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

Nous allons donc commencer par chercher combien de solution le système a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim^{L_2-2L_1\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim^{L_3-3L_1\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim^{L_2\leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On a donc :

$$rang\left([A|\vec{b}]\right) = 2 \quad \text{et} \quad rang(A) = 1$$

Comme c'est deux valeurs ne sont pas égales, alors le système n'a aucune solution.

6.4 Méthode de Gauss : Solution unique

Nous somme maintenant prêt à compléter la résolution des systèmes d'équations linéaires lorsque ceux ci admettent au moins une solution. Nous allons commencer par ceux ayant une solution unique, et dans la prochaine section nous traiterons de ceux ayant un infinité de solution.

Exemple 6.4.1. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 13 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim^{3L_2-4L_1\to L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 13 \\ 0 & -26 & -52 \end{array}\right)$$

On peut donc vérifier qu'il y a bien exactement une solution. Il ne nous reste plus qu'à calculer cette solution. On commence donc par la dernière équation. On a donc :

$$-26y = -52 \Rightarrow y = 2$$

Puis on continue avec l'équation précédente :

$$3x + 5y = 13 \Rightarrow 3x + 5(2) = 13 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Exemple 6.4.2. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 16 \\ 2x + 5y - z = -11 \\ 3x - 2y + z = 20 \end{cases}$$

On a donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 16 \\ 2 & 5 & -1 & -11 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \end{array}\right) \sim^{L_2-2L_1\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 16 \\ 0 & -3 & -7 & -43 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \end{array}\right) \sim^{L_3-3L_1\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 16 \\ 0 & -3 & -7 & -43 \\ 0 & -14 & -8 & -28 \end{array}\right)$$

$$\sim^{3L_3-14L_2\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 16 \\ 0 & -3 & -7 & -43 \\ 0 & 0 & 74 & 518 \end{array}\right)$$

On remarque donc que le système a exactement une solution. Pour calculer cette solution, on commence par la ligne du bas :

$$74z = 518 \Rightarrow z = 7$$

Puis on travaille avec la seconde équation :

$$-3y - 7(7) = -43 \Rightarrow -3y - 49 = -43 \Rightarrow -3y = 6 \Rightarrow y = -2$$

Puis on termine avec la première équation :

$$x + 4(-2) + 3(7) = 16 \Rightarrow x - 8 + 21 = 16 \Rightarrow x = 3$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases}$$

6.5 Méthode de Gauss : Infinité de solutions

Il est maintenant temps d'étudier le cas où nous avons un infinité de solutions.

Definition 6.5.1. Si A est une matrice sous forme échelon, alors on appelle pivot le premier élément non nul d'une ligne.

Pour trouver l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires ayant un infinité de solutions, nous devrons avoir recoure à ce qu'on appel des variables libres. Pour chaque valeur de cette variable libre, nous obtiendrons une solutions différentes. Nous devons poser une variable libre pour chacune des colonnes de la matrice sous forme échelon n'ayant pas de pivot. On résout ensuite les autres variables en fonction de ces variables libres.

Exemple 6.5.1. On veut trouver l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 11 \\ 7x + 8y + 9z = 12 \end{cases}$$

On a donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array}\right) \sim^{L_2-4L_1\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array}\right) \sim^{L_3-7L_1\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & -6 & -12 & -58 \end{array}\right)$$

$$\sim^{L_3-2L_2\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On remarque donc qu'il y a un infinité de solutions. Comme la colonne du z n'a pas de pivot, on doit donc poser une variable libre. Posons $z = s$, puis on utilise la seconde ligne pour trouver y :

$$y = \frac{-29 + 6s}{-3} = \frac{29 - 6s}{3}$$

Puis, on utilise la première ligne pour trouver x :

$$x = 10 - 2y - 3z = 10 - 2\left(\frac{29-6s}{3}\right) - 3s = \frac{30 - 58 + 12s - 9s}{3} = \frac{-28+3s}{3}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} (-28+3s)/3 \\ (29-6s)/3 \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc pour chaque valeur de s, nous obtenons une solution du système.

Exemple 6.5.2. On veut trouver l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + y + w = 1 \\ y + z + v = 2 \\ x + 2y + z + 2w + 3v = 6 \end{cases}$$

On commence donc par écrire le système d'équations sous forme de matrice augmenté, puis on la transforme sous forme échelon. Attention à l'ordre des variables, ici nous les mettrons dans l'ordre x, y, z, w, v.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim^{L_3 - L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim^{L_3 - L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Comme il n'y a pas de pivot dans les colonnes 3 et 5, on va donc poser :

$$z = s \text{ et } v = t$$

Ce qui nous donne pour les autres variables en commençant par la ligne du bas :

$$w + 2v = 3 \Rightarrow w = 3 - 2v = 3 - 2t$$

$$y + z + v = 2 \Rightarrow y = 2 - z - v = 2 - s - t$$

$$x + y + w = 1 \Rightarrow x = 1 - y - w = 1 - (2 - s - t) - (3 - 2t) = -4 + s + 3t$$

L'ensemble des solutions du système est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} s + 3t - 4 \\ 2 - s - t \\ s \\ 3 - 2t \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

6.6 Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan est très semblable à celle de Gauss, excepté que nous allons transformé nos matrice augmenté sous forme échelon-réduite (plutôt que sous forme échelon). Une matrice est dite sous forme échelon réduite si :

— elle est sous forme échelon

— tous les pivots sont des 1

— tous les nombres au dessus des pivots sont des 0

Exemple 6.6.1. On veut trouver l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} 4x + 3y - z = 48 \\ 5x - 3y + 2z = -4 \\ 6x + y + 5z = 34 \end{cases}$$

On a donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 5 & 34 \end{array}\right) \sim^{4L_2-5L_1\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 6 & 1 & 5 & 34 \end{array}\right) \sim^{2L_3-3L_1\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 0 & -7 & 13 & -76 \end{array}\right)$$

$$\sim^{27L_3-7L_2\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 0 & 0 & 260 & -260 \end{array}\right) \sim^{\frac{1}{260}L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 48 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim^{L_1+L_3\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 47 \\ 0 & -27 & 13 & -256 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim^{L_2-13L_3\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 47 \\ 0 & -27 & 0 & -243 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim^{\frac{-1}{27}L_2\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 47 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim^{L_1-3L_2\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim^{\frac{1}{4}L_1\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

On peut maintenant directement lire la solution : $x = 5, y = 9, z = -1$.

Exemple 6.6.2. Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + w = 5 \\ x + 2y - z + 4w = 10 \end{cases}$$

On a donc :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim^{2L_2-L_1\to L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 15 \end{array}\right) \sim^{L_1-3L_2\to L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 10 & -20 & -40 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 15 \end{array}\right)$$

$$\sim^{\frac{1}{2}L_1\to L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -10 & -20 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 15 \end{array}\right)$$

Comme les colonnes 3 et 4 n'ont pas de pivot, il y a donc un infinité de solutions. On va donc poser :

$$z = s, w = t$$

Ce qui nous donne :

$$y = 3s - 7t + 15$$

$$x = -5s + 10t - 20$$

Donc l'ensemble des solutions du systèmes est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -5s + 10t - 20 \\ 3s - 7t + 15 \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

6.7 Indépendance linéaire

Definition 6.7.1. Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^k$, alors on dit que ces vecteurs sont linéairement indépendant si le système d'équations linéaires

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 + ... + \lambda_k\vec{u}_k = \vec{0}$$

Possède exactement une solution. Dans ce cas, la solution est :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_k = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs sont linéairement dépendant.

Exemple 6.7.1. Est-ce que les vecteurs suivants sont linéairement indépendant ?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour le savoir, on doit résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim^{L_2 - 2L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Comme ce système d'équation a une unique solution, cette solution doit donc être $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Les vecteurs sont donc bien linéairement indépendant.

Théorème 6.7.1. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2 \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k\}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et si $k > n$, alors les vecteurs ne sont jamais linéairement indépendant (i.e. ils sont linéairement dépendant.)

Definition 6.7.2. Si $\{\vec{x}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k\}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors on dit que $\vec{x}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k\}$ si le système d'équations linéaires

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 + ... + \lambda_k \vec{u}_k$$

admet au moins une solutions (donc une seule solution, ou une infinité).

Théorème 6.7.2. Si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k\}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors les vecteurs de S sont linéairement dépendant si et seulement si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de S.

Exemple 6.7.2. Est-ce que les vecteurs suivant sont linéaire indépendant ou dépendant :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

On remarque facilement que $\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}$. Comme le vecteur $\vec{w}$ est combinaison linéaire des deux autres vecteurs, on peut donc conclure que les vecteurs sont linéairement dépendant. Remarquez que nous aurions aussi pu justifier le fait que les vecteurs sont linéairement dépendant en utilisant le fait que nous avons 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

6.8 Méthode de Cramer (cas 2×2)

Finalement, pour compléter ce chapitre, nous allons revoir une formule que nous avons déjà vu au chapitre précédent, et qui nous permet de calculer directement les solutions d'un système d'équations linéaires à 2 équations et 2 inconnus. Considérons le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Nous avons vu que si $ad - bc \neq 0$, alors ce système a une unique solution donnée par :

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc} \text{ et } y = \frac{af - be}{ad - bc}$$

Ce qui peut s'écrire sous forme de déterminant. On va donc poser les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A_x = \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}, A_y = \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$x = \frac{det(A_x)}{det(A)}, \quad y = \frac{det(A_y)}{det(A)}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Cramer. L'une des grandes questions qu'on peut maintenant se poser est comment généraliser cette idée à des systèmes ayant n équations et n inconnus. Cela fera l'objet du chapitre suivant. Mais avant, voici des exemples d'utilisation de la formule de Cramer.

Exemple 6.8.1. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivants à l'aide de la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ 4x + 5y = 53 \end{cases}$$

On va donc commencer par trouver nos matrices A, A_x, A_y :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_x = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 53 & 5 \end{pmatrix}, A_y = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 4 & 53 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne :

$$x = \frac{det(A_x)}{det(A)} = \frac{22}{11} = 2$$

$$y = \frac{det(A_y)}{det(A)} = \frac{99}{11} = 9$$

En particulier, le système admet exactement une solution.

Exemple 6.8.2. En utilisant la méthode de Cramer, on veut montrer que le système d'équations linéaires suivant n'admet pas une unique solution.

$$\begin{cases} 5x + 6y = 10 \\ 10x + 12y = 8 \end{cases}$$

Pour ce faire, nous avons tout simplement à calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

comme $det(A) = 0$, le système n'admet pas une unique solution. Remarquez que la méthode de Cramer ne nous permet absolument pas de savoir s'il y a aucune solution ou une infinité.

Chapitre 7

Les droites et les plans

7.1 Les droites dans $\mathbb{R}^2$

Nous allons maintenant essayer d'appliquer la théorie que nous avons vu depuis le début du cours à l'étude des droites et des plans en 2 et 3 dimensions, en commençant par les droites dans $\mathbb{R}^2$. Ces dernières devrait être familière car vous les avez déjà étudié en partie durant votre cours secondaire, et même dans un cours de calcul si vous l'avez déjà suivi.

Rappelons premièrement qu'au secondaire vous avez appris que l'équation d'une droite est une équation de la forme :

$$y = mx + b$$

où m est la pente que l'on peut calculer à l'aide de la formule

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

et b est l'ordonné à l'origine.

Cet équation a plusieurs avantage. Premièrement, elle est écrite sous forme de fonction. En effet, nous aurions très bien pu écrire $f(x) = mx + b$ à la place de $y = mx + b$. De plus, cette forme de l'équation d'une droite est particulièrement utile en calcul différentiel et intégral car pour trouver l'équation de la droite tangente d'une fonction $g(x)$ en un point x_0, le m n'est rien d'autre que la dérivé de la fonction en ce point. C'est à dire $m = \frac{dg}{dx}(x_0)$.

Par contre, cet équation possède aussi plusieurs inconvénient, et sera la plupart du temps à éviter en algèbre linéaire :

1. Pouvez-vous trouver une équation de la forme $y = mx + b$ qui décrit une droite vertical passant par le point $(1, 2)$?
2. De quel façon pourrions-nous généraliser cet équation pour nous permettre de trouver l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$?

Dans les deux cas, il nous sera impossible de répondre de façon satisfaisante à la question, qui devrait pourtant être relativement simple. Il nous sera donc nécessaire d'écrire l'équation d'une droite sous une autre forme qui nous sera plus pratique. En fait, nous n'allons pas voir seulement une forme, mais plutôt 4 formes différentes qui nous seront particulièrement utile dépendant du contexte. Mais avant une petite définition.

Definition 7.1.1. On appelle vecteur directeur d'une droite d_1 un vecteur qui est dans la même direction que la droite d_1. On appelle vecteur normal d'une droite d_1 un vecteur qui est perpendiculaire à la droite d_1.

Voici les 5 formes de l'équations d'une droite dans $\mathbb{R}^2$ que nous allons étudier.

Nom	Forme	Description
Fonctionnelle	$y = mx + b$	$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est la pente b est l'ordonné à l'origine
Normale	$ax + by + c = 0$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal
Symétrique	$\dfrac{x - p_1}{a} = \dfrac{y - p_2}{b}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ est un point de la droite
Vectorielle	$\vec{x} = k\vec{v} + P, \quad k \in \mathbb{R}$	$\vec{v}$ est un vecteur directeur P est un point de la droite
Paramétrique	$\begin{cases} x = v_1 k + p_1 \\ y = v_2 k + p_2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ est un point de la droite

Comme première étape, nous allons devoir apprendre à utiliser chacune de ces formes, et passer d'une forme à une autre. Remarquez que seule la première forme (la forme fonctionne) est unique. Par contre, la forme fonctionne d'une droite n'existe pas lorsque la droite en question est verticale.

Exemple 7.1.1. On veut trouver un équation normale, symétrique, vectorielle et paramétrique d'une droite passant par les points $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$. Pour ce faire, commençons par trouver un vecteur directeur $\vec{v}$ et un vecteur normal $\vec{n}$. On a donc :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 9 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Remarquez qu'il y avait plusieurs possibilités. Nous pouvons maintenant écrire facilement un équation symétrique, vectorielle et paramétrique de la droite :

$$\text{Symétrique :} \quad \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{7}$$

$$\text{Vectorielle :} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Paramétrique :} \quad \begin{cases} x = 4k + 1 \\ y = 7k + 2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

L'équation normale va nous demander légèrement plus de travail. Nous savons déjà que l'équation aura la forme :

$$-7x + 4y + c = 0$$

il ne nous reste plus qu'à trouver la valeur de c en utilisant un point :

$$-7(1) + 4(2) + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

Ce qui nous donne :

$$-7x + 4y - 1 = 0$$

Exemple 7.1.2. Sachant que l'équation paramétrique d'une droite est donné par :

$$\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = -2k - 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

trouver un équation normale, symétrique et vectorielle de cette même droite. L'équation paramétrique nous donne deux informations particulièrement importante : un point et un vecteur directeur. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

À partir du vecteur directeur, il nous est maintenant facile de trouver un vecteur normal. On a donc :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet maintenant d'écrire facilement l'équation vectoriel et symétrique de la droite :

$$\text{Symétrique :} \quad \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-2}$$

$$\text{Vectorielle :} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Finalement, encore une fois, pour l'équation normale nous avons un peut plus de travail à faire. Nous savons que l'équation doit avoir la forme : $2x + 5y + c = 0$, il nous reste donc à trouver la valeur de c à partir d'un point.

$$2(2) + 5(-3) + c = 0 \Rightarrow c = 11$$

Ce qui nous donne l'équation normal suivante :

$$2x + 5y + 11 = 0$$

En utilisant les différentes forme de l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$, nous allons maintenant pouvoir répondre à différentes questions d'intérêt :

1. Qu'elle est la position relative de deux droites. Sont-elles confondu, parallèles disjointes, perpendiculaire, ou sécante non perpendiculaire ?
2. Quelle est la plus courte distance entre un point et une droite ?
3. Quelle est la plus courte distance entre deux droites parallèles ?
4. Quel est le point d'intersection de deux droites non parallèles ?
5. Quel est l'angle entre deux droites sécantes ?

Exemple 7.1.3. On veut trouver le point d'intersection (s'il y en a) des deux droites suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2k+5 \\ y = 3k+1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 4t+2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On doit donc commencer par résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2k+5 = 3t-1 \\ 3k+1 = 4t+2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2k-3t = -6 \\ 3k-4t = 1 \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -6 \\ 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim^{2L_2-3L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Ce qui nous donne $t = 20$ et $k = 27$. Pour trouver le point d'intersection, il nous suffit donc de remplacer le k dans l'équation de la droite d_1 ou de remplacer le t dans l'équation de la droite d_2. On obtient donc :

$$\begin{cases} x = 2(27)+5 = 59 \\ y = 3(27)+1 = 82 \end{cases}$$

Le point d'intersection est donc :

$$P = \begin{pmatrix} 59 \\ 82 \end{pmatrix}$$

Théorème 7.1.1. **(Position relative de deux droites)** Si d_1 et d_2 sont des droites dans $\mathbb{R}^2$, alors exactement un des 4 cas ci dessous est vrai :

1. Les droites sont confondus (i.e. il s'agit de la même droite)
2. Les droites sont parallèles disjointes
3. Les droites sont perpendiculaires
4. Les droites sont sécantes non perpendiculaires

Pour trouver la position relative de deux droites, nous avons le tableau suivant pour nous aider à faire la distinction entre chacun des cas.

	confondus	parallèles disjointes	perpendiculaires	sécantes non perpendiculaires
Nombre de points d'intersection ?	∞	0	1	1
Vecteurs directeurs dans la même direction ?	Oui	Oui	Non	Non
Vecteurs normaux dans la même direction ?	Oui	Oui	Non	Non
Produit scalaire des vecteurs directeurs ?	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Produit scalaire des vecteurs normaux ?	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$

Exemple 7.1.4. Trouver la position relative des deux droites suivantes :

$$d_1 : 5x - 3y + 2 = 0$$

$$d_2 : 2x + y - 5 = 0$$

Pour ce faire, commençons par trouver les points d'intersections des deux droites. Ceci nous permettra de savoir si les deux droites sont parallèles. Pour ce faire, on écrire le tout sous forme de système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Puis on applique la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim^{5L_2 - 2L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 29 \end{array}\right)$$

Ce qui nous donne le point d'intersection suivant :

$$P = \begin{pmatrix} 13/11 \\ 29/11 \end{pmatrix}$$

Comme il y a un point d'intersection, les deux droites ne peuvent donc pas être parallèle. Nous allons maintenant vérifier si elles sont perpendiculaire. Pour ce faire, nous allons calculer le produit scalaire de leur vecteurs normaux.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 - 3 = 7$$

Comme le produit scalaire n'est pas zéro, les droites ne sont pas perpendiculaire. On peut donc conclure qu'elles sont sécante non perpendiculaire.

Exemple 7.1.5. On veut trouver la position relative des deux droites suivantes :

$$d_1 : \frac{x - 2}{5} = \frac{y - 3}{2}$$

$$d_2 : \frac{x - 3}{20} = \frac{y - 5}{8}$$

Pour ce faire, commençons par vérifier si les vecteurs normaux sont dans la même direction. On doit donc vérifier si le système d'équations linéaires suivant possèdent des solutions :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

On trouver facilement la solution $k = \frac{1}{4}$. Les droites sont donc parallèle. Il ne nous reste plus qu'à vérifier si elles sont confondu ou disjointe. Pour ce faire, vérifions si le point $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de la droite d_1 appartient aussi à la droite d_2.

$$\frac{2 - 3}{20} \neq \frac{3 - 5}{8}$$

Les deux droites doivent donc être disjointe. On conclut donc que les droites sont parallèles disjointes.

Théorème 7.1.2. **(Angle entre deux droites)** Si d_1 et d_2 sont des droites dans le plan ($\mathbb{R}^2$) qui ne sont pas parallèle, ayant comme vecteurs directeurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ respectivement, et ayant comme vecteurs normaux $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ respectivement, alors l'angle entre les deux droites est donné par :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{||\vec{v}_1||\ ||\vec{v}_2||} = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{||\vec{n}_1||\ ||\vec{n}_2||}$$

Exemple 7.1.6. On veut trouver l'angle entre les deux droites suivantes :

$$d_1 : 3x + 4y - 1 = 0$$

$$d_2 : x - 2y + 5 = 0$$

Pour ce faire, on commence par trouver les vecteurs normaux :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Puis on applique la formule :

$$\cos(\theta) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-5}{5\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \qquad \Rightarrow \qquad \theta \approx 117^o$$

Théorème 7.1.3. **(Distance entre un point et une droite)**

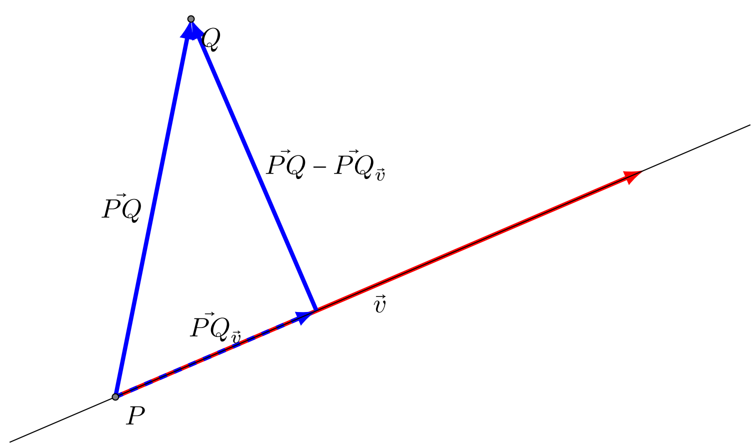
1. Si $d : \vec{x} = k\vec{v} + P$ est l'équation vectorielle d'une droite, et Q est un point qui n'est pas dans la droite, alors la plus courte distance entre la droite d et le point Q est donné par :

$$distance = \left\| \vec{PQ} - \vec{PQ}_{\vec{v}} \right\|$$

2. Si $d : ax + by + c = 0$ est l'équation normale d'une droite, et $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est un point qui n'est pas dans la droite. Alors la plus courte distance entre la droite et le point est donné par :

$$distance = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Démonstration. La démonstration de la première formule se fait essentiellement à l'aide du schema ci dessous. Les détails vous sont laissé en exercice.



Pour ce qui est de la seconde formule, il nous faut faire un peu plus de travail. pour ce faire, considérons une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ qui ne fait pas partie de la droite. En regardant le schéma ci dessus, on remarque que le vecteur $\vec{PQ} - \vec{PQ}_{\vec{v}}$ n'est en fait que le vecteur $\vec{PQ}_{\vec{n}}$, où $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite. Pour calculer la distance, nous aurons donc besoin de trouver un vecteur normal $\vec{n}$ et d'un point de la droite P. On peut prendre par exemple :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

avec $ap + bq + c = 0$. Dans ce cas, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Distance &= \left\|\vec{PQ}_{\vec{n}}\right\| = \left\|\left(\frac{\vec{PQ}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right)\vec{n}\right\| = \frac{\left|\vec{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{\left|\begin{pmatrix} p - x_0 \\ q - y_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a(p-x_0)+b(q-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|(ap+bq)-(ax_0+by_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

□

Exemple 7.1.7. On veut trouver la plus courte distance entre le point $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite d'équation

$$d : 4x - 2y + 5 = 0$$

En utilisant la seconde formule pour le calcul de la distance entre un point et une droite, on obtient :

$$distance = \frac{4(1) - 2(2) + 5}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}}$$

Exemple 7.1.8. On veut trouver la plus courte distance entre le point $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite d'équation

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 4k + \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Remarquez qu'il s'agit exactement de la même droite que dans l'exemple précédent, mais cette fois écrit sous forme paramétrique. Dans ce cas, nous pouvons utiliser la première formule pour faire notre calcul :

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
distance &= \left\|\vec{PQ} - \vec{PQ}_{\vec{v}}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix} - \frac{-10}{20}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right\| \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, un peut d'arithmétique nous permet facilement de vérifier qu'il s'agit bien de la même réponse que nous avons obtenu précédemment.

Théorème 7.1.4. **(Distance entre deux droites parallèle)** Si d_1 et d_2 sont des droites parallèles, alors on peut calculer la plus courte distance entre ces deux droite en calculant la plus courte distance d'un point quelconque de la première droite, et la seconde droite.

Exemple 7.1.9. On veut calculer la plus courte distance entre les deux droites suivantes :

$$d_1 : 2x + 3y + 4 = 0$$

$$d_2 : 6x + 9y + 5 = 0$$

On remarque facilement que les deux droites sont parallèles car leur vecteur normaux sont dans la même direction. En effet, nous avons :

$$3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Nous allons donc choisir un point de la première droite. On peut prendre par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Et nous allons calculer la distance entre ce point et la droite d_2. Nous avons donc :

$$distance = \frac{|6(-5) + 9(2) + 5|}{\sqrt{6^2 + 9^2}} = \frac{7}{\sqrt{117}}$$

7.2 Les droites dans $\mathbb{R}^3$

Nous allons maintenant essayer de généraliser l'étude des droites que nous venons de faire dans $\mathbb{R}^2$, à l'étude des droites dans l'espace ($\mathbb{R}^3$). Quelques difficultés vont cependant se poser. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, deux droites peuvent n'avoir aucun point d'intersection et ne pas être parallèle. On appelle de telle droite, des droites gauches. De plus, les équations fonctionnelles et normales n'ont aucun sens pour les droites de $\mathbb{R}^3$. Finalement, la notion de vecteurs normaux nous sera pratiquement inutile, car elle ne nous donnera pas grande information sur la direction d'une droite dans $\mathbb{R}^3$. Nous serons donc ramener à utiliser uniquement les trois formes suivantes :

Nom	**Forme**	**Description**
Symétrique	$\dfrac{x-p_1}{a} = \dfrac{y-p_2}{b} = \dfrac{z-p_3}{c}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ est un point de la droite
Vectorielle	$\vec{x} = k\vec{v} + P, \quad k \in \mathbb{R}$	$\vec{v}$ est un vecteur directeur P est un point de la droite
Paramétrique	$\begin{cases} x = v_1k + p_1 \\ y = v_2k + p_2 \\ z = v_2k + p_3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ est un point de la droite

Nous allons donc maintenant nous intéresser aux mêmes questions que dans la section précédente.

Definition 7.2.1. On appelle deux droites des **droites gauches** si elles n'ont aucun point d'intersection et elle ne sont pas parallèles.

Théorème 7.2.1. **(Position relative de deux droites)** Si d_1 et d_2 sont des droites dans $\mathbb{R}^3$, alors exactement un des 5 cas ci dessous est vrai :

1. Les droites sont confondus (i.e. il s'agit de la même droite)
2. Les droites sont parallèles disjointes
3. Les droites sont sécantes perpendiculaires
4. Les droites sont sécantes non perpendiculaires
5. Les droites sont gauches

Pour trouver la position relative de deux droites, nous avons le tableau suivant pour nous aider à faire la distinction entre chacun des cas.

	confondus	parallèles disjointes	sécantes perpendiculaires	sécantes non perpendiculaires	gauches
Nombre de points d'intersection ?	∞	0	1	1	0
Vecteurs directeurs dans la même direction ?	Oui	Oui	Non	Non	Non
Produit scalaire des vecteurs directeurs ?	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	Aucun info

Exemple 7.2.1. Trouver la position relative des deux droites suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = -k + 1 \\ z = 5k + 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 5r + 10 \\ y = 2r + 2 \\ z = -3r + 5 \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}$$

On va donc commencer par regarder combien de point d'intersection il y a en résolvant le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2k+3 = 5r+10 \\ -k+1 = 2r+2 \\ 5k+3 = -3r+5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2k-5r = 7 \\ -k-2r = 1 \\ 5k+3r = 2 \end{cases}$$

Que l'on va résoudre à l'aide de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} 2L_2+L_1 \to L_2 \\ 2L_3-5L_1 \to L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 31 & -31 \end{array}\right) \sim^{9L_3+31L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Comme ce système a exactement une solution, on peut donc déduire que les droites sont sécantes. Il ne nous reste plus qu'à vérifier si elles sont perpendiculaires ou non. Pour ce faire, nous allons calculer le produit scalaire des vecteurs directeurs.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 10-2-15 = -7$$

Comme le produit scalaire n'est pas zéro, on peut donc conclure que les deux droites sont sécantes non perpendiculaire.

Théorème 7.2.2. **(Distance entre un point et une droite)** Si $d : \vec{x} = k\vec{v} + P, \quad k \in \mathbb{R}$ est l'équation vectorielle d'une droite, et Q est un point qui n'est pas sur la droite. Alors la plus courte distance entre P et d est donné par :

$$distance = \left\| \vec{PQ} - \vec{PQ}_{\vec{v}} \right\| = \frac{\left\| \vec{PQ} \times \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|}$$

Théorème 7.2.3. **(Distance entre deux droites gauches)** Si $d_1 : \vec{x} = r\vec{u} + P, \quad r \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \vec{x} = s\vec{v} + Q, \quad s \in \mathbb{R}$, sont des droites non parallèle, alors la plus courte distance entre d_1 et d_2 est donné par :

$$distance = \frac{\left\| \vec{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \right\|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Exemple 7.2.2. On veut trouver la plus courte distance entre les deux droites suivantes.

$$d_1 : \begin{cases} x = 2k+7 \\ y = -k+1 \\ z = 5k+3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 5r+10 \\ y = 2r+2 \\ z = -3r+5 \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Nous allons donc commencer par vérifier que les deux droites sont bien gauches. Pour ce faire, commençons par trouver combien il y a de points d'intersection en résolvant le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2k+7 = 5r+10 \\ -k+1 = 2r+2 \\ 5k+3 = -3r+5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2k-5r = 3 \\ -k-2r = 1 \\ 5k+3r = 2 \end{cases}$$

Ce qui nous donne en applicant la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim^{2L_2+L_1 \to L_2}_{2L_3-5L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 3 \\ 0 & -9 & 5 \\ 0 & 31 & -11 \end{array}\right) \sim^{9L_3+31L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 3 \\ 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 56 \end{array}\right)$$

Comme ce système n'a aucune solution, les droites sont donc soit parallèle disjointe ou gauches. Pour le savoir, il s'agit de vérifier si les vecteurs directeurs sont dans la même direction. On va donc vérifier si le système d'équations linéaires suivant possède des solutions :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que ce système n'a aucune solution. On peut donc conclure que les deux droites sont gauches.

On va maintenant utiliser la formule du théorème ci dessus pour calculer la distance entre les deux droites. On a donc :

$$distance = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 31 \\ 9 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -7 \\ 31 \\ 9 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{28}{\sqrt{1091}}$$

Théorème 7.2.4. **(Distance entre deux droites parallèles)** Pour trouver la plus courte distance entre deux droites parallèles, il s'agit de choisir un point de la première droite, et de trouver sa distance avec la deuxième droite.

7.3 Les plans dans $\mathbb{R}^3$

Pour terminer le chapitre, nous allons maintenant étudier les plans dans $\mathbb{R}^3$. Pour ce faire, nous aurons 3 formes avec lesquels nous pourrons travailler. Remarquez qu'il y a une difficulté particulières à faire attention. Dans le cas des droites de $\mathbb{R}^3$, nous avons vu qu'un seul vecteur directeur suffit pour définir la direction de la droite, par contre un vecteur normal n'est pas suffisant. Dans le cas des plans dans $\mathbb{R}^3$, nous aurons alors besoin de deux vecteurs directeurs pour décrire l'orientation du plan, par contre, un seul vecteur normal est suffisant.

Nom	Forme	Description
Normale	$ax + by + cz + d = 0$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal
Vectorielle	$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + P, \quad r, s \in \mathbb{R}$	$\vec{u}, \vec{v}$ sont des vecteurs directeurs P est un point du plan
Paramétrique	$\begin{cases} x = u_1 r + v_1 s + p_1 \\ y = u_2 r + v_2 s + p_2 \\ z = u_3 r + v_3 s + p_3 \end{cases}, \quad r, s \in \mathbb{R}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs du plan $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ est un point du plan

Exemple 7.3.1. Trouver une équation normale du plan π ayant l'équation paramétrique suivante :

$$\pi : \begin{cases} x = 2r + 3s - 1 \\ y = r + s + 2 \\ z = -r + 2s + 5 \end{cases}$$

Pour ce faire, on va commencer par trouver un vecteur normal au plan en calculant le produit vectoriel des deux vecteurs directeurs que l'équation paramétrique nous fourni. On a donc :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'équation normale aura donc la forme suivante :

$$3x - 7y - z + d = 0$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver la valeur de d en utilisant un point. On a donc :

$$3(-1) - 7(2) - (5) + d = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad d = 22$$

L'équation normale est donc :

$$\pi : 3x - 7y - z + 22 = 0$$

Exemple 7.3.2. Trouver un équation paramétrique du plan d'équation normale suivante :

$$\pi : x + 2y + 3z + 4 = 0$$

Pour ce faire, nous avons besoin de calculer 3 points de ce plan. En choisissant en tour de rôle deux variables comme étant zéro, et en calculant la troisième, on obtient les trois points suivants :

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En prenant les vecteurs $\vec{PQ}$ et $\vec{QR}$ comme étant les vecteurs directeurs, et en utilisant le point R, on obtient donc l'équation paramétrique suivante :

$$\pi : \begin{cases} x = -4s - 4 \\ y = -2r + 2s \\ z = \dfrac{4r}{3} \end{cases}, \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Remarquez que nous aurions très bien pu utiliser le vecteur directeur $3\vec{PQ}$ plutôt que $\vec{PQ}$ pour éviter de devoir travailler avec des fractions. Nous aurions alors obtenu une équation qui en apparence serait différente, mais représenterait bel et bien le même plan.

Nous allons maintenant nous intéresser à des questions similaires aux deux sections précédentes, en commençant par la position relative de deux plans.

Théorème 7.3.1. **(Position relative de deux plans)** Si π_1 et π_2 sont des plans dans $\mathbb{R}^3$, alors exactement un des 4 cas ci dessous est vrai :

1. Les plans sont parallèles disjoints
2. Les plans sont confondus
3. Les plans sont sécants perpendiculaires
4. Les plans sont sécants non perpendiculaires
5. Les droites sont gauches

Pour trouver la position relative de deux droites, nous avons le tableau suivant pour nous aider à faire la distinction entre chacun des cas.

	confondus	parallèles disjoints	sécants perpendiculaires	sécants non perpendiculaires
points d'intersection ?	un plan	aucun	une droite	une droite
Vecteurs normaux dans la même direction ?	Oui	Oui	Non	Non
Produit scalaire des vecteurs normaux ?	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$

Exemple 7.3.3. On veut trouver la position relative des deux plans suivant :

$$\pi_1 : 4x + 3y + 5z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : 5x + 5y - 7z + 3 = 0$$

Pour ce faire, commençons par trouver l'ensemble des points d'intersection de ces deux plans en utilisant la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & -7 & -3 \end{array}\right) \sim^{4L_2 - 5L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -53 & -7 \end{array}\right)$$

Comme ce système d'équations linéaire a exactement un paramètre libre, alors l'ensemble des points d'intersection de ces deux plans forme une droite. Les deux plans doivent donc être sécants. Il faut maintenant vérifier s'ils sont perpendiculaire ou non. Pour ce faire, on calcul le produit scalaire des vecteurs normaux :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$$

Les deux plans sont donc sécants perpendiculaires.

Théorème 7.3.2. Si $\pi : ax + by + cz + d = 0$ est l'équation normale d'un plan, et $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est un point ne faisant pas partie du plan, alors la plus courte distance entre π et P est donné par :

$$distance = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple 7.3.4. On veut trouver qu'elle est la plus courte distance entre le plan $\pi : 2x + 3y - 5z + 2 = 0$ et le point $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. En applicant la formule, nous avons donc :

$$distance = \frac{|2(1) + 3(2) - 5(3) + 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-5)^2}} = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

Chapitre 8

Le déterminant

8.1 Introduction

Nous somme maintenant prêt à étudier les déterminants dans toutes leur généralité, mais avons, rappelons quelques points intéressant. Pour le moment, nous avons vu seulement comment calculer le déterminant d'une matrice 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

et nous avons vu que cette quantité peut servir à calculer l'inverse d'une matrice, savoir si une matrice est inversible, vérifier si un système d'équations linéaire admet exactement une solution, calculer les solutions d'un système d'équations linéaires pour lequel il y a exactement une solution et finalement calculer l'aire d'un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$. Ces applications fonctionnerons aussi pour des matrices $n \times n$ comme nous le verrons dans ce chapitre. Par contre, le calcul du déterminant deviendra de plus en plus complexes en augmentant la dimension de la matrice.

8.2 Le déterminant (cas général)

Le calcul peut se faire à partir de n'importe quel ligne ou colonne d'une matrice. Il faudra donc choisir une ligne ou une colonne avant de commencer. Normalement, pour facilité les calculs, on choisi le ligne ou la colonne contenant le plus de zéros. Posons :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarquez que la matrice doit obligatoirement être carré, autrement le déterminant n'est pas définie. Nous allons maintenant définir le mineur i, j de la matrice A, dénoté M_{ij} comme étant le déterminant de la matrice A à laquelle nous avons retiré la i-ième ligne et la j-ième colonne.

Exemple 8.2.1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors on a :

$$M_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

On définit maintenant le cofacteur i, j, dénoté C_{ij} comme étant :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Et finalement on définie le déterminant d'une matrice $n \times n$ avec $n \geq 3$ comme étant :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} C_{kj}, \qquad \text{avec } 1 \leq k \leq n$$

où k représente dans la première somme la ligne choisi, et dans la deuxième somme la colonne choisi.

Exemple 8.2.2. On veut calculer le déterminant suivant en utilisant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = 0$$

Exemple 8.2.3. On veut calculer à nouveau le déterminant de l'exemple précédent, mais cette fois en utilisant la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2(-6) + 5(-12) - 8(-6) = 0$$

Exemple 8.2.4. On veut calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Remarquez qu'il y a plusieurs 0, ce qui va nous facilité un peu la tache. Nous allons utiliser la 3e ligne pour faire nos calcul :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\left(1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) - 4\left(-1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ &= 2(13) - 4\left(-1(-3) + (-9)\right) \\ &= 26 - 4(-6) \\ &= 50 \end{aligned}$$

Théorème 8.2.1. Si A est une matrice carré triangulaire ou diagonale, alors le déterminant de A est le produit des éléments sur sa diagonale principale.

Exemple 8.2.5. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 15 = 11700$$

8.3 Déterminant et produit vectoriel

Dans le chapitre 1, nous avons vu que le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est définie comme étant :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

Remarquez que les termes de droite ressemble étrangement à des déterminants. C'est effectivement le cas. On pourra donc écrire le produit vectoriel sous la forme suivante qui est plus facile à retenir :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

où $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ représente la base habituelle de $\mathbb{R}^3$ que nous avons définie dans le chapitre précédent.

Exemple 8.3.1. On veut calculer le produit vectoriel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + 28\vec{j} - 13\vec{k} = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ -13 \end{pmatrix}$$

8.4 Aire et volume

Nous avons déjà vu que l'aire d'un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$ est donné par :

$$\text{Aire } = abs\left(\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right)$$

où les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont les vecteurs qui engendrent le parallélogramme. Nous avons aussi vu au chapitre 1 que le volume d'un parallélépipède engendré par des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est donné par :

$$\text{Volume } = abs\left(\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\right)$$

À l'aide du déterminant, nous pouvons maintenant réécrire cette dernière équation sous forme d'un déterminant. C'est ce que nous donne le théorème suivant :

Théorème 8.4.1.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, l'aire d'un parallélogramme engendré par des vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

est donné par :

$$\text{Aire } = abs\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\right)$$

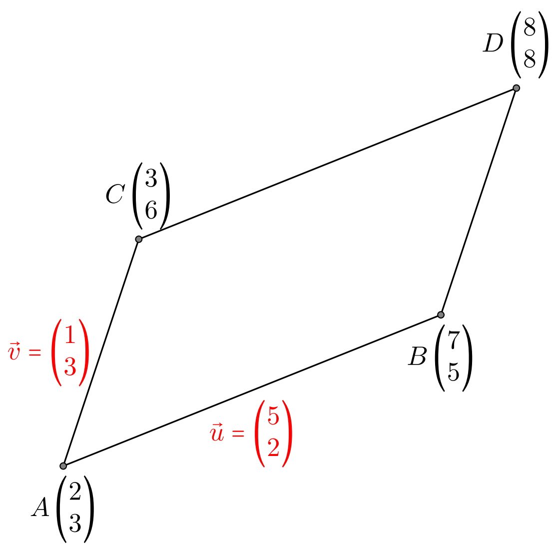
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le volume d'un parallélépipède engendré par des vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

est donné par :

$$\text{Volume } = abs\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}\right)$$

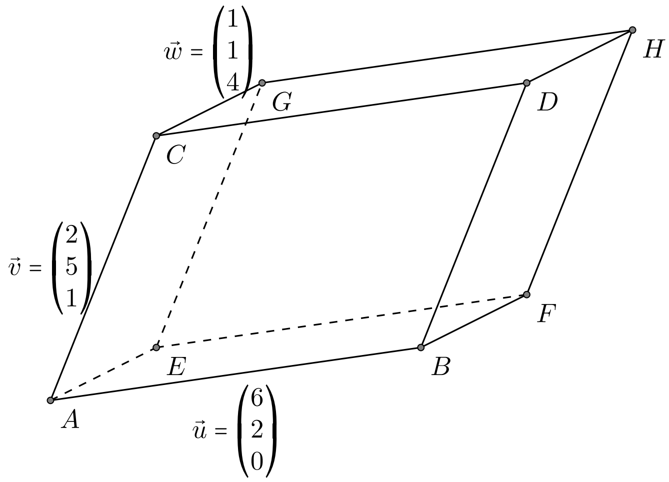
Exemple 8.4.1. Trouver l'aire du parallélogramme suivant :



On doit commencer par trouver les vecteurs définissant les côtés. C'est ce que nous avons fait en rouge. En utilisant le théorème on a donc :

$$\text{Aire } = abs\left(\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) = abs(2-15) = abs(-13) = 13$$

Exemple 8.4.2. Trouver le volume du parallélépipède suivant :



En utilisant le théorème, on obtient donc :

$$\text{Volume} = abs\left(\begin{vmatrix}6 & 2 & 1\\2 & 5 & 1\\0 & 1 & 4\end{vmatrix}\right) = abs\left(-1\begin{vmatrix}6 & 1\\2 & 1\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}6 & 2\\2 & 5\end{vmatrix}\right) = abs\,(-4 + 104) = abs(100) = 100$$

8.5 La méthode de Cramer (Le cas général)

Nous allons maintenant voir comment on peut généraliser la méthode de Cramer pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à n inconnus et n équations. Rappellons premièrement que cette méthode fonctionne uniquement dans le cas ou le système d'équations linéaires possède une unique solution, ce qui peut facilement se vérifier en utilisant le théorème de la matrice inverse.

Considérons le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On va dénoté par A la matrice des coefficients. C'est à dire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le théorème de la matrice inverse nous dit donc que le système d'équations linéaires a une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$. On va maintenant dénoté par A_{x_i} la matrice A pour laquelle nous avons remplacer la i-ème colonne de A par les coefficients b_i.

$$A_{x_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 8.5.1. Le système d'équations $A\vec{x} = \vec{b}$ ci haut possède une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, nous avons :

$$x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$$

Exemple 8.5.1. On veut utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = -11 \\ 3x + 8y + 12z = 4 \\ 2x + 5z = 1 \end{cases}$$

On doit donc calculer les 4 déterminants suivants :

$$\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 8 & 12 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2(-64) + 5(14) = -58 \\
det(A_x) &= \begin{vmatrix} -11 & -2 & 5 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -11 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -64 + 5(-80) = -464 \\
det(A_y) &= \begin{vmatrix} 1 & -11 & 5 \\ 3 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(8) + 11(-9) + 5(-5) = -116 \\
det(A_z) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -11 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -11 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2(80) + 1(14) = 174
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$x = \frac{det(A_x)}{det(A)} = \frac{-464}{-58} = 8$$

$$y = \frac{det(A_y}{det(A)} = \frac{-116}{-58} = 2$$

$$z = \frac{det(A_z)}{det(A)} = \frac{174}{-58} = -3$$

8.6 Propriétés des déterminants

Depuis le début du chapitre, nous avons calculer plusieurs déterminant. Par contre, la seule stratégie que nous avions était d'utiliser la ligne ou la colonne ayant le plus de zéro. Nous avons aussi vu que le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est particulièrement simple, il s'agit de multiplier les éléments de la diagonale. Dans cette section, nous allons étudier certaine propriétés des déterminants, qui nous permettrons dans la section suivante de simplifier nos calculs.

Théorème 8.6.1. Si A et B sont des matrices de dimension $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. $det(A^T) = det(A)$
2. $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$, si A est inversible
3. $det(AB) = det(A)det(B)$
4. $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$

Exemple 8.6.1. Sachant que A et B sont des matrices de dimension 5×5, $det(A) = 3$ et $det(B) = 4$, on veut calculer $det(AB)$, $det(A^{-1})$ et $det(6A)$. En utilisant le théorème précédent, on a donc :

$$det(AB) = det(A)det(B) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} = \frac{1}{3}$$

$$det(6A) = 6^5 det(A) = 6^5 \cdot 3 = 23328$$

8.7 Opérations sur les lignes pour le calcul du déterminant

Nous allons maintenant voir que les opérations élémentaires que nous avons vu dans la méthode de Gauss peuvent être utilisé pour calculer le déterminant d'une matrice. Par contre, il faut faire attention, car même si les opérations élémentaires ne change pas l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires, ils changent dans certain cas la valeur du déterminant.

Théorème 8.7.1. Si A est une matrice de dimension $n \times n$, alors

1. $L_i + cL_j \rightarrow L_i$ ne change pas la valeur du déterminant si $i \neq j$
2. $cL_i \rightarrow L_i$ multiplie la valeur du déterminant par c
3. $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe du déterminant si $i \neq j$

Nous pouvons donc utiliser ces opérations pour transformer une matrice carré A sous forme triangulaire de sorte qu'il soit facile de calculer son déterminant.

Exemple 8.7.1. On veut utiliser le théorème précédent pour calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} && L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} && L_3 - 7L_1 \rightarrow L_3 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} && L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3 \\
&= 1 \cdot (-3) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exemple 8.7.2. On veut calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && L_2 - L_1 \to L_2 \\
&= 1 \cdot (-1) \cdot 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Exemple 8.7.3. On veut calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -22 & -11 & 6 & -6 \\ 0 & -19 & -10 & 10 & -11 \\ 0 & -8 & 4 & 11 & -3 \\ 0 & -51 & -20 & 10 & -31 \end{vmatrix} && \begin{array}{c} L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \\ L_4 - L_1 \to L_4 \\ L_5 - 6L_1 \to L_5 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -22 & -11 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 53/11 & -64/11 \\ 0 & 0 & 8 & 97/11 & -9/11 \\ 0 & 0 & 11/2 & -43/11 & -188/11 \end{vmatrix} && \begin{array}{c} L_3 - \frac{19}{22}L_2 \to L_3 \\ L_4 - \frac{8}{22}L_2 \to L_4 \\ L_5 - \frac{51}{22}L_2 \to L_5 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -22 & -11 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 53/11 & -64/11 \\ 0 & 0 & 0 & 945/11 & -1033/11 \\ 0 & 0 & 0 & 540/11 & -892/11 \end{vmatrix} && \begin{array}{c} L_4 + 16L_3 \to L_4 \\ L_5 + 11L_3 \to L_5 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -22 & -11 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 53/11 & -64/11 \\ 0 & 0 & 0 & 945/11 & -1033/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -192/7 \end{vmatrix} && L_5 - \frac{540}{945}L_4 \to L_5 \\
&= 1 \cdot (-22) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{945}{11}\right) \cdot \left(\frac{-192}{7}\right) \\
&= -25920
\end{aligned}$$

Remarquez que règle générale, plus la matrice est de grande dimension, plus la méthode que nous venons de voir sera efficace en comparaison avec la méthode que nous avons vu en début de chapitre. Pour vous en convaincre, vous pouvez essayer de recalculer le déterminant de l'exemple précédente en décomposant le déterminant selon une ligne ou colonne de votre choix.

Chapitre 9

L'inverse d'une matrice

9.1 Calcul de la matrice inverse

Au chapitre 6, nous avons définie la matrice inverse A^{-1} d'une matrice carré A comme étant une matrice tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Nous avons aussi appris que la matrice inverse n'existe pas toujours, et nous avons vu une méthode très peu pratique de la calculer. Il est maintenant temps de voir une façon beaucoup plus pratique et rapide de le faire. Mais avant, rappelons que si A est une matrice 2×2, alors nous avons la formule simple suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \Longrightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

à condition que $ad - bc \neq 0$. Autrement la matrice n'est pas inversible.

La méthode de Gauss-Jordan que nous avons utiliser dans la section précédente pour résoudre des systèmes d'équations linéaires peut être utilisé pour calculer la matrice inverse d'une matrice carré (lorsque l'inverse existe). La méthode consiste à placer à gauche la matrice A, et à droite la matrice identité. On fait ensuite des opérations sur les lignes de sorte que l'on obtienne la matrice identité à gauche. Dans ce cas, la matrice de droite sera la matrice inverse.

Exemple 9.1.1. On veut trouver l'inverse de la matrice A ci dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{L_2-2L_1\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{L_3-L_1\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim^{L_2-3L_3\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{L_1-3L_3\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim^{L_1-2L_2\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ce qui nous donne finalement :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant vérifier qu'il s'agit bien de l'inverse en calculant le produit AA^{-1}. Cette partie est laissé en exercice.

Exemple 9.1.2. On veut calculer l'inverse (si elle existe) de la matrice A ci dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{L_2-4L_1\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{L_3-7L_1\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim^{L_3-2L_2\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Remarquez que nous avons obtenu une ligne de zéro dans la matrice de gauche. Il ne sera donc pas possible d'obtenir la matrice identité (vous pouvez essayer). La matrice A n'est donc pas inversible.

9.2 Résolution des SEL par la matrice inverse

Il est maintenant temps de voir un application de la matrice inverse à la résolution des systèmes d'équations linéaires. Rappelons qu'un système d'équations linéaires peut toujours s'écrire sous la forme :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Si la matrice A est une matrice carré inversible, on aura donc en multipliant des deux côtés (à gauche) par la matrice inverse :

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \implies I\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \implies \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Donc la solution du système d'équations linéaires peut être trouvé en calculant $A^{-1}\vec{b}$.

Exemple 9.2.1. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 137 \\ 7x - 2y = 142 \end{cases}$$

En écrivant le tout sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 137 \\ 142 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 137 \\ 142 \end{pmatrix}$$

On va utiliser la formule pour calculer l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{41}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/41 & 5/41 \\ 7/41 & -3/41 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/41 & 5/41 \\ 7/41 & -3/41 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 137 \\ 142 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Exemple 9.2.2. On veut résoudre le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 31 \\ 2x + 5y + 9z = 79 \\ x + 2y + 4z = 32 \end{cases}$$

Pour ce faire, on doit calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ce qui a déjà été fait dans la section précédente. On a donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution du système est donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 79 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Attention : La méthode de la matrice inverse pour résoudre un système d'équations linéaires fonctionnes seulement lorsque le système admet une unique solution. Dans les autres cas, la matrice ne sera pas inversible.

9.3 Théorème de la matrice inverse

Les déterminants ont plusieurs propriétés intéressantes, et la plupart des applications viennent du théorème ci dessous qui porte le nom de théorème de la matrice inverse :

Théorème 9.3.1. **(Théorème de la matrice inverse)** Si A est une matrice carré de dimension $n \times n$, alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. La matrice A est inversible
2. $det(A) \neq 0$
3. Le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{0}$ a une unique solution
4. Le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ a une unique solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$
5. $rang(A) = n$
6. Les colonnes de A forme un ensemble linéairement indépendant.
7. Les lignes de A forme un ensemble linéairement indépendant.

Exemple 9.3.1. Est-ce que la matrice A ci dessous est inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, nous avons tout simplement à calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

La matrice n'est donc pas inversible.

9.4 Calcul de la matrice inverse à l'aide du déterminant

Maintenant que nous avons définie le déterminant pour toutes matrices carrés, nous somme maintenant prêt à donner une formule permettant de calculer l'inverse d'une matrice carré. Pour ce faire, commençons par rappeler que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dans le cas général, la formule sera cependant un peu plus compliqué.

Definition 9.4.1. Si A est une matrice carré, alors on définie la matrice des cofacteur, dénoté $Cof(A)$ comme étant la matrice :

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 9.4.1. Si A est une matrice carré inversible (C'est à dire $det(A) \neq 0$), alors on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}[Cof(A)]^T$$

Exemple 9.4.1. Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour utiliser la formule, on doit commencer par calculer le déterminant. On a donc :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} 8 - 2(0) + 3(-2) = 2$$

On obtient donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquez qu'en général, la méthode de Gauss-Jordan est beaucoup plus efficace pour calculer l'inverse d'une matrice. Par contre, la méthode ci dessus peut s'avérer parfois très utile.

Exemple 9.4.2. On veut calculer l'élément de la matrice A^{-1} se trouvant dans la première ligne, quatrième colonne pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, commençons par calculer la déterminant de cette matrice :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 3\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 8\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix} = 3\left(2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right) - \left(2\begin{vmatrix}1 & 8\\ 3 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & 8\\ 1 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)\\
&= 3\Big(2(-6) - (-2) + 5(8)\Big) - \Big(2(-20) - (4) - (8)\Big) = 3(30) - (-52) = 142
\end{aligned}$$

Maintenant, on doit calculer le cofacteur C_{41}. Remarquez que les lignes et colonnes on été inverser car nous devons calculer la transposer. On a donc :

$$M_{41} = \begin{vmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 5\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 8\end{vmatrix} = -3(-3) + 9 = 18$$

$$C_{41} = (-1)^{4+1}18 = -18$$

L'élément de A^{-1} qui se trouve sur la première ligne quatrième colonne est donc : $\dfrac{-18}{142} = \dfrac{-9}{71}$

Chapitre 10

Les valeurs propres et les vecteurs propres

10.1 Introduction

Dans les chapitre 6, nous avons vu comment effectuer les opérations élémentaires sur les matrices. Vous avez par exemple appris comment faire la multiplication de matrice, ce qui peut vous permettre de calculer des exposants. Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

alors en calculant le produit de matrice à plusieurs reprise, on peut calculer :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AAA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = AAAA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{pmatrix}$$

Bien sur, dans le cas de A^4 par exemple, on peut améliorer notre méthode en calculant A^2A^2 plutôt que $AAAA$, ce qui pourrait nous sauver le calcul d'une multiplication. Par contre, qu'arriverait-il si on vous demande de calculer A^{100} ? ou pire encore A^{1000}. Le calcul deviendrait alors de plus en plus long. Dans ce chapitre, nous allons voir qu'il est souvent possible de réécrire la matrice A sous la forme PDP^{-1}, où P est une matrice inversible, et D est une matrice diagonale. Dans ce cas, le calcul de A^n devient particulièrement simple, comme nous le verrons dans les sections suivantes.

10.2 Valeurs et vecteurs propres

Definition 10.2.1. Si A est une matrice, λ un nombre complexe et $\vec{v}$ un vecteur différent de $\vec{0}$, alors on dit que λ est une valeur propre et $\vec{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si l'équation ci dessous est satisfaite :

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

En manipulant l'équation, on obtient :

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \implies A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = 0 \implies (A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

Comme le vecteur $\vec{v}$ est par hypothèse différent du vecteur $\vec{0}$, le système d'équations linéaires ainsi obtenu doit avoir au moins deux solutions (C'est à dire qu'il en a une infinité). En utilisant le théorème de la matrice inverse, on peut donc déduire le théorème suivant :

Théorème 10.2.1. Si A est une matrice, alors l'ensemble de valeurs propres de λ sont donnés par l'ensemble des solutions de l'équation suivante :

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Le polynome $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ est appelé équation (ou polynôme) caractéristique de A.

Le théorème précédent nous donne donc une méthode relativement simple pour trouver les valeurs propres d'une matrice. Le problème de trouver les vecteurs propres qui sont associé à une valeur propre donné devient donc relativement simple.

Théorème 10.2.2. Si A est une matrice et λ est une valeur propre associé à A, alors l'ensemble des vecteurs propres associé à λ est l'ensemble des solutions différente de $\vec{0}$ du système d'équations linéaires suivant :

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Notez que l'ensemble de tous les vecteurs $\vec{v}$ satisfaisant l'équation $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ est appelé espace propre associé à la valeur propre λ. Un vecteur propre associé à la valeur propre λ est donc un vecteur non nul de son espace propre.

Notez qu'une valeur propre possède toujours une infinité de vecteur propre qui lui est associé. Finalement, avant de terminé cette section, nous allons faire un petit ajout au théorème de la matrice inverse que nous avons étudié plus tôt dans le cours. Remarquez que ce théorème est une conséquence directe du premier théorème de ce chapitre.

Théorème 10.2.3. **(Théorème de la matrice inverse)** Si A est une matrice carré de dimension $n \times n$, alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. La matrice A est inversible
2. $det(A) \neq 0$
3. Le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{0}$ a une unique solution
4. Le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ a une unique solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$
5. $rang(A) = n$
6. Les colonnes de A forme un ensemble linéairement indépendant.
7. Les lignes de A forme un ensemble linéairement indépendant.
8. 0 n'est pas une valeur propre de la matrice A

10.3 Diagonalisation : Le cas simple

Definition 10.3.1. Si A est une matrice carré, alors on dit qu'elle est diagonalisable si $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible, et D est une matrice diagonale.

Théorème 10.3.1. Si A est une matrice carré $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes, alors la matrice A est diagonalisable. Dans ce cas, la matrice D est la matrice formé en plaçant les valeurs propres sur la diagonale principale, et la matrice P est obtenu en plaçant à la vertical un vecteur propre pour chacune des valeurs propres, et dans le même ordre que dans la matrice D.

Exemple 10.3.1. Diagonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 39 & 54 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}$$

On commence par trouver les valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} 39-\lambda & 54 \\ -15 & -18-\lambda \end{vmatrix} = (39-\lambda)(-18-\lambda) + 810 = \lambda^2 - 21\lambda + 108 = (\lambda-9)(\lambda-12) = 0$$

Les valeurs propres sont donc 9 et 12. On doit maintenant trouver les vecteurs propres. Pour la valeur propre 9, on a donc :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 30 & 54 & 0 \\ -15 & -27 & 0 \end{array}\right) \sim^{L_1+2L_2\to L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 30 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim^{\frac{1}{6}L_1\to L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc en posant $y = s$, on a $x = \dfrac{-9s}{5}$. Si on prend $s = 5$, on obtient donc le vecteur propre suivant :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On refait maintenant la même chose avec la valeur propre 12.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 27 & 54 & 0 \\ -15 & -30 & 0 \end{array}\right) \sim^{15L_1+27L_2\to L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 27 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim^{\frac{1}{27}L_1\to L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En posant $y = s$, on a $x = -2y = -2s$, et donc si on prend $s = 1$, on obtient le vecteur propre suivant :

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc maintenant écrire la factorisation de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 39 & 54 \\ -15 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Exemple 10.3.2. On veut utiliser l'exemple précédent pour calculer A^{100} si

$$A = \begin{pmatrix} 39 & 54 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, remarquons que

$$\begin{aligned} A^{100} &= (PDP^{-1})^{100} = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1})}_{100 \text{ fois}} \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)...D(P^{-1}P) \\ &= PD^{100}P^{-1} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 39 & 54 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}^{100} &= \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9^{100} & 0 \\ 0 & 12^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -9^{101} & -2\cdot 12^{100} \\ 5\cdot 9^{100} & 12^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -9^{101}+10\cdot 12^{100} & -2\cdot 9^{101}+18\cdot 12^{100} \\ 5\cdot 9^{100}-5\cdot 12^{100} & 10\cdot 9^{100}-9\cdot 12^{100} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exemple 10.3.3. Diagonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -6 & -4 & 18 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

On commence par calculer les valeurs propres :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 4 \\ -6 & -4-\lambda & 18 \\ -3 & -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
=\ & (2-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 18 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -6 & 18 \\ -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -6 & -4-\lambda \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \\
=\ & (2-\lambda)\Big[(-4-\lambda)(9-\lambda)+36\Big] + 2\Big[-6(9-\lambda)+54\Big] + 4\Big[12+3(-4-\lambda)\Big] \\
=\ & (2-\lambda)\Big[\lambda^2-5\lambda\Big] + 2\Big[6\lambda\Big] + 4\Big[-3\lambda\Big] \\
=\ & (-\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda)+(12\lambda)+(-12\lambda) \\
=\ & -\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda \\
=\ & -\lambda(\lambda-2)(\lambda-5) = 0
\end{aligned}$$

On en déduit donc que les valeurs propres sont $0, 2$ et 5. On va maintenant chercher un vecteur propres pour chacune des valeurs propres, en commençant par la valeur propre 0 :

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -2 & 4 \\ -6 & -4-0 & 18 \\ -3 & -2 & 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -6 & -4 & 18 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Et en appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 18 & 0 \\ -3 & -2 & 9 & 0 \end{array}\right) &\sim_{\substack{3L_1+L_2\to L_2 \\ 3L_1+2L_3\to L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 30 & 0 \\ 0 & -10 & 30 & 0 \end{array}\right) \\
&\sim_{L_2-L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\sim_{\substack{\frac{1}{2}L_1\to L_1 \\ \frac{-1}{10}L_2\to L_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

En posant $z = s$, on obtient : $y = 3z = 3s$ et $x = y - 2z = 3s - 2s = s$, donc en prenant $s = 1$, on obtient notre premier vecteur propre :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant refaire la même chose pour la valeur propre 2 :

$$\begin{pmatrix} 2-2 & -2 & 4 \\ -6 & -4-2 & 18 \\ -3 & -2 & 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -6 & -6 & 18 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Et en appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 18 & 0 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim^{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 7 & 0 \\ -6 & -6 & 18 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim^{2L_1 - L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim^{L_2 + L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim^{\frac{1}{2}L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En posant $z = s$, on obtient : $y = 2z = 2s$ et $-3x = 2y - 7z = 4s - 7s = -3s$ et donc $x = s$, et donc en prenant $s = 1$, on obtient le vecteur propre :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et finalement, on refait encore une fois la même chose, mais cette fois avec la valeur propre 5 :

$$\begin{pmatrix} 2-5 & -2 & 4 \\ -6 & -4-5 & 18 \\ -3 & -2 & 9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -6 & -9 & 18 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Et en appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 4 & 0 \\ -6 & -9 & 18 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim^{\substack{2L_1 - L_2 \to L_2 \\ L_1 - L_3 \to L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En posant $z = s$, on obtient donc : $y = 2z = 2s$ et $-3x = 2y - 4z = 4s - 4s = 0$ ce qui nous donne $x = 0$. En prenant $s = 1$, on obtient donc finalement le vecteur propre :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant écrire la factorisation de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -6 & -4 & 18 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

10.4 Diagonalisation : Le cas général

Definition 10.4.1 (Multiplicité algébrique)**.** Si A est une matrice de dimension $n \times n$, alors le polynômes caractéristique de A peut s'écrire sous la forme :

$$p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2}(\lambda - \lambda_3)^{\alpha_3} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

où les λ_i sont les valeurs propres (distinctes) de la matrice. Dans ce cas, les α_i sont appellé la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_i.

Definition 10.4.2. Si A est une matrice de dimension $n \times n$ et λ est une valeur propre de la matrice A, alors on appelle la multiplicité géométrique de λ le nombre maximal de vecteurs propres linéairement indépendant associé à la valeur propre λ. C'est à dire, le nombre de paramètre libre dans l'ensemble des solutions du système d'équations linéaire $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Théorème 10.4.1. Si A est une matrice carré, alors les énoncés suivant sont équivalent :

1. La matrice A est diagonalisable
2. Pour toute valeur propre λ, la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique

Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, la matrice D sera formé en plaçant les valeurs propres sur la diagonales en tenant compte de leur multiplicité (algébrique ou géométrique), et la matrice P sera obtenu en plaçant à la verticale un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendant associé à chacune des valeurs propres.

Exemple 10.4.1. On veut diagonaliser (si cela est possible) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ -8 & 11 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

On commence par trouver le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -6 \\ -8 & 11-\lambda & -12 \\ -4 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} &= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 11-\lambda & -12 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -8 & -12 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -8 & 11-\lambda \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)[(11-\lambda)(-3-\lambda)+48] - 4[-8(-3-\lambda)-48] - 6[-32+4(11-\lambda)] \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) - 4(8\lambda - 24) - 6(-4\lambda + 12) \\ &= (-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda - 15) + (-32\lambda + 96) + (24\lambda - 72) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = -(\lambda-3)^2(\lambda-1) = 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc 3 avec une multiplicité algébrique de 2 et 1 avec une multiplicité algébrique de 1. On va maintenant essayer de trouver deux vecteurs propres linéairement indépendant associé à la valeur propre $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} -1-3 & 4 & -6 \\ -8 & 11-3 & -12 \\ -4 & 4 & -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -6 \\ -8 & 8 & -12 \\ -4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

En applicant la méthode de Gauss, on obtient donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -6 & 0 \\ -8 & 8 & -12 & 0 \\ -4 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim_{\substack{2L_1-L_2\to L_2 \\ L_1-L_3\to L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc les vecteurs propres associé à la valeur propre 3 doivent respecter l'équation

$$-2x + 2y - 3z = 0$$

on peut donc prendre les deux vecteurs propres suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 3 est bien 2. On cherche maintenant un vecteur propre associé à la valeur propre 1 :

$$\begin{pmatrix} -1-1 & 4 & -6 \\ -8 & 11-1 & -12 \\ -4 & 4 & -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -8 & 10 & -12 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

En applicant la méthode de Gauss, on obtient donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -6 & 0 \\ -8 & 10 & -12 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim^{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 10 & -12 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim^{8L_1 - L_2 \to L_2}_{4L_1 - L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim^{2L_2 - 3L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En posant $z = 1$, on obtient $y = 2$ et $x = 1$ ce qui nous donne le vecteur :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 1 est 1. La matrice est donc bien diagonalisable. Ce qui nous donne finalement la factorisation suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ -8 & 11 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Les valeurs propres étant des racines d'un polynôme, il est fort possible en générale qu'elles soient des nombres complexes qui ne sont pas réel. Par contre, le théorème suivant nous garantie que dans certain cas, les valeurs propres sont obligatoirement réelles.

Théorème 10.4.2. **(Théorème spectral)** Si A est une matrice symétrique contenant uniquement des valeurs réels, alors la matrice A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. De plus, des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont toujours orthogonaux.

Exemple 10.4.2. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sachant que -1 est une valeur propre de cette matrice. Premièrement commençons par trouver un vecteur propre associé à la valeur propre -1. En applicant la méthode de Gauss au système d'équations $(A + I)\vec{v} = \vec{0}$ on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim^{L_1 - 2L_2 \to L_2}_{L_1 - L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On peut donc trouver deux vecteurs propres linéairement indépendant :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice A est symétrique, elle doit nécessairement être diagonalisable. De plus, un vecteur propre associé à la seconde valeur propre doit être perpendiculaire aux deux vecteurs propres que nous venons de calculer. On peut donc utiliser le produit vectoriel pour calculer un vecteur propre associé à cette seconde valeur propre :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

Il nous faut maintenant trouver la valeur propre qui est associé à ce vecteur propre. Pour ce faire, on se rappelle la définition d'une valeur propre / vecteur propre : $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La seconde valeur propre est donc 8. On obtient donc la diagonalisation suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

En particulier, remarquer qu'il n'a pas été nécessaire de trouver le polynôme caractéristique et ses racines pour pouvoir diagonaliser la matrice.

Chapitre 11

Applications de l'algèbre linéaire

11.1 Résolution des systèmes d'équations différentielles

Nous allons maintenant voir un lien important entre l'algèbre linéaire et le calcul différentiel et intégral qui est particulièrement utile dans la résolution de plusieurs problèmes d'application dans les différents domaines du génie. Il s'agit de la résolution des systèmes d'équations différentiels linéaires. L'idée est basé sur l'exemple suivant :

Exemple 11.1.1. Trouver une fonction $y(x)$ tel que $y'(x) = y(x)$ et $y(0) = 1$. Comme les seules fonctions qui sont égal à leur dérivée sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^x$, en utilisant la condition $y(0) = 1$ on obtient facilement $y(x) = e^x$.

Question de nous donner une meilleure idée de ce qui ce passe, on peut compliquer légèrement l'exemple précédent.

Exemple 11.1.2. Trouver une fonction $y(x)$ tel que $y'(x) = 2y(x)$ et $y(0) = 5$. En essayant différentes fonctions, on remarque que la solution doit être $y(x) = 5e^{2x}$. On peut aussi résoudre se problème en utilisant une méthode appelé la séparation des variables :

$$y'(x) = 2y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = 2dx \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = 2x + B \quad \Rightarrow \quad y = e^{2x+B} = e^B e^{2x} = Ce^{2x}$$

Donc la solution doit avoir la forme $y(x) = Ce^{2x}$. On peut ensuite trouver la valeur de C en utilisant la condition $y(0) = 5$, ce qui nous donne finalement :

$$y(x) = 5e^{2x}$$

Le même type de solution s'applique aussi pour des systèmes d'équations différentielles linéaires, mais avant de pouvoir essayer de résoudre de tel systèmes, on doit regarder comment calculer l'exponentielle d'une matrice. L'idée est basé sur la série de Taylor de la fonction $f(x) = e^x$. Il est possible de démontrer que :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Comme la partie de droite a du sens pour les matrices carrés, ceci nous amène à faire la définition suivante :

Definition 11.1.1. Si A est une matrice carré, alors on définit l'exponentiel de la matrice, dénoté e^A comme étant :

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

La définition précédente est particulièrement utile, mais c'est le théorème ci-dessous qui va nous permettre de calculer (simplement) l'exponentielle d'une matrice, puis le théorème suivant qui va nous permettre de résoudre des systèmes d'équations différentielles.

Théorème 11.1.1. **(Calcul de l'exponentielle d'une matrice)**

1. Si D est une matrice diagonale, alors on calcul son exponentielle en calculant l'exponentielle de chacun des éléments sur sa diagonale. C'est à dire :

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \implies e^D = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

2. Si A est une matrice carré diagonalisable tel que $A = PDP^{-1}$, alors son exponentielle est donné par :

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Definition 11.1.2. Un système d'équations différentielles linéaires est un système de la forme :

$$y'(x) = Ay(x)$$

où $y'(x)$ et $y(x)$ sont des vecteurs, et A est une matrice.

Théorème 11.1.2. Si $y'(x) = Ay(x)$ est un système d'équations différentielles, alors la solution de ce système est donné par :

$$y(x) = e^{Ax}y(0)$$

Démonstration. Il s'agit de vérifier que $y(x) = e^{Ax}y(0)$ satisfait bien l'équation différentielle et la condition initiale. Ceci démontre qu'il s'agit bien d'une solution. On peut ensuite vérifier qu'il s'agit de la seule solution en supposant qu'il en existe une deuxième $y_2(x)$ et en vérifiant que la dérivé de $y(x) - y_2(x)$ est zéro, ce qui signifit que $y(x) - y_2(x)$ est constant. Comme ils ont un point en commun (la condition initiale) il doit donc s'agit de la même fonction. □

Exemple 11.1.3. On veut résoudre le système d'équations différentielles linéaires suivant :

$$\begin{cases} y' = -58y + 252z \\ z' = -14y + 61z \\ y(0) = 1 \\ z(0) = -1 \end{cases}$$

Ce qui peut être réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -58 & 252 \\ -14 & 61 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Par le théorème précédent, la solution nous est donc donné par :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} -58x & 252x \\ -14x & 61x \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On va donc devoir diagonaliser la matrice. Pour ce faire, commençons par trouver les valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} -58 - \lambda & 252 \\ -14 & 61 - \lambda \end{vmatrix} = (-58 - \lambda)(61 - \lambda) + 3528 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda = 5$ et $\lambda = -2$ On veut maintenant trouver un vecteur propre associé à la valeur propre 5.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -58-5 & 252 & 0 \\ -14 & 61-5 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -63 & 252 & 0 \\ -14 & 56 & 0 \end{array}\right)$$

Donc un vecteur propre doit satisfaire l'équation $-14x + 56y = 0$. On peut donc prendre le vecteur

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche maintenant un vecteur propre associé à la valeur propre -2 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -58+2 & 252 & 0 \\ -14 & 61+2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -56 & 252 & 0 \\ -14 & 63 & 0 \end{array}\right)$$

Donc un vecteur propre doit satisfaire l'équation $-14x + 63y = 0$. On peut donc prendre par exemple :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc la solution du système d'équations différentielles est :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^{5x} & 9e^{-2x} \\ e^{5x} & 2e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{5x} & 9e^{-2x} \\ e^{5x} & 2e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44e^{5x} + 45e^{-2x} \\ -11e^{5x} + 10e^{-2x} \end{pmatrix}$$

On obtient donc que la solution est donnée par :

$$\begin{cases} y(x) = -44e^{5x} + 45e^{-2x} \\ z(x) = -11e^{5x} + 10e^{-2x} \end{cases}$$

11.2 Le problème des moindres carrés

Nous avons vu au chapitre 6 qu'un système d'équations linéaires possède toujours soit une seule solution, aucune solution ou une infinité de solution. Dans cette section, nous allons nous intéresser aux systèmes d'équations linéaires ayant aucune solution. De tel système sont relativement commun dans les problèmes pratiques, et dans plusieurs cas nous aurons besoin de déterminer qu'elle est la solution qui est la plus proche d'être correcte. La méthode des moindres carrés nous permet de répondre à cette question.

Théorème 11.2.1. **(La méthode des moindres carrés)** Supposons que $A\vec{x} = \vec{b}$ est un système d'équations linéaires ayant aucune solution, alors la solution qui est le plus proche d'être correcte (i.e. la solution au sens des moindres carrés) est la solution du système d'équations linéaires

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$$

Exemple 11.2.1. On veut trouver la droite d'équation $y = mx + b$ qui est le plus proche de passer par les points suivants :

x	y
1	4
2	8
3	8
4	10
5	13
6	16

Remarquez que nous pouvons écrire le tout sous forme de système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 4 = 1m + b \\ 8 = 2m + b \\ 8 = 3m + b \\ 10 = 4m + b \\ 13 = 5m + b \\ 16 = 6m + b \end{cases}$$

On peut vérifier rapidement que ce système d'équations n'admet aucune solution. Nous allons donc utiliser la méthode des moindres carrés. On va donc devoir résoudre le système d'équations linéaires suivant à la place.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 245 \\ 59 \end{pmatrix}$$

Que l'on peut résoudre à l'aide de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 91 & 21 & 245 \\ 21 & 6 & 59 \end{array}\right) \sim^{91L_2 - 21L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 91 & 21 & 245 \\ 0 & 105 & 224 \end{array}\right)$$

Ce qui nous donne :

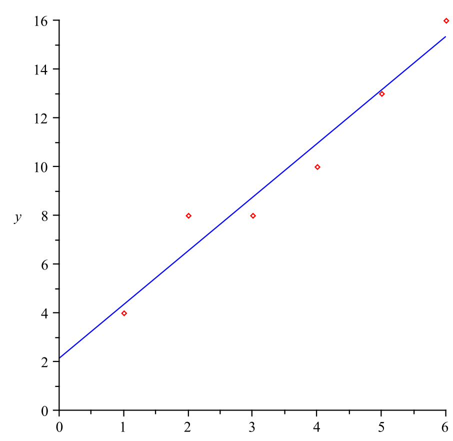
$$b = \frac{224}{105}$$

$$m = \frac{245 - 21\left(\frac{224}{105}\right)}{91} = \frac{11}{5}$$

L'équation de la droite des moindres carrés est donc :

$$y = \frac{11}{5}x + \frac{224}{105}$$

Le graphique suivant illustre le problème :



Exemple 11.2.2. On veut trouver l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ qui est le plus proche de passer par les points suivants :

x	y
1	4
2	20
3	40
4	64
5	100

Pour ce faire, nous devons résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 4 = a + b + c \\ 20 = 4a + 2b + c \\ 40 = 9a + 3b + c \\ 64 = 16a + 4b + c \\ 100 = 25a + 5b + c \end{cases}$$

Comme ce système n'a aucune solution, nous allons à nouveau utiliser la méthode des moindres carrés pour trouver ce qui est le plus proche d'être une solution. On va donc devoir résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 40 \\ 64 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 979 & 225 & 55 \\ 225 & 55 & 15 \\ 55 & 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3968 \\ 920 \\ 228 \end{pmatrix}$$

Puis on applique la méthode de Gauss pour résoudre le système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 979 & 225 & 55 & 3968 \\ 225 & 55 & 15 & 920 \\ 55 & 15 & 5 & 228 \end{array}\right) \sim^{\substack{979L_2 - 225L_1 \to L_2 \\ 979L_3 - 55L_1 \to L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 979 & 225 & 55 & 3968 \\ 0 & 3220 & 2310 & 7880 \\ 0 & 2310 & 1870 & 4972 \end{array}\right)$$

$$\sim^{3220L_3 - 2310L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 979 & 225 & 55 & 3968 \\ 0 & 3220 & 2310 & 7880 \\ 0 & 0 & 685300 & -2192960 \end{array}\right)$$

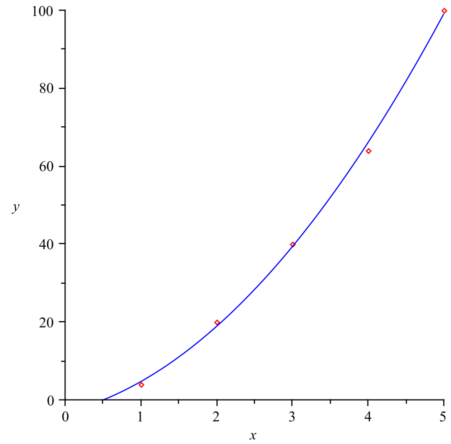
Ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22/7 \\ 166/35 \\ -16/5 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne la parabole suivante :

$$y = \frac{22}{7}x^2 + \frac{166}{35}x - \frac{16}{5}$$

Ce qui est illustré dans le graphique ci dessous :


100
80
60
40
20
0
y
0
1
2
3
4
5
x

Bibliographie

[1] Howard Anton and Chris Rorres. *Elementary linear algebra.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], tenth edition edition, 2010.

[2] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* Cépaduès Éditions, Toulouse, 1990.

[3] Peter D. Lax. *Linear algebra and its applications.* Pure and Applied Mathematics (Hoboken). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, second edition, 2007.

[4] David C. Lay. *Algèbre Linéaire : Théorie, Exercices et Applications.* De Boeck, 2009.