

Calcul II

Définition de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Règles de dérivation

$$\frac{d}{dx}(cf) = c f'$$

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = f' \pm g'$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg'$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

Dérivation des fonctions élémentaires

$$\frac{d}{dx}(\text{constante}) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{si } n \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Définition des fonctions trigonométriques

$$\sin(x) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypothénuse}}$$

$$\cos(x) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypothénuse}}$$

$$\tan(x) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\csc(x) = \frac{\text{Hypothénuse}}{\text{Opposé}} = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{\text{Hypothénuse}}{\text{Adjacent}} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Opposé}} = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Identités trigonométriques

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

$$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

Définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right)$$

Théorème fondamental du calcul

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Sommes importantes

$$\sum_{i=1}^n 1 = n$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Propriétés de l'intégrale définie

$$\int_a^a f dx = 0$$

$$\int_b^a f dx = -\int_a^b f dx$$

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

$$\int_a^b (f \pm g)dx = \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx$$

$$\int_a^b k f dx = k \int_a^b f dx$$

Formule quadratique

$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{Alors } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Règle de l'Hospital

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Algèbre des limites

Si chacune des limites ci dessous existe, alors:

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

De plus, si f est une fonction continue, alors:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

Formes indéterminées

Forme	Quoi faire
$\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$	Utiliser directement la règle de l'Hospital
$0 \cdot (\pm\infty)$	Transformer $f(x)g(x)$ sous la forme $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ puis règle de l'Hospital
$\infty - \infty$	Factoriser, utiliser des identités trigonométrique ou des dénominateurs commun pour nous permettre d'utiliser la règle de l'Hospital
0^0 , ∞^0 ou $1^{\pm\infty}$	Utiliser des logarithmes pour obtenir une des formes ci dessus

Changement de variables

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(x)dx$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \quad \text{si } g'(x) \neq 0 \text{ sur } (a,b)$$

Formules de base pour l'intégration

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int \sec(x) dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$$

$$\int \csc(x) dx = -\ln|\csc(x) + \cot(x)| + C$$

$$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$$

$$\int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C$$

$$\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + C$$

$$\int \csc(x) \cot(x) dx = -\csc(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec}(x) + C$$

Intégration par partie

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Différentielles

$$\Delta x = b - a$$

$$\Delta y = f(b) - f(a)$$

$$dx = \Delta x$$

$$dy = f'(a)dx$$

Si Δx est petit $\Delta y \approx dy$

Intégration des fonctions trigonométriques

Forme	Méthode
$\int \sin^n(ax) dx$	Si n est impair, conserver une copie de $\sin(ax)$ et remplacer les autres en cosinus. Faites ensuite un changement de variable. Si n est pair, utiliser l'identité $\sin^2(ax) = \frac{1 - \cos(2ax)}{2}$ et calculer le produit.
$\int \cos^n(ax) dx$	Comme précédemment en inversant sin et cos.
$\int \sin^m(ax) \cos^n(ax) dx$	Si m ou n est un entier impair plus grand ou égal à 3, on remplace la fonction ayant un exposant impair en utilisant $\sin^2(ax) + \cos^2(ax) = 1$ Si m et n sont pairs, utiliser les identités suivante: $\sin^2(ax) = \frac{1 - \cos(2ax)}{2}$, $\cos^2(ax) = \frac{1 + \cos(2ax)}{2}$ et $\sin(ax)\cos(ax) = \frac{1}{2}\sin(2ax)$
$\int (\sin(ax)\cos(bx))^n dx$	Utiliser l'identité $\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\sin(ax - bx) + \sin(ax + bx)]$
$\int (\sin(ax)\sin(bx))^n dx$	Utiliser l'identité $\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}[\cos(ax - bx) - \cos(ax + bx)]$
$\int (\cos(ax)\cos(bx))^n dx$	Utiliser l'identité $\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\cos(ax - bx) + \cos(ax + bx)]$
$\int \tan^n(ax) dx$	Utiliser l'identité $1 + \tan^2(ax) = \sec^2(ax)$ pour remplacer un $\tan^2(ax)$ Ensuite on fait un changement de variable.
$\int \sec^n(ax) dx$	Si n est pair, conserver une copie de $\sec^2(ax)$ et transformer les autres en utilisant l'identité $1 + \tan^2(ax) = \sec^2(ax)$ Si n est impair, utiliser l'intégration par partie.
$\int \sec^n(ax) \tan^m(ax) dx$	Si n est pair, isoler un $\sec^2(ax)$ et transformer le reste des sécantes en tangentes à l'aide de l'identité $1 + \tan^2(ax) = \sec^2(ax)$ Si n et m sont impairs, isoler $\sec(ax)\tan(ax)$ et transformer le reste des tangentes en sécantes à l'aide de l'identité $1 + \tan^2(ax) = \sec^2(ax)$ Si n est impair et m est pair, utiliser l'identité $1 + \tan^2(ax) = \sec^2(ax)$ pour retrouver seulement des sécantes.

Valeurs des fonctions trigonométriques à connaître

Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\csc(x)$	∞	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1
$\sec(x)$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\cot(x)$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

Substitutions trigonométrique

Forme	Substitution
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec(\theta)$
$a^2 - b^2 x^2$	$x = \frac{a}{b} \sin(\theta)$
$a^2 + b^2 x^2$	$x = \frac{a}{b} \tan(\theta)$
$b^2 x^2 - a^2$	$x = \frac{a}{b} \sec(\theta)$
$ax^2 + bx + c$	Complétez le carré

Décomposition en fractions partielles

Si le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur, effectuer la division euclidienne.

Chaque facteur de la forme $(x+a)^n$ au dénominateur donnera n fractions de la forme:

$$\frac{A_1}{(x+a)} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \frac{A_3}{(x+a)^3} + \dots + \frac{A_n}{(x+a)^n}$$

Chaque facteur de la forme $(x^2+bx+c)^n$ au dénominateur donnera n fractions de la forme:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

Volumes de révolution

Méthode des disques:

$$V = \int_a^b \pi r^2 dx$$

Méthode des tubes

$$V = \int_a^b 2\pi r H dx$$

Longueurs de courbes

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Aire des surfaces de révolution

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Graphique de quelques fonctions usuelles

