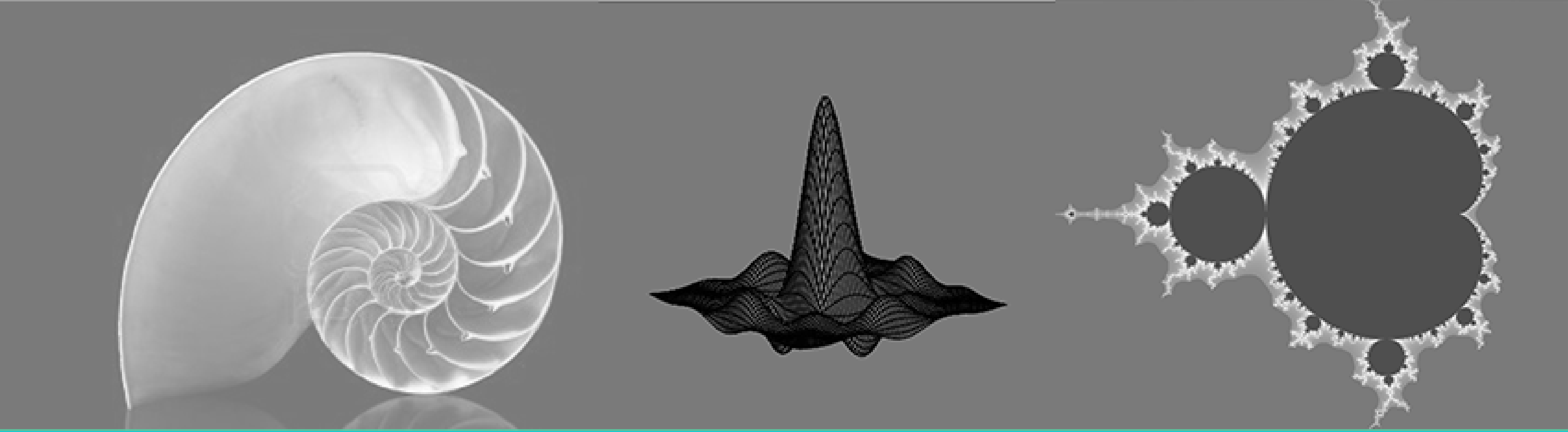


Introduction au calcul

Nicolas Bouffard

Université de Saint-Boniface
Une éducation supérieure depuis 1818

Dernière mise à jour :
8 septembre 2018 à 20:32

Table des matières

Chapitre 1

Les fonctions élémentaires

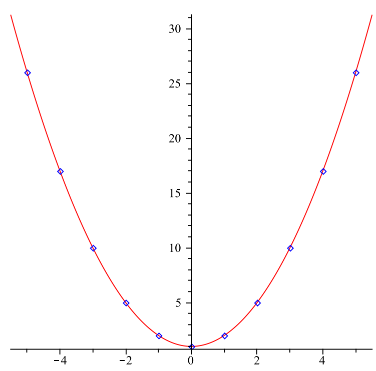
Dans ce chapitre, nous allons réviser plusieurs propriétés des fonctions élémentaires tel que vous les avez étudiez au secondaire. C'est propriétés nous serons utile tout au long du cours. Nous parlerons donc des fonctions linéaires, quadratiques, polynomiales, rationnelles, algébriques, exponentielles, logarithmiques, trigonométriques, trigonométriques inverses et finalement des fonctions définies par parties.

1.1 Généralité sur les fonctions

L'un de nos but dans un premier cours de calcul est d'être capable de prendre une fonction quelconque et d'en arriver à trouver algébriquement la plupart des propriétés de cette fonction, au point d'être capable de la représenter graphiquement. Nous somme encore loin de ce but, mais comme première étape nous allons prendre une fonction quelconque et en calculant plusieurs point de cette fonction, tracé un graphique approximatif de cette fonction.

Exemple 1.1.1. On veut dessiner approximativement le graphique de la fonction $f(x) = x^2+1$ en complétant une table de valeur :

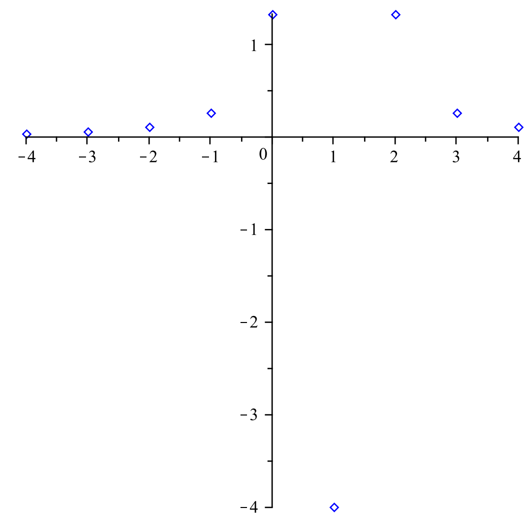
x	$f(x)$
-5	26
-4	17
-3	10
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26



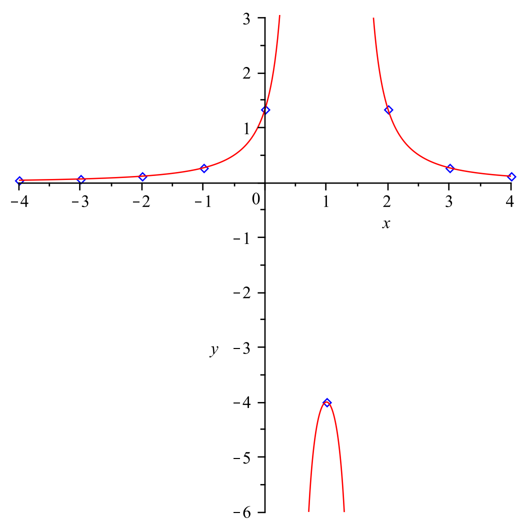
Plus il y a de points dans notre table de valeur, plus notre graphique sera précis. Par contre, bien qu'une table de valeur puisse nous aider à dessiner approximativement le graphique, dans plusieurs cas ce n'est pas suffisant. Nous allons maintenant regarder un autre fonction pour laquelle le graphique est moins évident à trouver.

Exemple 1.1.2. On veut dessiner approximativement le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{4}{4x^2-8x+3}$ en complétant une table de valeur :

x	$f(x)$
-4	4/99
-3	4/63
-2	4/35
-1	4/15
0	4/3
1	-4
2	4/3
3	4/15
4	4/35



Il devient alors beaucoup moins évident de visualiser le graphique de la fonction en utilisant seulement les valeurs que nous avons calculer. Nous pouvons bien sur calculer plus de point, mais cela peut devenir particulièrement fastidieux. Il sera donc nécessaire d'obtenir d'autre information sur la fonction pour pouvoir le dessiner correctement. Voici à quoi devrait avoir l'air le graphique :

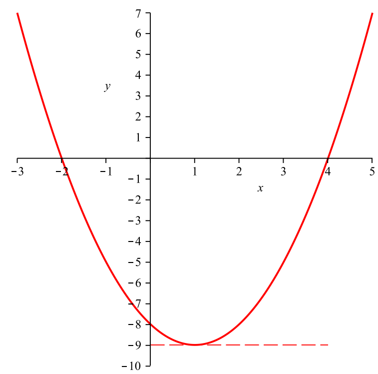


Lorsqu'une fonction nous est donné, nous allons être intéressé à étudier plusieurs de ses caractéristique. En particulier, nous serons intéressé pour commencer par les propriétés suivantes :

1. Son domaine : l'ensemble des valeurs de x pour lesquels il est possible d'évaluer la fonction
2. Son image : l'ensemble des valeurs que peut prendre la fonction
3. Ses zéros : L'ensemble des x pour lesquels la fonction vaut 0.

Nous allons commencer par trouver le domaine, l'image et les zéros d'une fonction à partir de son graphique, mais noté que le but est d'être capable de le faire sans recourir au graphique.

Exemple 1.1.3. Nous souhaiter trouver le domaine, l'image et les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 8$ sachant que le graphique de la fonction est :



En regardant le graphique, on remarque premièrement que la fonction est définie pour toutes les valeurs de x. On a donc que :

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

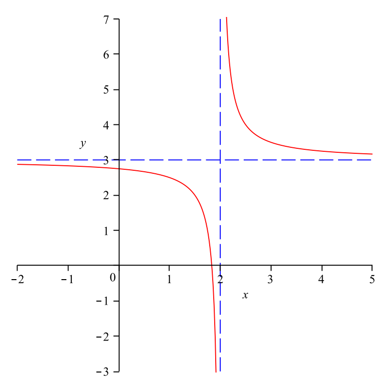
Ensuite, on remarque que l'image de la fonction (les valeurs possible à la verticale) contient toutes les valeurs de -9 jusqu'à l'infinie. On a donc :

$$\mathrm{Im(f)} = [-9, \infty)$$

Finalement, en regardant le graphique, on remarque que la fonction contient deux zéros (les valeurs où la fonction traverse l'axe des x). On a donc :

$$\text{Zéro}(f) = \{-2, 4\}$$

Exemple 1.1.4. On veut trouver le domaine et l'image de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2x-4} + 3$ à partir de son graphique :



On remarque donc que le domaine est $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, et l'image est $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}\backslash\{3\}$. Pour ce qui est du zéro, le graphique nous permet de voir facilement que la fonction n'a qu'un seul zéro qui se trouve quelque part entre 1 et 2. Le graphique ne nous permet cependant pas de trouver la valeur exacte. Il est donc nécessaire de faire un peu d'algèbre pour le trouver :

$$\frac{1}{2x-4} + 3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2x-4} = -3 \quad\Longrightarrow\quad 1 = -6x + 12 \quad\Longrightarrow\quad 6x = 11 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{11}{6}$$

On obtient donc que $\text{Zéro}(f) = \left\{\dfrac{11}{6}\right\}$.

Règle générale, l'image et les zéros d'une fonction peuvent demander beaucoup de travail pour les trouver si nous ne connaissons pas le graphique de la fonction. Par contre, quelques règles relativement simple peuvent nous permettre de trouver le domaine d'une fonction.

En général, si $f(x)$ est une fonction, alors son domaine est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, auquel on enlève les points suivants :

1. Il n'est pas possible d'effectuer des divisions par zéros, donc tout les valeurs de x pour lesquels on obtient une division par zéro doivent être exclut du domaine de la fonction.
2. Si la fonction contient une racine $\sqrt[n]{g(x)}$ avec n un entier pair, alors les valeurs de x pour lesquels $g(x) < 0$ doivent être exclut du domaine.
3. Si la fonction contient un logarithme de la forme $\ln(g(x))$ ou $\log_c(g(x))$, alors les valeurs de x pour lesquels $g(x) \leq 0$ doivent être exclut du domaine.
4. Si la fonction contient une fonction tangente de la forme $\tan(g(x))$, alors les valeurs de x pour lesquels $g(x)$ est de la forme $g(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où k est un entier doivent être exclut du domaine. Remarquez que cette règle est en fait une conséquence de celle de la division par zéro car $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Certaine autre règle devront être éventuellement ajouter concernant entre autre les autres fonctions trigonométrique et trigonométrique inverse. Nous allons maintenant regarder quelques exemple sur comment trouver algébriquement le domaine d'une fonction.

Exemple 1.1.5. On veut trouver algébriquement le domaine de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{2x-6}}{3x-12}$. On remarque premièrement que la fonction contient une division, Il va donc falloir retirer du domaine toutes les valeurs de x ou nous avons des divisions par zéros. On a donc :

$$3x - 12 = 0 \implies 3x = 12 \implies x = 4$$

La valeur de $x = 4$ doit donc être retiré du domaine. Maintenant, on remarque aussi que la fonction contient une racine carré, il va donc falloir retirer du domaine toutes les valeurs de x pour lesquels $2x - 6 < 0$. On a donc :

$$2x - 6 < 0 \implies 2x < 6 \implies x < 3$$

On obtient donc que le domaine de la fonction est :

$$\text{Dom}(f) = [3, 4) \cup (4, \infty)$$

1.2 Translation et dilatation

L'un des but des cours de calcul est d'apprendre à analyser des fonctions complexes. Pour ce faire, nous allons utiliser des outils tel que les limites, la dérivée et l'intégrale que nous étudierons un peu plus tard dans le cours. Par contre, l'outil le plus important est une bonne connaissance des fonctions élémentaires. Il vous sera donc nécessaire d'apprendre à les reconnaitre et avoir une bonne connaissance de leurs propriétés. À partir d'une fonction élémentaire, nous pouvons effectuer des translations et dilatations pour obtenir des fonctions plus complexes. Nous pouvons donc étudier des fonctions complexes à partir de fonction plus simple.

Théorème 1.2.1. Si $f(x)$ est une fonction (élémentaire) alors la fonction $g(x)$ définie par :

$$g(x) = af(bx - h) + k$$

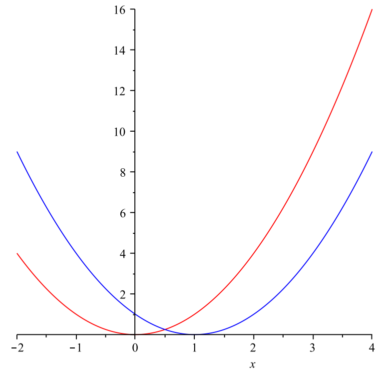
Possède un graphique ayant une forme semblable à $f(x)$, mais pour lequel les opérations suivantes ont été effectué :

- Une translation horizontale de facteur h
- Une translation verticale de facteur k
- Une dilatation horizontale de facteur b
- Une dilatation verticale de facteur a

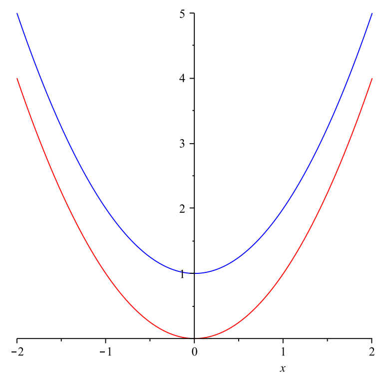
Remarquez que lorsque les paramètres a ou b sont négatif, on comprendra qu'il s'agit d'une symétrie suivie d'une dilatation de facteur $|a|$ ou $|b|$ selon le cas.

Exemple 1.2.1. Dans cet exemple, nous allons étudier l'effet des différents paramètre sur la fonction élémentaire $f(x) = x^2$.

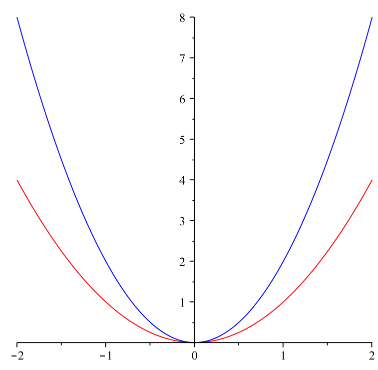
Les graphique ci contre illustre en rouge la fonction élémentaire $f(x) = x^2$ et en bleu la fonction $g(x) = (x-1)^2$. On remarque que dans ce cas, le paramètre h vaut 1, ce qui signifie que la fonction a été déplacé de 1 unité vers la droite.



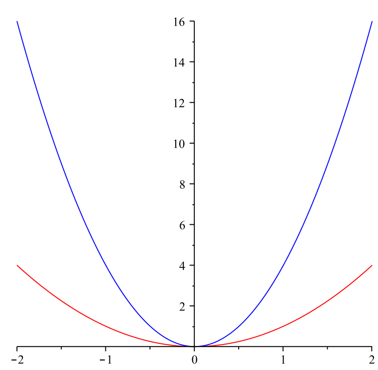
Les graphique ci contre illustre en rouge la fonction élémentaire $f(x) = x^2$ et en bleu la fonction $g(x) = x^2 + 1$. On remarque que dans ce cas, le paramètre k vaut 1, ce qui signifie que la fonction a été déplacé de 1 unité vers le haut.



Les graphique ci contre illustre en rouge la fonction élémentaire $f(x) = x^2$ et en bleu la fonction $g(x) = 2x^2$. On remarque que dans ce cas, le paramètre a vaut 2, ce qui signifie que la fonction étiré d'un facteur 2 à la verticale. C'est à dire que toutes les valeurs ont été doublé verticalement

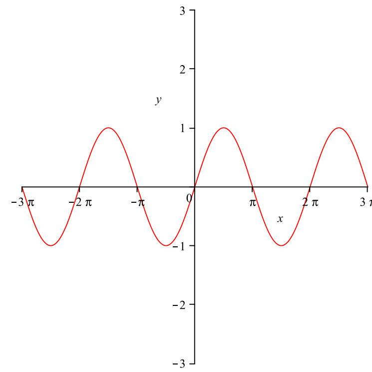


Les graphique ci contre illustre en rouge la fonction élémentaire $f(x) = x^2$ et en bleu la fonction $g(x) = (2x)^2$. On remarque que dans ce cas, le paramètre b vaut 2, ce qui signifie que la fonction compressé d'un facteur 2 à l'horizontale. C'est à dire que toutes les valeurs ont été divisé par 2 horizontalement

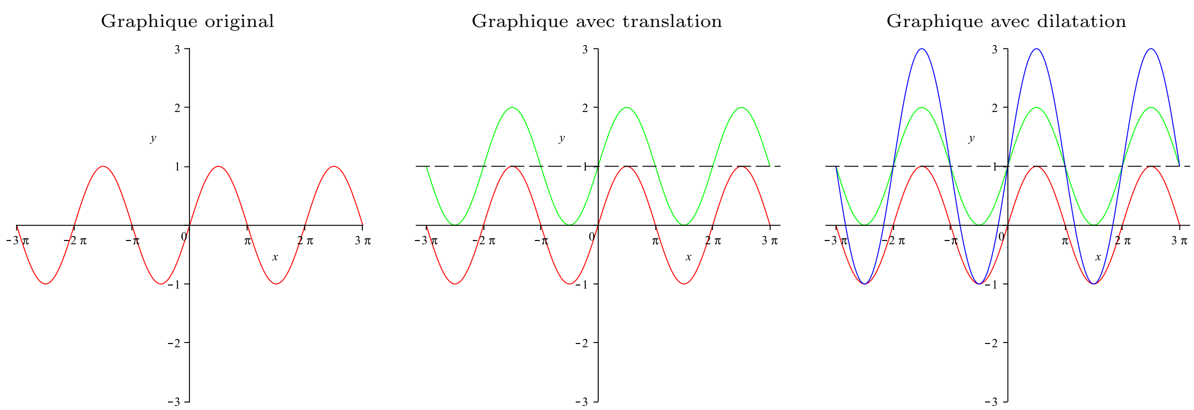


Nous allons maintenant regarder un autre exemple un peu plus difficile.

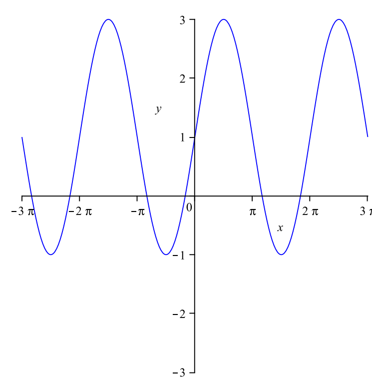
Exemple 1.2.2. On souhaite tracer le graphique de la fonction $g(x) = 2\sin(x) + 1$ sachant que le graphique de la fonction élémentaire $f(x) = \sin(x)$ ressemble à ceci :



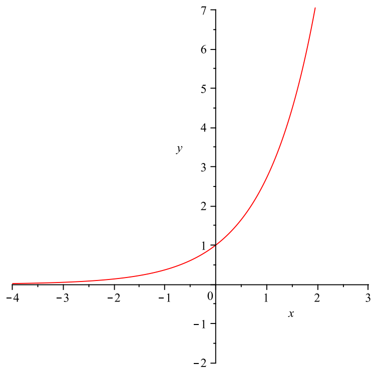
En regardant les divers paramètre de la fonction $g(x)$, on remarque premièrement qu'il y a eu une translation verticale de facteur 1, puis une dilatation verticale de facteur 2. Ce qui nous permet de dessiner successivement les graphiques suivant :



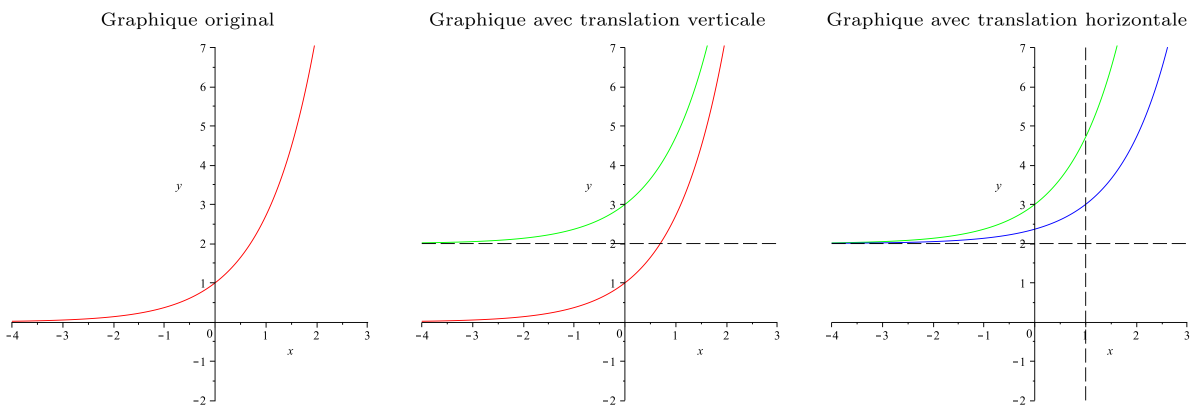
On obtient donc que le graphique de la fonction $g(x)$ doit être :



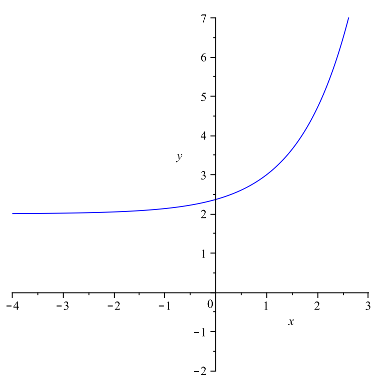
Exemple 1.2.3. On souhaite tracer le graphique de la fonction $g(x) = e^{x-1} + 2$ sachant que le graphique de la fonction élémentaire $f(x) = e^x$ ressemble à ceci :



En regardant les divers paramètre de la fonction $g(x)$, on remarque premièrement qu'il y a eu une translation verticale de facteur 2, puis une translation horizontale de facteur 1. Ce qui nous permet de dessiner successivement les graphiques suivant :



On obtient donc que le graphique de la fonction $g(x)$ doit être :



1.3 Les fonctions affines

Les première fonctions que nous allons étudier en détail sont les fonctions affines (couramment appelé à tord fonction linéaire). Ces fonctions jouent un rôle particulièrement important dans les cours de calcul comme nous le verrons dans les chapitres suivants.

Une fonction affine est une fonction de la forme :

$$f(x) = mx + b$$

son graphique est représenté par une droite dans le plan. Dans ce cas, la valeur de m représente la pente (un indice de son inclinaison) et la valeur de b représente la valeur initiale (la valeur de la fonction lorsque x vaut 0). On peut calculer la valeur de m en utilisant la formule suivante :

$$m = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

où $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ sont deux points de la droite. Lorsque m est connu, la valeur de b peut ensuite être calculer facilement en remplaçant x et $f(x)$ par un point quelconque de la droite.

Exemple 1.3.1. On veut trouver l'équations de la droite passant par les points $(2,3)$ et $(5,18)$. On commence donc par trouver la pente de la droite :

$$m = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{18-3}{5-2} = \frac{15}{3} = 5$$

Puis on calcul la valeur de b en utilisant l'un des deux points :

$$3 = 5(2) + b \quad\Longrightarrow\quad 3 = 10 + b \quad\Longrightarrow\quad b = -7$$

On obtient donc l'équation $f(x) = 5x - 7$.

Le domaine d'une fonction affine est toujours l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. L'image d'une fonction affine dépend de la valeur de la pente. Si $m = 0$, alors la droite est horizontale, son image sera donc uniquement $\{b\}$. Si au contraire $m \neq 0$, alors la droite n'est pas horizontale, et donc son image sera $\mathbb{R}$.

Les zéros d'une fonction affine peuvent se calculer facilement de façon algébrique. Si $m \neq 0$, alors nous avons :

$$0 = mx + b \Rightarrow x = \frac{-b}{m}$$

Les zéros de la fonction sont donc donné par l'ensemble : $\left\{\frac{-b}{m}\right\}$. Si au contraire $m = 0$, alors deux cas peuvent se présenter. Si $b \neq 0$, alors la fonction n'a aucun zéro, si au contraire $b = 0$, alors toutes les valeurs de x sont des zéros de la fonction, c'est à dire que l'ensemble des zéros sera $\mathbb{R}$.

1.4 Les fonctions quadratiques

Une fonction quadratique est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Une telle fonction est représenté graphiquement par une parabole. Si $a = 0$, il ne s'agit que d'une fonction affine. Nous allons donc exclure ce cas des fonctions quadratiques. Si $a > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut, et si $a < 0$, alors la parabole est ouverte vers le bas.

Le domaine d'une fonction quadratique est toujours l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Pour trouver l'image de la fonction, il faut commencer par trouver le minimum ou le maximum de la fonction selon le cas, ce qu'on peut faire en réécrivant la fonction sous la forme :

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

Dans ce cas le minimum ou le maximum de la fonction sera donné par (h,k). Pour réécrire la fonction sous cette forme, il s'agit de compléter le carré.

Exemple 1.4.1. On veut trouver l'image de la fonction $f(x) = 3x^2 - 12x + 19$. Comme $a = 3 > 0$, la parabole est ouverte vers le haut. Pour trouver l'image de la fonction, nous allons donc devoir trouver le minimum de cette fonction. Pour ce faire, on commence par factoriser le 3, puis on complète le carré, ce qui nous donne :

$$3x^2 - 12x + 19 = 3(x^2 - 4x) + 19 = 3(x-2)^2 + 7$$

Le minimum est donc au point $(2, 7)$. On obtient donc que l'image de la fonction est

$$\mathrm{Im}(f) = [7, \infty)$$

Finalement, une fonction quadratique peut avoir aucun, un seul ou exactement deux zéros. Pour les trouver, nous pouvons utiliser la formule quadratique. On a donc que si $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors les zéros de la fonction sont donné par :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Remarquez que la fonction n'a aucun zéro si $b^2 - 4ac < 0$, n'a qu'un seul zéro si $b^2 - 4ac = 0$ et a deux zéros si $b^2 - 4ac > 0$. Lorsque la fonction possède au moins un zéro, on peut alors réécrire la fonction sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple 1.4.2. On veut trouver les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 12x + 20$. Pour ce faire, en utilisant la formule quadratique on obtient :

$$x_0 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(1)(20)}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} = 2 \text{ ou } 10$$

On obtient donc que la fonction a deux zéro, $x = 2$ et $x = 10$. Ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\text{Zéro}(f) = \{2, 10\}$$

Dans ce cas, nous pouvons réécrire la fonction sous la forme $f(x) = (x-2)(x-10)$.

On peut maintenant utiliser les informations que nous avons vu dans cette section pour analyser une fonction quadratique quelconque.

Exemple 1.4.3. Pour cette question, considérez la fonction $f(x) = -2x^2 - 16x + 66$. Trouver le domaine, l'image et les zéros de la fonction et utiliser ces informations pour dessiner le graphique de la fonction. Premièrement, nous savons que le domaine d'une fonction quadratique est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ensuite, comme $a = -2 < 0$, alors nous savons que la parabole est ouverte vers le bas. Nous allons donc chercher le maximum de la fonction.

$$f(x) = -2x^2 - 16x + 66 = -2(x^2 + 8x) + 66 = -2(x+4)^2 + 98$$

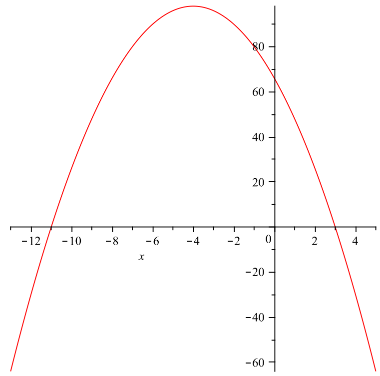
Le maximum est au point $(-4, 98)$, ce qui signifie que l'image de la fonction est :

$$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 98]$$

Finalement, nous allons trouver les zéros de la fonction. Pour ce faire nous allons utiliser la formule quadratique :

$$x_0 = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(-2)(66)}}{2(-2)} = \frac{16 \pm \sqrt{784}}{-4} = \frac{16 \pm 28}{-4} = -11 \text{ et } 3$$

Le graphique de la fonction est donc :



Exemple 1.4.4. Pour cette question, considérez la fonction $f(x) = 5x^2 - 50x + 120$. Trouver le domaine, l'image et les zéros de la fonction et utiliser ces informations pour dessiner le graphique de la fonction. Premièrement, nous savons que le domaine d'une fonction quadratique est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ensuite, comme $a = 5 > 0$, alors nous savons que la parabole est ouverte vers le haut. Nous allons donc chercher le minimum de la fonction.

$$f(x) = 5x^2 - 50x + 120 = 5(x^2 - 10x) + 120 = 5(x-5)^2 - 5$$

La minimum de la fonction est donc à $(5, -5)$. On obtient donc que l'image de la fonction est :

$$\mathrm{Im}(f) = [-5, \infty)$$

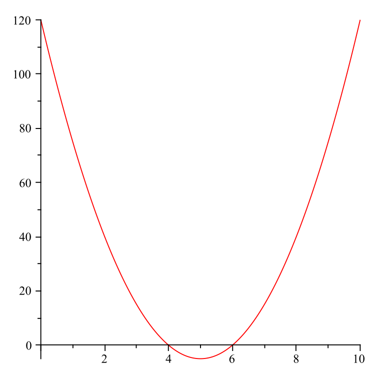
Finalement, nous allons trouver les zéros de la fonction en applicant la formule quadratique. On a donc :

$$x_0 = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(5)(120)}}{2(5)} = \frac{50 \pm \sqrt{100}}{10} = \frac{50 \pm 10}{10} = 4 \text{ et } 6$$

On a donc :

$$\text{Zéro}(f) = \{4, 6\}$$

On obtient donc le graphique suivant :



Chapitre 2

La limite

2.1 Introduction aux limites

Pour introduire l'idée de limite, considérons les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{x}$$

Ces deux fonctions semblent pratiquement identique, en effet, dans la fonction $g(x)$, on aurait tendance à vouloir simplifier les x, ce qui nous donnerait exactement la fonction $f(x)$. Par contre un problème ce pose. Il est facile de voir que $f(0) = 1$. Par contre, qu'elle est la valeur de $g(0)$? Comme il est impossible de diviser par 0, ce dernier ne fait pas parti du domaine de la fonction $g(x)$. On a donc que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq 0$. Pourtant, en regardant le graphique de la fonction $g(x)$, il semble évident que $g(0)$ devrait être égal à 0 (ce qui n'est cependant pas le cas!!!). C'est exactement ce que la limite nous permet de faire. Pouvoir dire que $g(0)$ devrait être égal à 0. Nous allons commencer par donner une définition informelle de la limite. Une définition formelle suivra, mais noté que seule la définition informelle sera utilisé dans le cours.

Definition 2.1.1. Si $f(x)$ est une fonction, et $a \in \mathbb{R}$, alors on définit :

1. La limite à gauche $\lim_{x\to a^-} f(x)$ comme étant la valeur vers laquelle s'approche la fonction lorsque x s'approche de a à partir de la gauche. On considère donc seulement les valeurs de la fonction lorsque $x < a$. La valeur au point a est donc complètement ignoré.
2. La limite à droite $\lim_{x\to a^+} f(x)$ comme étant la valeur vers laquelle s'approche la fonction lorsque x s'approche de a à partir de la droite. On considère donc seulement les valeurs de la fonction lorsque $x > a$. La valeur au point a est donc complètement ignoré.
3. La limite $\lim_{x\to a} f(x)$ comme étant égal à $\lim_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim_{x\to a^+} f(x)$ lorsque ces deux dernière sont égales, et on dira que la limite n'existe pas lorsque ces deux dernières ne sont pas égales.

L'idée de limite est beaucoup plus facile à comprendre à l'aide de table de valeurs et d'exemples graphiques, ce que nous allons faire dès maintenant.

Exemple 2.1.1. Considérons la fonction $f(x) = x^2$. Remarquons premièrement que si $x = 3$, alors la fonction vaut $f(3) = 3^2 = 9$. Il s'agit tout simplement de la valeur de la fonction à ce point. Considérons maintenant le même problème, mais cette fois en terme de limite. Quel est la valeur de $\lim_{x\to 3^-} f(x)$? Cette fois, nous ne somme pas intéressé à la valeur de la fonction lorsque $x = 3$, mais plutôt à la valeur de la fonction lorsque x s'approche de 3 à partir de la gauche. Notez qu'il s'agit d'un concept complètement différent. Nous allons commencer par répondre à cette question à l'aide d'une table de valeurs :

x	1	2	2,5	2,9	2,999	2,999999
$f(x)$	1	4	6,25	8,41	8,994001	8.999994

On remarque donc que lorsque x s'approche de 3 à partir de la gauche, la valeur de $f(x)$ s'approche de 9. On écrira donc :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 9$$

Remarquez que dans notre calcul de limite nous avons complètement ignoré la valeur de la fonction au point 3. Nous pouvons maintenant faire le même travail, mais en utilisant cette fois des valeurs qui s'approche de 3 à partir de la droite. On aura donc la table de valeurs suivante :

x	5	4	$3,5$	$3,1$	$3,001$	$3,000001$
$f(x)$	25	16	$12,25$	$9,61$	$9,006001$	9.000006

On remarque donc que lorsque x s'approche de 3 à partir de la droite, la valeur de $f(x)$ s'approche encore une fois de 9. On écrira donc :

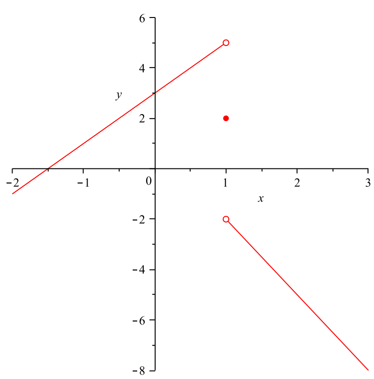
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 9$$

Ceci peut aussi être visualiser à l'aide d'un graphique. Comme la fonction $f(x)$ est continue, que l'on considère la valeur de $f(x)$ exactement au point 3, ou bien des la valeur de $f(x)$ lorsque l'on s'approche de 3 on obtiendra la même chose. Ce n'est cependant pas toujours le cas pour des fonctions plus compliqués.

Exemple 2.1.2. Considérons la fonction définie par parties suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ si } x < 1 \\ 2 \text{ si } x = 1 \\ -3x + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

qui est représenté par le graphique suivant :



On remarque que le domaine de la fonction est l'ensemble des nombres réels, par contre cette fonction a une discontinuité importante à $x = 1$. Regardons ce qui se passe à ce point en termes de limites :

$f(1) = 2$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 5$ car nous considérons seulement les valeurs à gauche de $x = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$ car nous considérons seulement les valeurs à droite de $x = 1$

$\lim_{x\to 1} f(x) =$ n'existe pas car les deux limites ci-dessus sont différentes

Nous pouvons aussi répondre à cette question à l'aide de table de valeurs. On aura donc :

x	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$	$0,99999$
$f(x)$	$4,8$	$4,98$	$4,998$	$4,9998$	$4,99998$

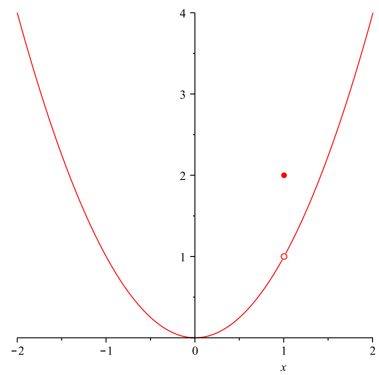
x	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$	$1,00001$
$f(x)$	-2.3	-2.03	-2.003	-2.0003	-2.00003

Ce qui confirme les calculs de limites que nous avions fait graphiquement.

Exemple 2.1.3. Considérons la fonction définie par parties suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \neq 1 \\ 2 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

qui est représenté par le graphique suivant :



Dans ce cas, remarquons que le domaine de la fonction est encore une fois l'ensemble des nombres réels au complet. Nous allons regarder ce qui se passe au point $x = 1$ en terme de limite :

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \text{ car nous considérons seulement les valeurs à gauche de } x = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \text{ car nous considérons seulement les valeurs à droite de } x = 1$$

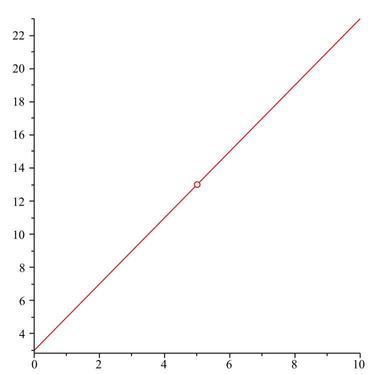
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \text{ car les deux limites ci-dessus sont égales}$$

Remarquez que dans ce cas, le processus de limite a complètement ignorer la discontinuité qui était présente au point $x = 1$.

Exemple 2.1.4. Considérons la fonction définie suivante :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 15}{x - 5}$$

qui est représenté par le graphique suivant :



Dans ce cas, nous remarquons que le domaine de la fonction $\mathbb{R}\backslash\{5\}$. Nous allons regarder ce qui se passe au point $x = 5$ en termes de limites, mais avant, remarquons qu'en factorisant on obtient :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 15}{x - 5} = \frac{(2x+3)(x-5)}{x-5} = 2x + 3 \text{ à la condition que } x \neq 5$$

Ce qui nous permet de calculer facilement les limites suivantes :

$$f(5) = \text{ n'existe pas, car on a une division par 0}$$

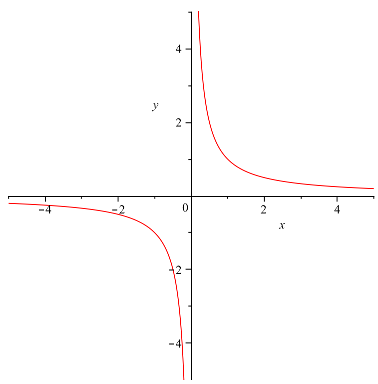
$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 13 \text{ car nous considérons seulement les valeurs à gauche de } x = 5$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 13 \text{ car nous considérons seulement les valeurs à droite de } x = 5$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 13 \text{ car les deux limites ci-dessus sont égales}$$

Remarquez que dans ce cas, le processus de limite a complètement ignorer la discontinuité qui était présente au point $x = 5$, et a en quelque sorte comblé le trou avec la valeur qui était le plus logique.

Exemple 2.1.5. Considérons maintenant la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ représenté par le graphique suivant :



Nous somme intéressé à calculer les limites lorsque $x = 0$. Pour ce faire, nous allons essayer de répondre à la question à partir de deux tables de valeurs :

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
f(x)	-1	-10	-100	-1000	-10000	-100000

On remarque donc qu'en considérant seulement de valeur de x négative, plus on s'approche de 0 plus que la valeur de $f(x)$ devient petite. On écrira donc :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

De la même manière, nous pouvons considérer des valeurs positives de x qui se rapproche de 0. On obtient donc :

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
f(x)	1	10	100	1000	10000	100000

On remarque donc qu'en considérant seulement de valeur de x positive, plus on s'approche de 0 plus que la valeur de $f(x)$ devient grande. On écrira donc :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

On peut donc conclure que :

$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{ n'existe pas}$$

Jusqu'à présent, nous avons calculer les limites principalement à l'aide du graphique ou d'une table de valeur. Ceci n'est pas nécessairement une mauvaise façon de procéder, mais il s'agit de méthode qui ne sont pas très pratique dans un cours de calcul universitaire. Nous allons donc devoir développer des méthodes algébriques pour nous permettre de calculer des limites sans avoir recours au graphique ou aux tables de valeurs. Le théorème qui suit est un premier pas dans cette direction.

Théorème 2.1.1. Si $f(x)$ est une fonction continue au point a (c'est à dire une fonction que l'on peut dessiner sans lever le crayon dans le voisinage de a), alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Le théorème nous permet donc de calculer certaine limite facilement uniquement en connaissant une propriété de la fonction qui est la continuité.

Exemple 2.1.6. On veut calculer la limite suivante : $\lim_{x\to 3}(4x^2 + 5x - 3)$. Comme les polynômes sont des fonctions continues, d'après le théorème tout ce que nous avons à faire est dévaluer la fonction à $x = 3$. On obtient donc :

$$\lim_{x\to 3}(4x^2 + 5x - 3) = 4(3)^2 + 5(3) - 3 = 48$$

Pour votre culture générale, nous allons maintenant donner une définition formelle de la limite (donc une définition beaucoup plus mathématique). Cette définition étant beaucoup plus difficile à comprendre, nous ne l'utiliserons pas dans ce cours.

Definition 2.1.2. Si $f(x)$ est une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Alors on dit que $\lim_{x\to a} f(x) = c$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

2.2 Les limites à l'infinie

Dans plusieurs applications de la limite, nous somme intéressé à savoir ce qu'il advient de la fonction lorsque x devient extrêmement grand (∞) ou extrêmement petit ($-\infty$). C'est ce que nous allons regarder dans cette section. Dans ce cas, il ne sera pas nécessaire de regarder les limites à gauche et à droite, car il n'y a rien de plus grand que l'infinie, ou plus petit que moins l'infinie.

Exemple 2.2.1. Nous voulons calculer la limite $\lim_{x\to\infty} x^2$. Pour ce faire, commençons par faire une table de valeur :

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$	1	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}

On remarque donc que plus x est grand, plus $f(x)$ est grand. On écrira donc :

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

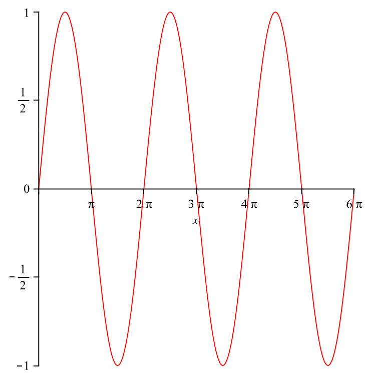
Exemple 2.2.2. Nous voulons calculer la limite $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$. Pour ce faire, commençons par faire une table de valeur :

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}

On remarque donc que plus x est grand, plus $f(x)$ est proche de 0. On écrira donc :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exemple 2.2.3. Nous voulons maintenant calculer la limite $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$. Pour ce faire, regardons le graphique de la fonction $f(x) = \sin(x)$:



Ici le problème est un peu plus difficile. La fonction oscille sans arrêt, peut importe les valeurs de x. Elle ne s'approche donc pas d'une valeur en particulier lorsque x devient très grand. On dira donc :

$$\lim_{x\to\infty} \sin(x) \text{ n'existe pas}$$

2.3 Algèbre des limites

Pour nous aider à simplifier les calculs, nous allons maintenant introduire un ensemble de règle nous permettant de calculer les limites.

Théorème 2.3.1. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions tel que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, et si c est une constante, alors on a :

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} cf(x) = cL_1$
3. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$
4. $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$
5. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = L_1L_2$
6. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

De plus, si f est une fonction continue, alors on a :

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(L_2)$$

De plus, certaine limite se retrouve tellement souvent dans les calculs, que nous les énonçons dans le théorème ci-dessous :

Théorème 2.3.2. On a les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$
4. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Les deux théorèmes que nous venons de voir vont maintenant nous permettre de calculer des limites un peu plus compliqué, comme

Exemple 2.3.1. On veut calculer les limites suivantes :

1.
$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x+5} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(x+5)} = \sqrt{\left(\lim_{x\to 2} x\right) + \left(\lim_{x\to 2} 5\right)} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$$

2.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(x+3)^5}{3x+2}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(x+3)^5}{3x+2}\right) = \frac{\lim_{x\to 0^+}(x+3)^5}{\lim_{x\to 0^+}(3x+2)} \\ &= \frac{(\lim_{x\to 0^+}(x+3))^5}{3\lim_{x\to 0^+}(x) + \lim_{x\to 0^+}(2)} = \frac{3^5}{2}\end{aligned}$$

3.
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

2.4 Les formes indéterminés $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Le but principal d'un premier cours de calcul est d'apprendre à calculer et utiliser le concept de dérivée. La dérivée, que nous allons définir dans le prochain chapitre, est un processus de limite qui nous donne à tout coup un expression de la forme $\frac{0}{0}$, ce qui est une forme indéterminé, c'est à dire qu'un expression de la forme $\frac{0}{0}$ peut prendre absolument n'importe quelle valeur. Il est donc nécessaire de les traiter avec soin.

Lorsque la fonction est une fonction rationnelle, le truc pour calculer des limites de la forme $\frac{0}{0}$ est de factoriser le numérateur et le dénominateur, puis simplifier avant de calculer la limite.

Exemple 2.4.1. On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{2-3}{2-5} = \frac{1}{3}$$

Exemple 2.4.2. On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-15}{x^2-10x+21} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x-7)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x-7} = \frac{8}{-4} = -2$$

Dans certain cas, en particulier lorsqu'il est difficile ou impossible de factoriser les polynômes, nous pourrons effectuer la division euclidienne avant de calculer la limite, comme dans l'exemple suivant :

Exemple 2.4.3. On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 14x^2 + 53x - 40}{x - 5}$$

Remarquons premièrement qu'il s'agit encore une fois d'une forme $\frac{0}{0}$, mais que cette fois il est moins évident de factoriser le numérateur. Nous allons donc commencer par faire la division euclidienne des deux polynômes :

$$
\begin{array}{r r r r r}
 & & x^2 & -9x & +8 \\
\cline{2-5}
x-5\big) & x^3 & -14x^2 & +53x & -40 \\
 & -x^3 & +5x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -9x^2 & +53x & \\
 & & 9x^2 & -45x & \\
\cline{3-4}
 & & & 8x & -40 \\
 & & & -8x & +40 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

On obtient donc que :

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 14x^2 + 53x - 40}{x - 5} = \lim_{x\to 5}\left(x^2 - 9x + 8\right) = 25 - 45 + 8 = -12$$

Exemple 2.4.4. On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 12x^2 + 41x + 42}{x^2 + 5x + 6}$$

Comme il s'agit encore une fois d'une forme $\frac{0}{0}$, nous allons commencer par effectuer la division des deux polynômes :

$$
\begin{array}{r r r r r}
 & & & x & +7 \\
\cline{2-5}
x^2+5x+6\big) & x^3 & +12x^2 & +41x & +42 \\
 & -x^3 & -5x^2 & -6x & \\
\cline{2-5}
 & & 7x^2 & +35x & +42 \\
 & & -7x^2 & -35x & -42 \\
\cline{3-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

on obtient donc que :

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 12x^2 + 41x + 42}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x\to -2}\left(x + 7\right) = -2 + 7 = 5$$

Remarquez qu'il faut toujours vérifier qu'il s'agit bien d'une forme $\frac{0}{0}$ avant d'essayer de factoriser ou d'effectuer la division. Lorsqu'il ne s'agit pas d'une forme indéterminé, le calculer est souvent beaucoup plus simple comme dans l'exemple ci-dessous :

Exemple 2.4.5. On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x + 7}$$

Ici, il ne s'agit pas d'une forme indéterminé, et la fonction est continue lorsque x est proche de 1. On pourra donc tout simplement remplacer le x par 1 ce qui nous donne :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x + 7} = \frac{1 - 6 + 5}{1 + 7} = \frac{0}{8} = 0$$

Lorsque la fonction contient des racines, le truc est souvent de multiplier par le conjugué du numérateur ou du dénominateur, puis de simplifier pour obtenir quelque chose de plus simple à calculer.

Exemple 2.4.6. On veut calculer la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} &= \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}
\end{aligned}$$

L'autre type de forme indéterminé que nous allons étudier dans ce cours sont celle de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Lorsqu'il s'agit d'une limite d'une fonction rationnelle, le truc pour lever une telle indétermination est souvent de factoriser la plus grand puissance du numérateur et la plus grand puissance du dénominateur.

Exemple 2.4.7. On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})}{x^2(1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}} = \frac{1-0+0}{1-0+0} = 1$$

Exemple 2.4.8. On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^2+3x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{5}{x})}{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x}}{x+3+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Remarquez qu'ici nous avons écrit $\frac{1}{\infty}$. Cette opération est techniquement incorrecte car ∞ n'est pas un nombre. Il s'agit d'un abus de notation qui nous est souvent utile à mieux comprendre ce qui ce produit.

Les indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$ sont particulièrement importante pour le calcul de la dérivée. Celle de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ sont particulièrement importante pour le calcul de l'intégrale (en particulier pour les calculs d'aire).

2.5 Application : Les assymptotes

Definition 2.5.1. Si $f(x)$ est une fonction pour laquelle l'une des deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

où a est une constante, alors on dit que $y = a$ est un asymptote horizontale de la fonction.

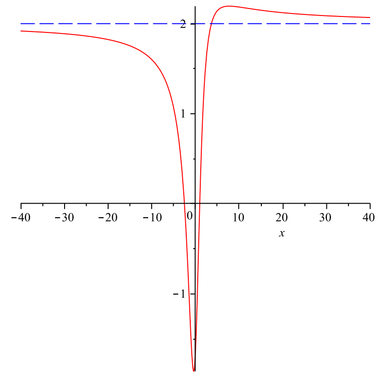
Exemple 2.5.1. On veut trouver s'il y a lieu les asymptotes horizontales de la fonction $f(x) = \frac{2x^2+3x-5}{x^2+3}$. Pour ce faire, nous devons calculer les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-5}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1+0} = 2$$

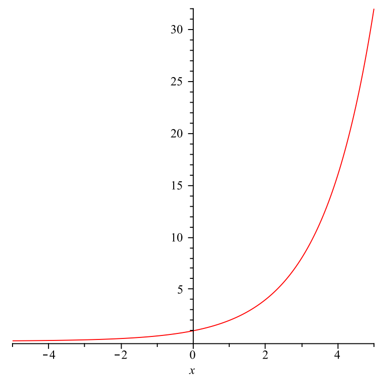
On peut donc conclure que la droite $y = 2$ est un asymptote horizontale de la fonction. Regardons maintenant s'il y a aussi un asymptote horizontale du côté gauche de la fonction.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3x-5}{x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1+0} = 2$$

Donc la droite $y = 2$ est un asymptote horizontale pour les deux côtés de la fonction. Voici à quoi ressemble la fonction :



Exemple 2.5.2. On veut trouver s'il y a lieu les asymptotes horizontales de la fonction $f(x) = \dfrac{5}{1+2^x} - 1$. Pour ce faire, commençons par nous rappeler à quoi ressemble la fonction $g(x) = 2^x$:



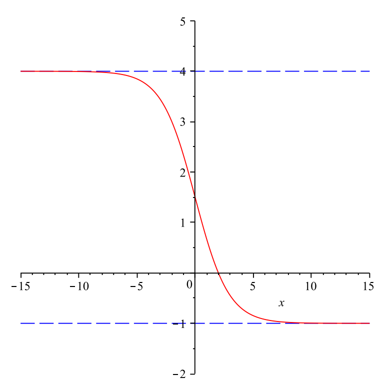
Ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$$

En utilisant ce résultat, nous pouvons maintenant vérifier si la fonction $f(x)$ possède des asymptotes horizontales :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{1+2^x} - 1\right) = \frac{5}{1+0} - 1 = 4$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{1+2^x} - 1\right) = \frac{5}{1+\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$$

La fonction possède donc deux asymptotes horizontales, la première à $y = -1$ et la seconde à $y = 4$. Voici le graphique de la fonction $f(x)$, ce qui va nous permettre de confirmer ce que nous venons de calculer algébriquement.



Definition 2.5.2. Si $f(x)$ est une fonction, et $a \in \mathbb{R}$, alors on dit que $f(x)$ a un asymptote verticale à $x = a$ si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

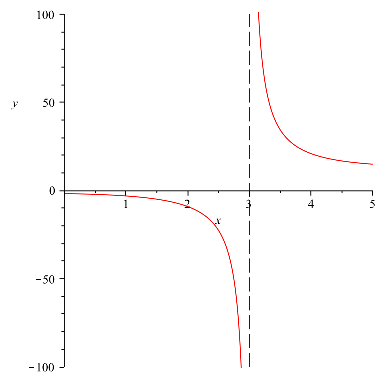
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Remarquez que les asymptotes vertical se produisent habituellement lorsqu'il y a des divisions par 0. Il est donc important de connaitre le domaine de la fonction avant de chercher les asymptotes verticales. De plus, ce n'est pas parce qu'une valeur de x ne fait pas partie du domaine qu'il s'agit d'un asymptote verticale, ce n'est pas non plus parce qu'on a une division par zéro qu'il s'agit d'un asymptote vertical. Tout ce que nous savons c'est que les points ne faisant pas partie du domaine de la fonction, en particulier ceux où il y a des divisions par zéro, sont des points d'intérêt pour chercher des asymptotes verticales.

Exemple 2.5.3. Déterminer s'il y a lieu les asymptotes verticals de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x-3}$. Pour ce faire, remarquons que le seul point pour lequel la fonction n'est pas définie est à $x = 3$. Nous allons donc nous intéressé à la limite à ce point :

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+5}{x-3} = \frac{14}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+5}{x-3} = \frac{14}{0^+} = \infty$$

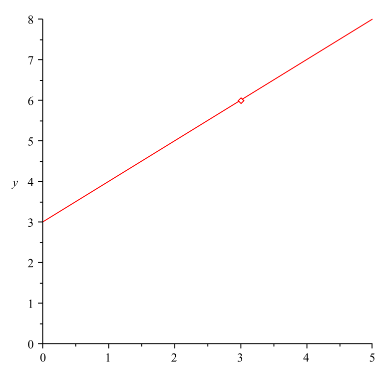
On peut donc conclure que la fonction possède un asymptote à $x = 3$, comme l'illustre le graphique ci-dessous :



Exemple 2.5.4. Déterminer s'il y a lieu les asymptotes verticals de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$. Pour ce faire, remarquons que le seul point pour lequel la fonction n'est pas définie est à $x = 3$. Nous allons donc nous intéressé à la limite à ce point :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

Comme la limite ne tend pas vers $\pm\infty$, on peut donc conclure que la fonction ne possède pas d'asymptote vertical, comme l'illustre le graphique ci-dessous. Remarquez que bien que la discontinuité ne soit pas visible, la fonction n'existe pas à $x = 3$. En d'autre mot, il y a un trou dans la droite.

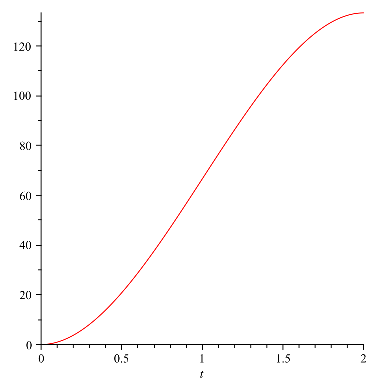


Chapitre 3

La dérivée

3.1 Taux de variation moyen et instantané

Pour introduire l'idée de la dérivée, considérons le problème suivant. Une voiture se déplace entre une ville A et une ville B. À chaque minute, on note la distance qu'a parcouru le voiture depuis son départ. En plaçant les points sur un graphique, on obtient le graphique suivant :



On donne ensuite les données à un expert qui les analyses et nous dit que la position de la voiture en km par rapport au temps en heure suit approximativement la fonction suivante :

$$f(t) = \frac{-100}{3}x^3 + 100x^2$$

Remarquez que nous aurions aussi pu travailler directement avec le graphique, mais connaitre la fonction va nous simplifier légèrement la vie. Votre ami vous demande maintenant quel a été la vitesse moyenne de la voiture durant les 2 heures de son trajet. Avec un peu de réflexion, on se rappelle la définition d'une vitesse qui nous est donné par la formule :

$$vitesse = \frac{deplacement}{temps}$$

Donc si nous souhaitons connaitre la vitesse moyenne durant tout le trajet, nous aurons :

$$\text{vitesse moyenne}_{[0,2]} = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{200}{3}\text{km/h}$$

Donc la voiture roulait en moyenne à approximativement 67 km/h. Votre ami vous demande ensuite quel a été la vitesse moyenne entre 30min et 90min après le départ de la voiture. En utilisant la même idée, on obtient :

$$\text{vitesse moyenne}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]} = \frac{f(\frac{3}{2}) - f(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{275}{3}\text{km/h}$$

C'est à dire que la voiture roulait en moyenne à approximativement 92 km/h.

Ces deux exemples illustre l'idée de taux de variation moyen d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$. Remarquez qu'une vitesse n'est en fait rien d'autre qu'un taux de variation. On est donc amené à faire la définition suivante :

Definition 3.1.1. Si $f(x)$ est une fonction définie sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors on définit le taux de variation moyen de la fonction entre a et b comme étant :

$$TVM_{[a,b]}f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Revenons maintenant à notre exemple d'introduction. Votre cousin entend la conversation que vous avez avec votre ami et vous demande maintenant quel était précisément la vitesse de la voiture au temps $t = \frac{1}{2}$, vous réfléchissez un peu et vous vous dites que cette vitesse n'est en fait rien d'autre que la vitesse moyenne sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, ce qui vous donne :

$$\frac{f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{0}{0} = \text{ n'est pas définie}$$

Oups!!!! Le calcul que vous venez de faire n'a tout simplement pas de sens. Vous obtenez une division par zéro. Pour résoudre le problème, comme vous ne pouvez pas calculer la vitesse moyenne sur un intervalle contenant seulement un point, vous aller plutôt calculer la vitesse moyenne sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, y\right]$, où y est un nombre très proche de $\frac{1}{2}$. Plus que y sera proche de $\frac{1}{2}$, plus votre approximation sera bonne. Ceci vous rappelle le chapitre précédent, ce qui vous donne l'idée que la vitesse recherché doit être tout simplement :

$$\lim_{y \to \frac{1}{2}} \frac{f(\frac{1}{2}) - f(y)}{\frac{1}{2} - y} = 75$$

Donc la vitesse de la voiture était d'exactement 75 km/h au temps $t = \frac{1}{2}$. Ce que nous venons de calculer est ce qu'on appelle en mathématiques la dérivée de la fonction, et c'est ce que nous allons étudier pendant tout le chapitre.

Exemple 3.1.1. On veut calculer le taux de variation moyen de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ sur l'intervalle $[2, 5]$. On a donc :

$$TVM_{[2,5]}f(x) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{26 - 5}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7$$

3.2 Définition de la dérivés et équation de la tangente

Nous avons vu dans la section précédente que certain problèmes nous amène à devoir trouver le taux de variation instantané d'une fonction à un point donné de son domaine. C'est ce que nous appelons la dérivée.

Definition 3.2.1. Si $f(x)$ est une fonction définie en un point a de son domaine, alors on définit la dérivé de f au point a comme étant :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Dans le cas où cette limite n'existe pas, nous dirons tout simplement que la fonction n'est pas dérivable au point a.

Remarquez que la dérivée (ou taux de variation instantané) correspond donc à la pente de la tangente de la fonction à un point donné.

Exemple 3.2.1. On veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = 3x^2 + 5$ lorsque $x = 4$. on a donc :

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(3(4+h)^2 + 5) - (3(4)^2 + 5)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(3(16+8h+h^2)+5) - (3(16)+5)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(53 + 24h + 3h^2) - (53)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + 24h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (3h + 24) \\
&= 24
\end{aligned}$$

L'exemple précédent nous permet donc de conclure que la pente de la tangente à la fonction $f(x) = 3x^2+5$ au point $(4,53)$ est 24, ce qui peut nous permettre de trouver l'équation de la tangente. Qu'arrive-t-il si nous voulons maintenant connaitre la dérivée de la fonction pour d'autre point ? Techniquement, pour le moment, nous devrions refaire tout le calcul de l'exemple précédent pour ce nouveau point, pourtant, presque tout est identique. Ceci nous amène donc à considéré la fonction dérivée $f'(x)$ qui calcul la dérivée de la fonction pour tout les points du domaine de la fonction où la dérivée existe.

Definition 3.2.2. Si $f(x)$ est une fonction, alors on définit la fonction dérivé $f'(x)$ comme étant :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pour toutes valeurs de x où cette dernière limite existe.

Exemple 3.2.2. On veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^3 + 3x$. On a donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^3 + 3(x+h)) - (x^3 + 3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{((x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + (3x + 3h)) - (x^3 + 3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 2xh + h^2 + 3\right) \\
&= 3x^2 + 3
\end{aligned}$$

En particulier, nous pouvons maintenant utiliser la fonction que nous venons de trouver pour calculer la dérivée de la fonction lorsque $x = 5$. On a donc :

$$f'(5) = 3(5)^2 + 3 = 78$$

Remarque sur la notation : Il y a deux notations standard pour dénoter la dérivée d'une fonction. Si $f(x)$ est une fonction, alors la notation de Newton que nous avons utilisé jusqu'à présent dénote sa dérivée par $f'(x)$. L'autre notation est celle attribué à Leibniz qui la dénote plutôt par $\frac{df(x)}{dx}$. Dans ce cours, nous utiliserons les deux notations de manière interchangeable.

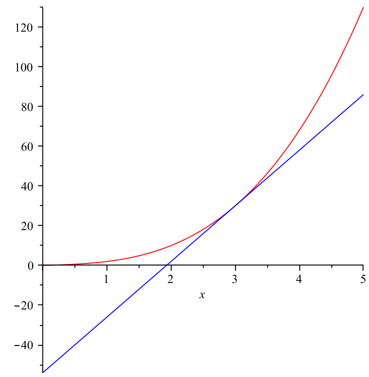
Exemple 3.2.3. On veut trouver l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = x^3 + x$ lorsque $x = 3$. Pour ce faire, commençons par trouver la pente de cette tangente, ces à dire commençons par trouver $f'(3)$:

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(3+h)^3 + (3+h)] - (3^3 + 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{28h + 9h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} (28 + 9h + h^2) = 28
\end{aligned}$$

Donc l'équation de la tangente aura la forme $g(x) = 28x + b$. Pour trouver la valeur de b, nous allons utiliser le point $(3, f(3))$. On obtient donc :

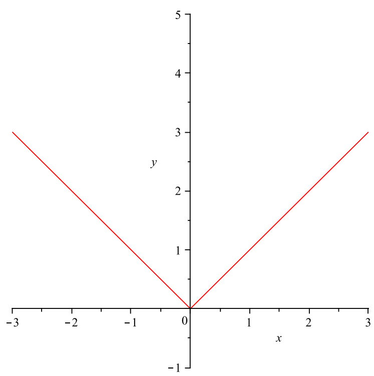
$$f(3) = 28(3) + b \quad \Longrightarrow \quad 30 = 84 + b \quad \Longrightarrow \quad b = -54$$

L'équation de la tangente est donc $g(x) = 28x - 54$. Le graphique ci-dessous illustre la fonction $f(x)$ ainsi que la tangente.



Exemple 3.2.4. On veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = |x|$. Remarquons qu'il s'agit d'une fonction définie par partie. En effet, nous pouvons réécrire la fonction sous la forme :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



Commençons par supposer que $x > 0$. Dans ce cas nous avons :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Supposons maintenant que $x < 0$, alors nous avons :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

La question est maintenant de savoir qu'elle est la valeur de $f'(0)$. Dans ce cas, un problème ce pose :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$$

Ceci signifie que la fonction n'est pas dérivable à 0. Ceci s'explique par la présence d'un coin dans la fonction. On obtient donc :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \\ \text{n'existe pas si } x = 0 \end{cases}$$

3.3 Premières règles de dérivation

La définition de la dérivée que nous avons vu dans la section précédente est particulièrement utile d'un côté théorique, par contre possède plusieurs inconvénient, principalement associé à la difficulté et au temps nécessaire pour calculer la dérivée, même pour des fonctions relativement simple. Il nous est donc nécessaire de développer certaine règle de calcul qui vont grandement nous simplifier la vie.

Théorème 3.3.1.

1. La dérivé d'une fonction constante est zéro
2. Si c est une constante, et $f(x)$ est une fonction, alors $(cf)'(x) = cf'(x)$
3. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions, alors $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
4. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions, alors $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
5. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions, alors $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

Démonstration.

1. Considérons la fonction $f(x) = c$ où c est une constante. Alors on a :
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
2. Supposons que $f(x)$ est une fonction dérivable et c est une constante, alors on a :
$$\begin{aligned} (cf)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x) \end{aligned}$$
3. Considérons des fonctions dérivable $f(x)$ et $g(x)$, alors on a :
$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) = (f' + g')(x) \end{aligned}$$
4. Pratiquement identique à la partie précédente. Cette démonstration vous est laissé en exercice.
5. Supposons que $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions, alors on a :
$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$

□

Exemple 3.3.1. Supposons que $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions dérivable telle que $f(2) = 15$, $g(2) = -1$, $f'(2) = 13$ et $g'(2) = 1$. Alors on a :
$$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 13 + 1 = 14$$

$$(5f)'(2) = 5f'(2) = 5(13) = 65$$
$$(fg)'(2) = f(2)g'(2) + g(2)f'(2) = 15(1) + (-1)(13) = 15 - 13 = 2$$

Exemple 3.3.2. Sachant que $(5x^2+3)' = 10x$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$, alors on veut calculer la dérivée de $\left(5x^2 + 3 + \frac{1}{x}\right)$, ainsi que la dérivée de $\frac{5x^2+3}{x}$. On a donc :

$$\left(5x^2 + 3 + \frac{1}{x}\right)' = (5x^2+3)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 10x - \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{5x^2+3}{x}\right)' = \left((5x^2+3)\cdot\frac{1}{x}\right)' = \frac{10x}{x} + \frac{-(5x^2+3)}{x^2} = 5 - \frac{3}{x^2}$$

3.4 Dérivation des polynomes

Nous allons maintenant utiliser ce que nous avons vu jusqu'à présent pour calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^n$.

Commençons par calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x$:

$$\frac{d}{dx}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Puis en utilisant la règle du produit, on peut maintenant calculer :

$$\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(xx) = (x)'x + x(x') = x + x = 2x$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^2)x = (x^2)'x + (x^2)x' = 2xx + x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$$

Nous somme donc amené à supposer que si k est un entier positif, nous avons

$$\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$$

Pour s'en convaincre, nous allons démontrer que si la formule fonctionne pour x^k, alors elle fonctionne encore pour x^{k+1}.

$$\frac{d}{dx}x^{k+1} = \frac{d}{dx}(x^k)x = (x^k)'x + (x^k)x' = kx^{k-1}x + x^k = kx^k + x^k = (k+1)x^k$$

Comme nous avons déjà démontré que la règle fonctionne pour x^1, x^2 et x^3, et que nous venons de démontrer que la règle fonctionne toujours pour la valeur suivante, c'est à dire que si elle fonctionne pour x^3, alors elle fonctionne pour x^4, si elle fonctionne pour x^4 alors elle fonctionne pour x^5, etc. On peut donc conclure que :

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Théorème 3.4.1. Si k est un entier positif, alors :

$$\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$$

On peut maintenant utiliser ce résultat, en combinaison avec les règles de dérivation de la section précédente, pour calculer la dérivé de n'importe quel polynôme.

Exemple 3.4.1. On veut calculer les dérivées suivantes :

1. $\dfrac{d}{dx}(3x^4+5x+2) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) + 5\dfrac{d}{dx}(x) + \dfrac{d}{dx}(2) = 12x^3+5$
2. $\dfrac{d}{dx}(6x^{10}+7x^8-4x^3+2) = 60x^9+56x^7-12x^2$
3. $\dfrac{d}{dx}(-3x^6+2x^3-5) = -18x^5+6x^2$

Exemple 3.4.2. Trouver l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = x^4-3x^2+1$ lorsque $x=3$. Pour ce faire, commençons par calculer la dérivée. On a donc :

$$f'(x) = 4x^3 - 6x$$

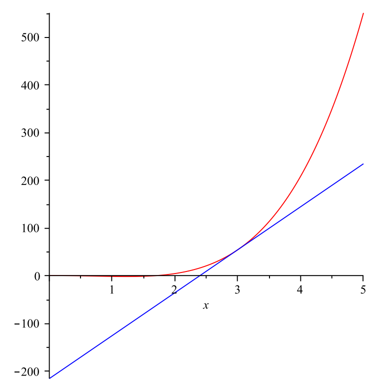
Ce qui nous permet de calculer la pente de la tangente. On a donc :

$$m = f'(3) = 4(3)^3 - 6(3) = 90$$

Donc l'équation de la tangente a la forme $g(x) = 90x + b$. Il ne nous reste donc plus qu'à trouver la valeur de b. Pour ce faire, remarquons que $f(3) = 55$. On a donc :

$$55 = 90(3) + b \quad\Longrightarrow\quad b = -215$$

L'équation de la tangente est donc : $g(x) = 90x - 215$. Voici un graphique illustrant la situation :



Exemple 3.4.3. Considérons un carré pour lequel la longueur de ses côtés varies. On souhaite trouver quelle est la variation de l'aire et du périmètre en fonction de la longueur de ses côtés lorsque la longueur de ses côtés mesure 5 cm. Pour ce faire, si on dénote l'aire du carré par A, son périmètre par P et la longueur de ses côtés par x, alors on a les formules suivantes :

$$P(x) = 4x \qquad \text{et} \qquad A(x) = x^2$$

Comme nous somme intéressé par la variation de ces fonctions par rapport à x, on va donc calculer la dérivée :

$$P'(x) = 4 \qquad \text{et} \qquad A'(x) = 2x$$

Lorsque $x = 5$, on a donc que le périmètre varie de $4cm/cm$ et son aire varie de $8cm^2/cm$.

3.5 Application : Croissance et décroissance

Nous somme maintenant en mesure d'utiliser la dérivée pour déterminer si une fonction est croissante ou décroissante à certain point. Comme la dérivé représente la pente de la tangente, on obtient donc le résultat suivant :

Théorème 3.5.1. Si $f(x)$ est une fonction dérivable au point a, alors :

1. $f(x)$ est croissante au point a si $f'(a) > 0$
2. $f(x)$ est décroissante au point a si $f'(a) < 0$

Exemple 3.5.1. Est-ce que la fonction $f(x) = x^7 + 5x^3 - 4x^2 + 3$ est croissante ou décroissante lorsque $x = 1$? Pour ce faire, commençons par calculer la dérivée de la fonction :

$$\frac{df(x)}{dx} = 7x^6 + 15x^2 - 8x$$

ce qui nous donne :

$$f'(1) = 7(1)^6 + 15(1)^2 - 8(1) = 14 > 0$$

La fonction est donc croissante lorsque $x = 1$.

Exemple 3.5.2. On veut déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x) = x^3 - 21x^2 + 135x + 18$. Pour ce faire, commençons par trouver la dérivée de la fonction.

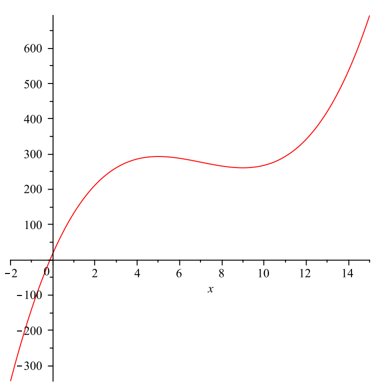
$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 42x + 135 = 3(x-5)(x-9)$$

La fonction est croissante lorsque la dérivé est positive, ce qui est le cas lorsque les deux membres du produit de droite sont positif, ou lorsque les deux membres du produit de droite sont négatif. On obtient donc que la fonction est croissante lorsque $x < 5$ et lorsque $x > 9$. La fonction est décroissante lorsque la dérivée est négative, ce qui est le cas lorsque les deux membres du produit de droite sont de signe contraire, ces à dire dans l'intervalle $5 < x < 9$. On obtient donc :

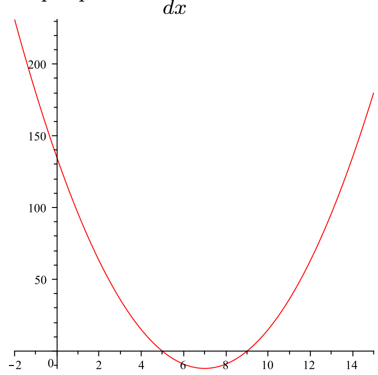
1. Intervalle de croissance : $(-\infty, 5) \cup (9, \infty)$
2. Intervalle de décroissance : $(5, 9)$

Voici le graphique représentant la fonction (à gauche) et celui représentant la dérivée (à droite).

Graphique de $f(x) = x^3 - 21x^2 + 135x + 18$



Graphique de $\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 42x + 135$



Exemple 3.5.3. On veut trouver les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 48x^2 + 5$. Pour ce faire, commençons par calculer la dérivé de la fonction :

$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 96x = 12x(x^2 + 2x - 8) = 12x(x+4)(x-2)$$

Les zéros de la dérivée sont donc à $x = -4, x = 0$ et $x = 2$. Nous pouvons maintenant faire un tableau pour nous permettre de déterminer les changements de signe de la dérivée :

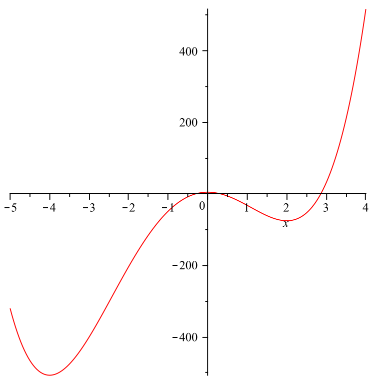
x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

On obtient donc :

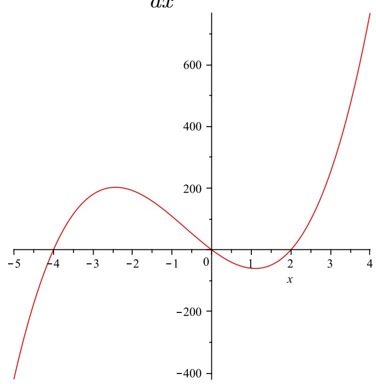
1. Intervalle de croissance : $(-4, 0) \cup (2, \infty)$
2. Intervalle de décroissance : $(\infty, -4) \cup (0, 2)$.

Pour confirmer ce que nous venons de trouver, voici le graphique de la fonction $f(x)$, ainsi que sa dérivée :

Graphique de $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 48x^2 + 5$



Graphique de $\dfrac{df(x)}{dx} = 12x^3 + 24x^2 - 96x$



3.6 Application : Maximum et minimum relatif

On appelle maximum relatif, un point sur un graphique qui est plus élevé que tout les autres points qui se trouve à proximité. De la même manière, on appelle minimum relatif, un point qui est inférieur à tout les autres points qui se trouve à proximité. Lorsqu'une fonction est dérivable, la dérivé de la fonction devra donc obligatoirement être 0 au point ou nous avons un maximum ou minimum relatif. Autrement dit, la tangente doit être horizontale. Remarquez que le contraire n'est pas nécessairement vrai. La dérivé peut être égal à 0 même s'il ne s'agit ni d'un maximum relatif, ni d'un minimum relatif.

Théorème 3.6.1. **(Test de la dérivé première)** Si $f(x)$ est une fonction dérivable dans un intervalle autour d'un point a, alors :

1. a est un maximum relatif si $f'(a) = 0$ et la fonction passe de croissante à décroissante au point a.
2. a est un minimum relatif si $f'(a) = 0$ et la fonction passe de décroissante à croissante au point a.

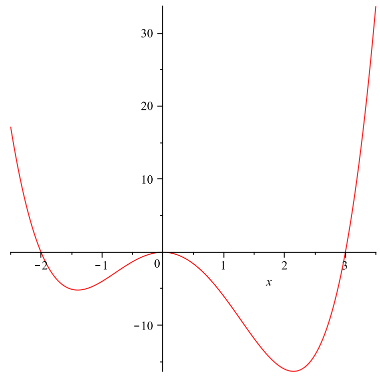
Lorsque la fonction est dérivable, il nous sera donc possible d'identifier les maximums/minimums relatif en trouvant les zéros de la dérivées, puis en étudiant les intervalles de croissances et décroissances de la fonction.

Exemple 3.6.1. On veut trouver les maximums et minimums relatifs de la fonction $f(x) = -x^2 + 8x - 15$. Pour ce faire, commençons par calculer la dérivé de la fonction :

$$\frac{d}{dx}(-x^2 + 8x - 15) = -2x + 8$$

Puis on trouve que le seul zéro de la dérivée est lorsque $x = 4$. Donc la seule valeurs de x où il est possible d'avoir un maximum ou minimum relatif de $f(x)$ est lorsque $x = 4$. Ensuite, remarquons que la dérivée est positive si $x < 4$ et elle est négative si $x > 4$. La fonction passe donc de croissante à décroissante lorsque $x = 4$. On peut donc conclure qu'il y a un maximum relatif lorsque $x = 4$.

Exemple 3.6.2. Le graphique ci-dessous représente la dérivé d'une fonction $f(x)$ inconnu. Utilisez le graphique pour trouver à quel endroit ce trouve les maximums et minimums relatifs de la fonction $f(x)$.



On remarque que la dérivée possède des zéros lorsque $x = -2, x = 0$ et $x = 3$. Lorsque $x = -2$, on remarque que la dérivée passe de positive à négative. On peut donc conclure qu'il s'agit d'un maximum relatif. Lorsque $x = 0$, la dérivée passe de négative à négative, il ne s'agit donc pas d'un maximum ou minimum. Lorsque $x = 3$, la dérivée passe de négative à positive. On peut donc conclure qu'il s'agit d'un minimum relatif. Sans connaitre la fonction $f(x)$, il nous est quand même possible d'avoir une idée de ce à quoi elle ressemble.

Remarquons maintenant un point intéressant. Après avoir trouvé les zéros de la dérivée, nous avons dû regarder les intervalles de croissance et décroissance de la fonction pour déterminer les maximums et minimums de la fonction. En examinant les exemples précédent, on remarque une chose intéressante. Lorsque la fonction a un maximum relatif, la dérivée est décroissante. Lorsque la fonction a un minimum relatif, la dérivée est croissante. Après avoir trouvé les zéros de la dérivée, il est donc possible de vérifier s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum en calculant la dérivé de la dérivé. C'est ce qu'on appelle la dérivé seconde, que l'on dénote par $f''(x)$ ou $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Théorème 3.6.2. **(Test de la dérivé seconde)** Si $f(x)$ est une fonction dérivable deux fois dans un intervalle autour d'un point a, alors :

1. a est un maximum relatif si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$.
2. a est un minimum relatif si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$.

Remarquez que lorsque $f''(a) = 0$, le test ne nous permet pas de conclure.

Exemple 3.6.3. On veut trouver les maximums et minimums relatifs de la fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 2$. On va donc commencer par calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. On a donc :

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 6x - 18$$

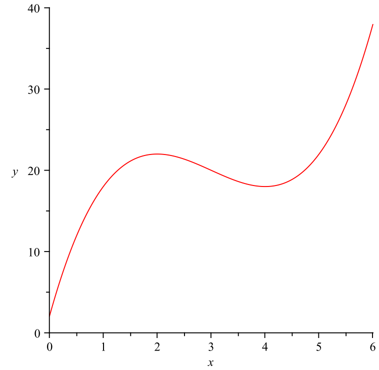
On va maintenant calculer les zéros de la fonction $f'(x)$. On a donc :

$$\frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(3)(24)}}{2(3)} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} = 2 \text{ et } 4$$

Pour trouver s'il s'agit de maximum ou minimum relatif, on utilise maintenant la dérivée seconde. On a donc :

$$f''(2) = -6 < 0 \qquad \text{et } f''(4) = 6 > 0$$

On a donc qu'il y a un maximum relatif à $x = 2$ et un minimum relatif à $x = 4$. Nous pouvons le confirmer à regardant le graphique de la fonction ci-dessous :



3.7 La règle du quotient

Nous avons déjà vu des règles nous permettant de calculer la dérivée des multiples d'une fonction, d'une somme et différence de deux fonctions ainsi que des produits de fonctions. Nous allons maintenant voir une règle nous permettant de calculer la dérivée d'un quotient ce qui va nous permettre entre autre de calculer la dérivée des fonctions rationnelles (c'est à dire le quotient de deux polynôme).

Théorème 3.7.1. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions dérivable, alors la dérivée de leur quotient est donné par :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

Démonstration. Supposons que $f(x)$ est une fonction dérivable. Nous allons essayer de calculer la dérivé de $\frac{1}{f(x)}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x+h)}{hf(x)f(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{f(x)f(x+h)}\lim_{h\to 0}\frac{-(f(x+h) - f(x))}{h} \\
&= \frac{1}{f(x)f(x)}(-f'(x)) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $f(x)$ et $g(x)$ sont toutes deux des fonctions dérivables. En utilisant la règle du produit et le calcul que nous venons de faire, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration. □

Exemple 3.7.1. On veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{x^2+1}{3x-2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x)) &= \frac{(x^2+1)'(3x-2) - (x^2+1)(3x-2)'}{(3x-2)^2} = \frac{2x(3x+1) - (x^2+1)(3)}{(3x-2)^2} \\
&= \frac{6x^2+2x-3x^2-3}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2+2x-3}{(3x-2)^2}
\end{aligned}$$

Exemple 3.7.2. On veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{3x^2+5x+2}{4x^3+5}$. En applicant la règle du quotient, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2+5x+2}{4x^3+5}\right) &= \frac{(6x+5)(4x^3+5)-(12x^2)(3x^2+5x+2)}{(4x^3+5)^2} \\ &= \frac{-12x^4-40x^3-24x^2+30x+25}{(4x^3+5)^2} \end{aligned}$$

La règle du quotient peut aussi nous permettre d'obtenir un autre résultat particulièrement utile, qui n'est en fait qu'un extension d'un résultat que nous avons déjà obtenu dans le cas des entiers positifs.

Théorème 3.7.2. Si n est un entier, alors :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Démonstration. Supposons que k est un entier positif, on veut calculer la dérivée suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-k}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^k}\right) = \frac{(1)'x^k-(x^k)'(1)}{(x^k)^2} = \frac{-kx^{k-1}}{x^{2k}} = \frac{-k}{x^{2k-(k-1)}} = \frac{-k}{x^{k+1}} = -kx^{-k-1}$$

Ce qui signifie que la même règle s'applique dans le cas des exposants qui sont des entiers positifs ou négatifs. □

Exemple 3.7.3. On veut calculer la dérivé de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. Plutôt que d'utiliser la règle du quotient, on peut tout simplement remarquer que $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$, ce qui nous permet d'écrire directement :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right) = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

3.8 Dérivation des fonctions composés

Les règles que nous avons vu jusqu'à présent peuvent nous permettre de calculer la dérivée de plusieurs fonctions. Par contre une difficulté importante se pose. Comment faire pour calculer la dérivé de la fonction $f(x) = (x+1)^4$? Rien de très compliqué :

$$\frac{d}{dx}(x+1)^4 = \frac{d}{dx}(x^4+4x^3+6x^2+4x+1) = 4x^3+12x^2+12x+4$$

Par contre, que feriez-vous si on vous aurait demandé de calculer la dérivé de la fonction $f(x) = (x+1)^{10}$? ou bien celle de $f(x) = (x+1)^{100}$? Le même procédé fonctionnerait bien sur, il s'agirait de développer le produit. Par contre cette méthode peut devenir extrêmement longue et pénible. Nous avons donc besoin d'une règle supplémentaire, qui nous sera aussi fort utile plus tard lorsque nous étudierons des fonctions plus compliqué.

Théorème 3.8.1. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions, alors :

$$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = g'(x)f'(g(x))$$

Si on pose $y = g(x)$, on peut alors réécrire l'équation sous la forme :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Exemple 3.8.1. On veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = (x+1)^{100}$. Pour ce faire, posons $g(x) = x^{100}$ et $h(x) = x+1$. On obtient donc que $f(x) = g(h(x))$. En applicant le théorème, on obtient :

$$\frac{df(x)}{dx} = (x+1)' \cdot 100(x+1)^{99} = 100(x+1)^{99}$$

Une autre manière de regarder le problème aurait été de poser $y = x+1$, ce qui nous permet d'écrire $f(x) = y^{100}$. Dans ce cas on obtient :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (y^{100})'(x+1)' = 100y^{99} = 100(x+1)^{99}$$

Exemple 3.8.2. On veut calculer la dérivé de la fonction $f(x) = (4x+2)^{10}(5x-3)^7$. On remarque donc qu'il s'agit d'un produit. On va donc commencer par calculer la dérivée de chacun des deux membres du produit, puis nous allons utiliser la règle du produit.

$$\frac{d}{dx}\left((4x+2)^{10}\right) = 40(4x+2)^9$$

$$\frac{d}{dx}\left((5x-3)^{7}\right) = 35(5x-3)^6$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\frac{df(x)}{dx} = 40(4x+2)^9(5x-3)^7 + 35(5x-3)^6(4x+2)^{10}$$

3.9 Dérivation des fonctions inverses

Jusqu'à présent, nous avons vu comment calculer la dérivée de n'importe quelle fonction rationnelle. Dans cette section, nous allons étendre nos connaissances à l'études des fonctions algébrique, c'est à dire des fonctions rationnelles contenant possiblement des racines. La question revient donc à se demander comment faire pour calculer la dérivée de fonction telle que $f(x) = \sqrt{x}$. Pour ce faire, l'idée est relativement simple. Si on pose $y = \sqrt{x}$, alors on a $x = y^2$. Donc plutôt que de calculer $\frac{dy}{dx}$, on va plutôt calculer $\frac{dx}{dy}$, qui est relativement facile. Le problème est comment faire pour passer de $\frac{dx}{dy}$ à $\frac{dy}{dx}$?

Théorème 3.9.1. Si $f(x)$ est une fonction inversible, alors en posant $y = f(x)$ on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

En utilisant ce théorème, nous pouvons maintenant calculer la dérivé de $f(x) = \sqrt{x}$. En effet, si $y = \sqrt{x}$, alors $x = y^2$. On a donc :

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nous pouvons maintenant utiliser ce théorème pour calculer la dérivée d'une fonction $f(x) = x^w$, où w est n'importe quel nombre réel.

Théorème 3.9.2. Si w est un nombre réel quelconque, alors :

$$\frac{d}{dx}(x^w) = wx^{w-1}$$

Démonstration. Supposons que k est un entier positif, nous voulons pour commencer calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{1/k}$. Pour ce faire, nous allons remplacer le $f(x)$ par y, ce qui nous donne $x = y^k$. On a donc :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}y^k = ky^{k-1}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{ky^{k-1}} = \frac{1}{k(x^{1/k})^{k-1}} = \frac{1}{kx^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1}{kx^{1-\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$$

Pour terminé, nous allons regarder ce qui se passe dans le cas des exposants fractionnaires. Supposons que p et q sont des entiers, et $q \neq 0$, alors on a :

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{d}{dx}(x^p)^{1/q} = (x^p)'\frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} = px^{p-1}\frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{p-1+\frac{p}{q}-p} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

Donc la règle fonctionne pour n'importe quel exposant rationnel. Pour passer au nombre réel, il s'agit maintenant d'utiliser un processus de limite que nous ne ferons pas ici. □

Exemple 3.9.1. On veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x^2+5}}$. On peut réécrire cette fonction sous la forme :

$$f(x) = (4x^2+5)^{-1/3}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{df(x)}{dx} = 8x\frac{-1}{3}(4x^2+5)^{-4/3} = \frac{-8x}{3\sqrt[3]{(4x^2+5)^4}}$$

3.10 Dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques

Nous sommes maintenant intéressé à trouver la dérivé des fonctions de la forme $f(x) = a^x$ où a est une constante, mais avant, faisons on petit rappel des lois des exposants :

Théorème 3.10.1. Si a, m, n sont des entiers, alors on a les propriétés suivantes :

1. $a^0 = 1$ si $a \neq 0$
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$
3. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ si $n > 0$
4. $a^m a^n = a^{m+n}$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$

Nous allons donc maintenant essayer de calculer la dérivée de la fonction $f(x) = a^x$. Pour ce faire, commençons par essayer d'utiliser directement la définition de la dérivée à l'aide de la limite.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \left(\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \right)$$

Le problème étant que nous ne savons pas calculer la limite de droite. Pour pouvoir résoudre le problème, nous aurons donc besoin d'une petite astuce. Nous allons devoir utiliser la constante fondamentale e. Commençons donc par la définir :

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

À l'aide d'une calculatrice, en posant différente valeur de n de plus en plus grande, nous pouvons relativement facilement nous convaincre que la limite de droite doit exister, et en calculer une valeur approximative. Voici une table de valeurs montrant des approximations de la valeur de e :

n	10	100	1000	10000
Appoximation	2,593742460	2,704813829	2,716923932	2,718145927

En continuant de la même manière pour des valeurs de n de plus en plus grande, on trouvera finalement que :

$$e \approx 2.718281828$$

Il s'agit d'une constante fondamentale qui joue un rôle particulièrement important en mathématiques, en particulier dans le calcul différentiel et intégral. Nous allons maintenant essayer de réécrire la limite ci-dessus sous une forme différente. En remplaçant le n par $\frac{1}{h}$, on obtient :

$$e = \lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h}$$

Maintenant, pour pouvoir aller un peu plus loin, et éventuellement trouver la dérivé de la fonction $f(x) = a^x$, nous allons avoir besoin des logarithme. On a donc l'équivalence suivante (il s'agit de la définition du logarithme) :

$$x^y = z \Longrightarrow \log_x(z) = y$$

Ce qui nous permet d'en déduire la propriété suivante :

$$\log_x(z^w) = y \Longrightarrow x^y = z^w \Longrightarrow \sqrt[w]{x^y} = z \Longrightarrow x^{y/w} = z \Longrightarrow \log_x(z) = \frac{y}{w} \Longrightarrow w\log_x(z) = y$$

et donc :

$$\log_x(z^w) = w\log_x(z)$$

De plus, lorsque la base du logarithme est le nombre e que nous venons de définir, nous écrirons $\ln(x)$ plutôt que $\log_e(x)$. Il s'agit du logarithme naturel.

Nous avons la limite : $e = \lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h}$. Donc si $h \to 0$, nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{rcl}
e & = & (1+h)^{1/h} \\
\ln(e) & = & \frac{1}{h}\ln(1+h) \\
1 & = & \frac{1}{h}\ln(1+h) \\
h & = & \ln(1+h) \\
e^h & = & 1+h \\
e^h - 1 & = & h \\
\frac{e^h - 1}{h} & = & 1
\end{array}$$

Ce qui nous donne :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=1$$

Remarquez que cette limite est exactement la limite qui nous créait problème dans le cas où $a=e$. Nous allons maintenant pouvoir dériver la fonction $f(x)=e^x$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

À partir de cette dernière, nous allons maintenant pouvoir résoudre notre problème de départ, c'est à dire comment trouver la dérivée de la fonction $f(x)=a^x$. Notez que $a^x=e^{\ln(a^x)}=e^{x\ln a}$. On a donc :

$$f'(x)=\left(e^{x\ln(a)}\right)'=e^{x\ln(a)}(x\ln(a))'=e^{x\ln(a)}\ln(a)=e^{\ln(a^x)}\ln(a)=a^x\ln(a)$$

Nous allons maintenant nous intéressé à trouver la dérivée de l'inverse des fonctions exponentielles, c'est à dire les fonctions logarithmiques. Mais avons, énonçons un théorème résumant certaines propriétés importantes des logarithmes. Dans tous les cas, ce sont des conséquences des lois sur les exposants.

Théorème 3.10.2. Si a, b, c sont des entiers supérieur à 0, alors on a les propriétés suivantes :

1. $\log_c(1)=0$
2. $\log_c(c)=1$
3. $\log_c(ab)=\log_c(a)+\log_c(b)$
4. $\log_c\left(\frac{a}{b}\right)=\log_c(a)-\log_c(b)$
5. $\log_c(a^b)=b\log_c(a)$
6. $\log_b(a)=\frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}=\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ si $b\neq 1$
7. $\log_c(c^a)=a$
8. $c^{\log_c(a)}=a$

De plus, en prenant $c=e$ on peut réécrire toutes les lois ci-dessus en remplaçant $\log_c$ par ln.

Nous voulons donc trouver la dérivé de la fonction $f(x)=\log_a(x)$. pour ce faire, nous allons simplifier l'écriture et écrire y à la place de $f(x)$. On a donc :

$$y=\log_a(x)\Longrightarrow x=a^y$$

en calculant la dérivé de l'équation de droite, on obtient donc :

$$\frac{dx}{dy}=a^y\ln(a)$$

Ce qui nous donne finalement :

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\frac{1}{a^y\ln(a)}=\frac{1}{x\ln(a)}$$

En particulier, si $a=e$, nous obtenons :

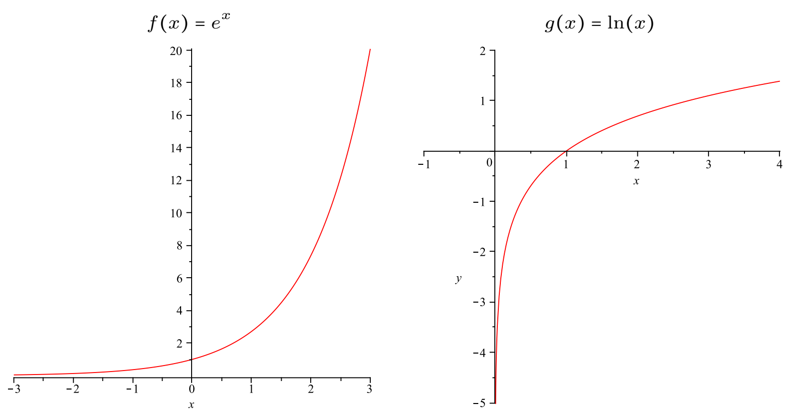
$$\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x\ln(e)}=\frac{1}{x}$$

On peut donc résumer les nouvelles formules de dérivation que nous venons de voir dans l'encadrer ci-dessous :

Théorème 3.10.3. Nous avons les formules de dérivation suivante :

1. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln(a)$
2. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
3. $\dfrac{d}{dx}\log_a(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$
4. $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$

Avant de regarder des exemples de calcul de la dérivée et de conclure cette section, rappelons d'abord à quoi ressemble le graphique des fonctions élémentaires $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$ que vous devriez déjà connaître.



Nous allons maintenant regarder quelques exemples :

Exemple 3.10.1. On veut calculer les dérivées suivantes :

1. $\dfrac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln(2)$

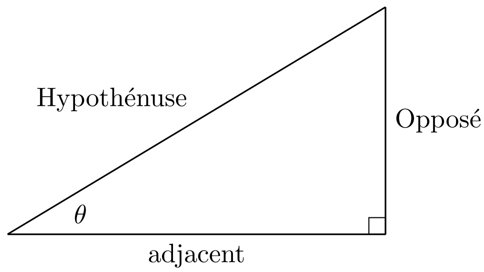
2. $\dfrac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$

3. $\dfrac{d}{dx}(\ln(8x+2)) = \dfrac{8}{8x+2}$

4. $\dfrac{d}{dx}(\ln(5x^2+e^{3x})) = \dfrac{10x+3e^{3x}}{5x^2+e^{3x}}$

3.11 Dérivation des fonctions trigonométriques

Dans cette section, nous voulons trouver la dérivé des 6 fonctions trigonométriques, mais avant nous allons faire un petit rappel des fonctions trigonométriques. Considérons un triangle rectangle, comme ci-dessous :



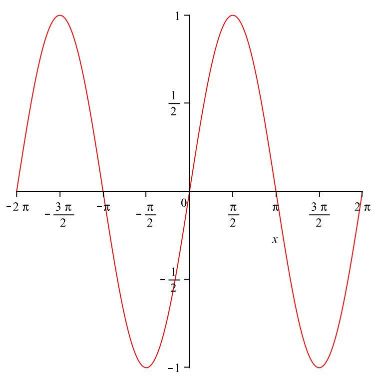
Alors on définit les 6 fonctions trigonométriques comme suit :

$$\sin(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypothénuse}} \qquad \csc(\theta) = \frac{\text{Hypothénuse}}{\text{Opposé}} = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

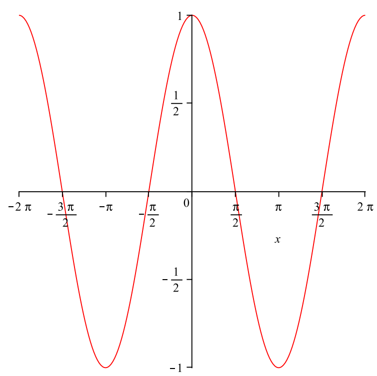
$$\cos(\theta) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypothénuse}} \qquad \sec(\theta) = \frac{\text{Hypothénuse}}{\text{Adjacent}} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \cot(\theta) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Opposé}} = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

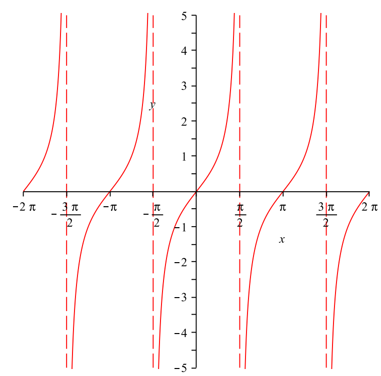
On obtient donc les graphiques suivant pour les fonctions sinus, cosinus et tangente que vous devriez déjà connaitre par coeur :



$\sin(\theta)$



$\cos(\theta)$

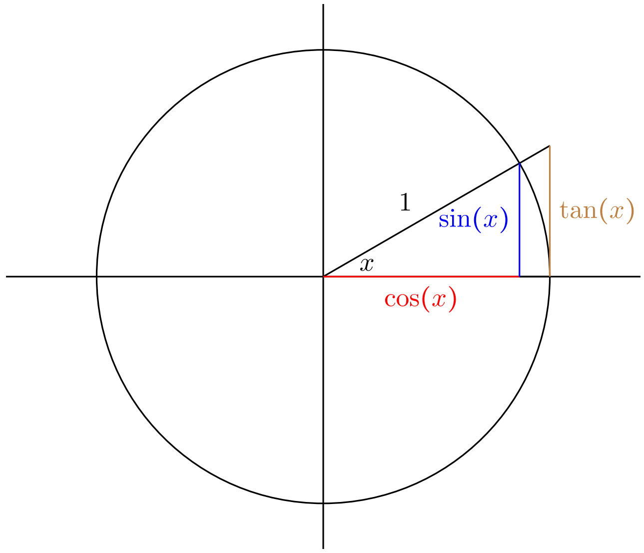


$\tan(\theta)$

À partir de ces graphique, vous devriez être en mesure de faire le graphique des 3 autres fonctions trigonométriques. Remarquez que dans des cours de calcul, il est essentiel de mesurer vos angles en radian, autrement les calculs de dérivés que nous allons faire ne fonctionneront pas. Si x est un angle en degré, on peut le convertir en radian à partir de la formule $\dfrac{x\pi}{180}$. Il y a quelques valeurs remarquable du cercle trigonométrique que nous allons fréquemment utiliser que vous devriez par coeur. Le tableau suivant résume ces valeurs :

Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

À partir de ce tableau, il est maintenant simple de calculer les valeurs correspondantes pour les trois autres fonctions trigonométriques. Nous somme maintenant prêt à commencer le calcul de la dérivée de ces six fonctions. Pour ce faire, nous allons commencer par la fonction $f(x) = \sin(x)$. Pour pouvoir calculer la dérivé, nous aurons besoin du schéma ci-dessous :



Remarquez que le schéma nous permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Puis en divisant le tout par $\sin(x)$:

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

on inverse ensuite les fractions, ce qui nous donne :

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

puis finalement on calcul la limite :

$$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \geq \lim_{x\to 0} \cos(x)$$

Comme les limites de gauche et de droite sont toutes deux égale à 1, on peut donc conclure que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

À partir de cette dernière limite, nous pouvons en calculer une autre qui nous seras aussi très utile :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} \cdot \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Maintenant, pour pouvoir calculer la dérivée de la fonction sinus, on doit se rappeler l'identité trigonométrique suivante :

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{d\sin(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)(\cos(h)-1)+\cos(x)\sin(h)}{h}\\
&= \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Il est maintenant relativement facile de calculer la dérivée des autres fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos(x)) &= \frac{d}{dx}\sqrt{1-\sin^2(x)} = \frac{d}{dx}(1-\sin^2(x))^{1/2} = \frac{1}{2}(1-\sin^2(x))^{-1/2}(1-\sin^2(x))'\\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2(x)}}(-2\sin(x)\cos(x)) = \frac{-\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)} = -\sin(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan(x)) &= \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)
\end{aligned}$$

À partir de ces formules, il est maintenant relativement simple de calculer la dérivée des autres fonctions trigonométrique. Vous devriez le faire en exercices. Le théorème ci-dessous résume la dérivée des 6 fonctions trigonométriques.

Théorème 3.11.1. Voici la dérivée des 6 fonctions trigonométriques :

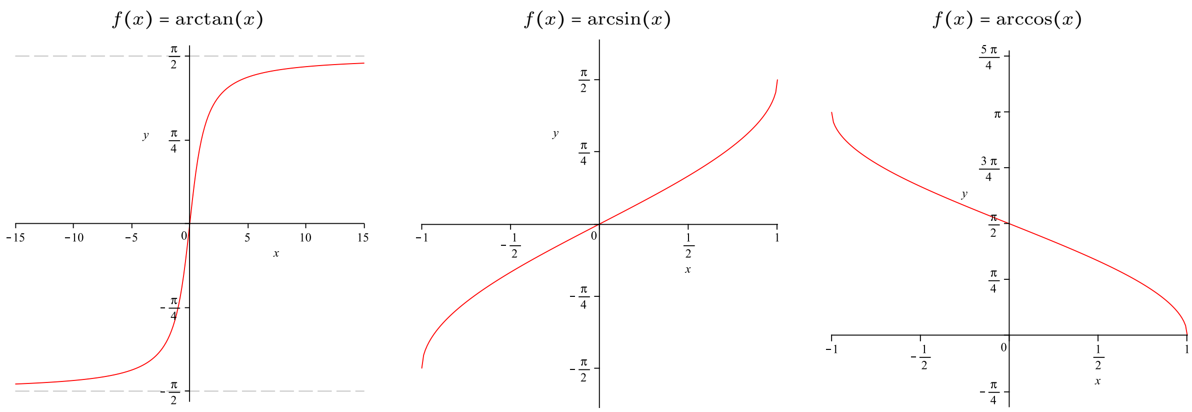
1. $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$
2. $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$
3. $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$
4. $\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\tan(x)$
5. $\frac{d}{dx}(\csc(x)) = -\csc(x)\cot(x)$
6. $\frac{d}{dx}(\cot(x)) = -\csc^2(x)$

Exemple 3.11.1. On veut calculer les dérivées suivantes :

1. $\frac{d}{dx}(\sin(e^x+x^2)) = (e^x+2x)\cos(e^x+x^2)$
2. $\frac{d}{dx}(x^2\tan(x)) = 2x\tan(x)+x^2\sec^2(x)$

3.12 Dérivation des fonctions trigonométriques inverses

Nous somme maintenant rendu à l'étude des fonctions trigonométriques inverses. L'idée est la suivante, supposons que $\tan(x) = 1$, comment faire pour retrouver la valeur de x ? Il faudra donc considérer l'inverse de la fonction tangente. Si $f(x) = \tan(x)$, alors on définira son inverse comme étant $f^{-1}(x) = \arctan(x)$. Donc pour trouver la valeur de x qui satisfait $\tan(x) = 1$, on devra donc calculer $x = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. La même idée s'applique aux autres fonctions trigonométriques. On aura donc les fonctions $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\text{arcsec}(x)$, $\text{arccsc}(x)$ et $\text{arccot}(x)$. Faites attention au domaine de ces fonctions. Par exemple, comme la fonction $\sin(x)$ prend seulement des valeurs entre -1 et 1, le domaine de la fonction $\arcsin(x)$ sera donc $[-1, 1]$. Voici le graphique des fonctions $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$ et $\arccos(x)$. Le plus important ici est le premier, que vous devriez d'ailleurs connaitre par coeur.



Remarquez que la fonction $\arctan(x)$ possède deux asymptotes horizontales. En effet, nous avons :

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = \frac{-\pi}{2} \qquad \text{et} \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Ceci étant une conséquence que la fonction $\tan(x)$ possède des asymptotes verticals à $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$. Par contre, bien qu'il puisse sembler le contraire, les fonctions $\arcsin(x)$ et $\arccos(x)$ n'ont pas s'asymptotes verticals. Comparer leur graphiques avec celui des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour vous en convaincre. Finalement, notez que les fonctions $\arctan(x)$, $\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ n'apparaisse pas sur vos calculatrices. Vous trouverez à la place les fonctions $\tan^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$ et $\sin^{-1}(x)$. Il s'agit tout simplement de la notation anglaise pour dénoter ces mêmes fonctions. Faites cependant attention à ne pas confondre les notations :

$$\sin^n(x) = [\sin(x)]^n, \text{ si } n \geq 1 \qquad \text{et } \sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

La notation peut donc porter à confusion. Notez que $(\sin(x))^{-1} = \csc(x)$ et $\arcsin(x)$ sont deux fonctions complètement différente. La même remarques s'applique aussi aux autres fonctions trigonométriques.

On veut maintenant calculer la dérivée des fonctions trigonométrique inverse. Commençons par la fonction $f(x) = \arctan(x)$. Pour ce faire, nous allons écrire y à la place de $f(x)$ pour simplifier l'écriture.

$$y = \arctan(x) \Longleftrightarrow x = \tan(y)$$

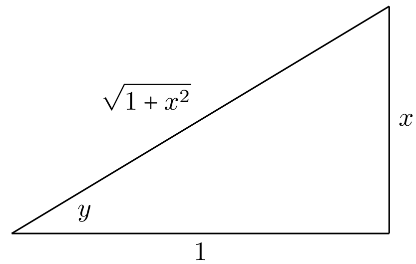
On peut donc utiliser la règle de dérivation des fonctions inverses :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\tan(y) = \sec^2(y)$$

ce qui nous donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}$$

Le problème étant maintenant que nous devons simplifier la partie de droite. Pour ce faire, nous allons utiliser un triangle rectangle, en plaçant des valeurs correspondant à $y = \tan(x)$:



À partir du triangle, nous pouvons donc obtenir que :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2(y)} = \cos^2(y) = \frac{1}{1+x^2}$$

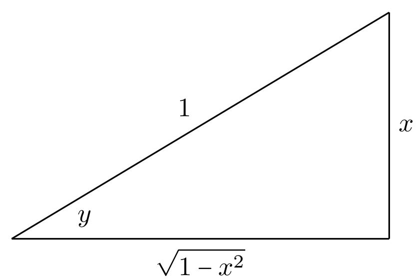
La même procédure fonctionne aussi pour les autres fonctions trigonométriques inverses. Nous allons faire le calcul pour $f(x) = \arcsin(x)$, en prenant à nouveau $y = f(x)$, on obtient $x = \sin(y)$, ce qui nous donne :

$$\frac{dx}{dy}\frac{d}{dy}(\sin(y)) = \cos(y)$$

Et donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Nous allons donc à nouveau utiliser un triangle, mais cette fois pour illustrer $x = \sin(y)$:



Ce qui nous permet de compléter notre calcul. On a donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Voici un théorème résumant la dérivée des six fonctions trigonométriques inverses :

Théorème 3.12.1. La dérivée des fonctions trigonométriques inverses est donnée par :

1. $\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$
2. $\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\frac{d}{dx}(\text{arcsec}(x)) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
5. $\frac{d}{dx}(\text{arccsc}(x)) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
6. $\frac{d}{dx}(\text{arccot}(x)) = \frac{-1}{1+x^2}$

Exemple 3.12.1. On veut calculer les dérivées suivantes :

1. $\frac{d}{dx}(\arctan(x^2)) = \frac{2x}{1+x^4}$
2. $\frac{d}{dx}(x^2 \arccos(x)) = 2x \arccos(x) - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

3.13 L'antidérivée

Nous allons maintenant conclure le chapitre avec le problème inverse de trouver la dérivée. Supposons que $f'(x) = x^2 + 4x + 5$, pouvez-vous trouver quelle était la fonction $f(x)$? En fait cette fonction $f(x)$ n'est pas unique, alors la question devrait plutôt être quelle est l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ possible ? Ce processus s'appelle l'antidérivée, aussi appellé intégrale indéfinie. L'antidérivée nous sera particulièrement utile à la fin du cours pour calculer entre autre des aires, et est le sujet principal du 2e cours de calcul.

Definition 3.13.1. Si $f(x)$ est une fonction, alors on définit $\int f(x)dx$ comme étant toute les fonctions $F(x)$ pour lesquels $F'(x) = f(x)$.

Théorème 3.13.1. Si $F(x)$ est une fonction pour laquelle $F'(x) = f(x)$. Alors $\int f(x)dx = F(x) + C$, où C est une constante.

Exemple 3.13.1. Sachant que $(x\sin(x))' = \sin(x) + x\cos(x)$, on souhaite calculer

$$\int (\sin(x) + x\cos(x))dx$$

Pour ce faire, en applicant le théorème nous avons :

$$\int (\sin(x) + x\cos(x))dx = x\sin(x) + C$$

Toutes les formules que nous avons vu jusqu'à présent pour calculer la dérivée d'une fonction peuvent donc maintenant être réécrite un terme d'intégrale. Par exemple, sachant que $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, nous pouvons maintenant écrire la formule d'intégration suivante :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Exemple 3.13.2. Calculer chacune des antidérivées suivantes :

$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

$\int (5x^4 - 3x^2 + 1) = x^5 - x^3 + x + C$

$\int (\cos(x) + 2)dx = \sin(x) + 2x + C$

$\int (x\sin(x^2))dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$

$\int \frac{2}{1+x^2}dx = 2\arctan(x) + C$

$\int \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x| + C$

Remarque : Pouvez-vous expliquer la présence des valeurs absolues dans le dernier exemple ci-dessus ? Pour pouvoir l'expliquer, calculer la dérivée de la fonction de droite en regardant ce qui ce passe pour des valeurs de x supérieur à -1, et pour des valeurs de x inférieurs à -1. Est-ce que la formule a du sens lorsque $x = -1$? Comme -1 ne fait pas partie du domaine de la fonction de gauche, ni de celle de droite, nous n'avons pas pris la peine d'indiquer que $x \neq -1$.

Chapitre 4

Analyse de fonctions

4.1 Introduction

Nous avons vu jusqu'à présent comment trouver les asymptotes horizontal et vertical d'une fonction en utilisant la limite (voir chapitre 2), et nous avons vu comment utiliser la dérivée pour identifier les maximums et minimum d'une fonction ainsi que ses intervalles de croissance et de décroissance (voir chapitre 3). Dans ce chapitre nous allons réutiliser tout ces outils, et étendre un peu nos connaissance pour nous permettre de dessiner approximativement la plupart des fonctions.

L'analyse d'une fonction consiste à trouver les propriétés suivantes :

1. Le domaine de la fonction
2. Les zéros de la fonction
3. La valeur initiale (ou ordonné à l'origine)
4. Les maximums et minimums
5. Les intervalles de croissance et de décroissance
6. Les points d'inflection
7. La concavité
8. Les asymptotes horizontales
9. Les asymptotes verticales

Nous avons déjà vu comment étudier la plupart de ces propriétés. Il ne nous reste plus qu'à étudier les points d'inflections et la concavité de la fonction. Nous allons aussi revenir sur certaine des autres propriétés, tel que les zéros et les asymptotes pour améliorer nos capacités à les calculer.

4.2 Les zéros et le théorèmes de la valeur intermédiaire

Dans cette section, nous allons commencer par regarder quelques exemple de calcul des zéros d'une fonction. Nous allons ensuite réaliser que dans certain cas, le calcul exacte des zéros est pratiquement impossible, ce qui va nous permettre d'introduire le théorème de la valeur intermédiaire. Ce dernier nous permet de montrer l'existence d'un zéro, même si nous ne sommes pas capable de le calculer exactement.

Exemple 4.2.1. On veut trouver les zéros de la fonction $f(x) = e^{(x^2-1)} - 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} e^{(x^2-1)} - 1 &= 0 \\ e^{(x^2-1)} &= 1 \\ \ln(e^{(x^2-1)}) &= \ln(1) \\ x^2 - 1 &= 0 \\ (x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

On a donc que $\text{Zéros}(f) = \{-1, 1\}$.

Exemple 4.2.2. On veut trouver les zéros de la fonction $f(x) = (x^2 - 36)\ln(7x - 34)$. Pour répondre à la question, commençons par trouver le domaine de la fonction. Comme nous avons un logarithme, nous allons donc devoir exclure du domaine les valeurs de x pour lesquels $7x - 34 \leq 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} 7x - 34 &\leq 0 \\ 7x &\leq 34 \\ x &\leq \frac{34}{7} \end{aligned}$$

On obtient donc : $\text{Dom}(f) = \left(\frac{34}{7}, \infty\right)$. Nous allons maintenant chercher les zéros. Comme il s'agit d'un produit, nous devons vérifier quand l'un ou l'autre des facteurs sont égal à zéro. Pour le premier facteur on a :

$$(x^2 - 36) = (x - 6)(x + 6) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 6$$

On remarque cependant que -6 ne fait pas parti du domaine de la fonction, donc pour le premier facteur on obtient seulement $x = 6$ comme zéro. Nous allons maintenant regarder pour le second facteur :

$$\begin{aligned} \ln(7x - 34) &= 0 \\ 7x - 34 &= e^0 \\ 7x - 34 &= 1 \\ 7x &= 35 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

On peut donc conclure que la fonction possède exactement deux zéros :

$$\text{Zéros}(f) = \{5, 6\}$$

Exemple 4.2.3. On veut trouver les zéros de la fonction $f(x) = \sin(2x + 1)$. Comme les zéros de la fonction $\sin(x)$ se trouve lorsque $x = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \sin(2x + 1) &= 0 \\ 2x + 1 &= k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ 2x &= k\pi - 1, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{k\pi - 1}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc pour chaque valeur de k entière, on obtient un zéro de la fonction $f(x)$, ce qui nous donne :

$$\text{Zéros}(f) = \left\{\frac{k\pi - 1}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 4.2.4. On veut trouver les zéros de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{\ln(-x + 5)}$. Nous allons commencer par trouver le domaine de la fonction. Comme nous avons un logarithme, on doit enlever du domaine de la fonction toutes les valeurs de x pour lesquels $-x + 5 \leq 0$, ce qui est équivalent en retirer du domaine toutes les valeurs de $x \geq 5$. Comme nous avons aussi une division, nous devons enlever du domaine les valeurs de x pour lesquels nous avons une division par zéro. On a donc :

$$\ln(-x + 5) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -x + 5 = e^0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4$$

On obtient donc :

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, 4) \cup (4, 5)$$

Nous allons maintenant chercher les zéros. Comme il s'agit d'un quotient, il suffit de trouver les zéros du numérateur. On a donc :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2 \text{ et } x = 3$$

Comme c'est deux valeurs font partie du domaine de la fonction, on obtient donc finalement :

$$\text{Zéros}(f) = \{2, 3\}$$

Exemple 4.2.5. On veut trouver les zéros de la fonction $f(x) = x^3 - 8x^2 - 204x + 432$. Comme il n'est vraiment pas évident de factoriser directement un polynôme de degré 3, nous allons commencer par essayer quelques valeurs de x en espérant trouver un premier zéro.

x	$f(x)$
0	432
1	221
2	0

Nous avons donc trouver (un peu par chance) un premier zéro de la fonction (i.e. $x = 2$). Nous savons donc que le polynôme peut être diviser par $x - 2$. En effectuant la division, on obtient donc :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 - 204x + 432 & x - 2 \\ \hline -x^3 + 2x^2 & x^2 - 6x - 216 \\ -6x^2 - 204x & \\ 6x^2 - 12x & \\ -216x + 432 & \\ 216x - 432 & \\ 0 & \end{array}$$

On obtient donc que la fonction peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 6x - 216)$$

Comme nous obtenons maintenant un facteur du second degré, ce dernier peut facilement être factorisé en utilisant la formule quadratique. On obtient donc finalement :

$$f(x) = (x - 2)(x + 12)(x - 18)$$

Ce qui nous donne pour les zéros de la fonction :

$$\text{Zéros}(f) = \{-12, 2, 18\}$$

Il est vrai que nous avons eu beaucoup de chance dans l'exemple précédent, et bien que cette méthode nous soit souvent utile, ce n'est absolument pas une méthode efficace à tout coup. Par exemple, si nous voulons trouvez les zéros de la fonction $f(x) = 30x^3 - 109x^2 + 103x - 28$, même en essayant plusieurs valeurs de x, il est peu probable que vous tombiez sur l'un des zéros. Nous n'avons donc aucune idée comment factoriser ce polynôme. Nous aurons donc besoin du théorème de la valeur intermédiaire qui nous permettra de montrer l'existence d'un zéro, même s'il nous est impossible de le calculer exactement.

Théorème 4.2.1. **(Théorème de la valeur intermédiaire)** Supposons que $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et $L \in \mathbb{R}$. Si $f(a) - L$ et $f(b) - L$ sont de signe contraire (c'est à dire l'un est positif et l'autre est négatif), alors nous pouvons affirmer qu'il existe au moins une valeur $c \in (a, b)$ tel que $f(c) = L$. En particulier, si on choisit L comme étant zéro, cela peut nous permettre de démontrer l'existence d'au moins un zéro dans l'intervalle (a, b).

Exemple 4.2.6. Nous allons donc essayer d'utiliser le théorème pour démontrer l'existence d'un zéro pour la fonction $f(x) = 30x^3 - 109x^2 + 103x - 28$. En complétant une table de valeur, on obtient :

x	$f(x)$
0	-28
1	-4
2	-18
3	110
4	560

On remarque donc que la fonction change de signe entre $x = 2$ et $x = 3$. Comme la fonction est continue partout (car il s'agit d'un polynôme), par le théorème de la valeur intermédiaire on peut donc conclure qu'il existe au moins un zéro pour la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(2,3)$. Le théorème ne nous permet cependant pas de savoir exactement à quel endroit ce trouve ce zéro.

Le problème avec l'exemple précédent est que bien que nous ayons démontré l'existence d'un zéro, rien ne nous garantie qu'il s'agit du seul. Nous allons maintenant regarder un autre théorème qui va nous permettre de démontrer qu'il y a exactement un zéro dans un intervalle.

Théorème 4.2.2. **(Unicité d'un zéro)** Supposons que $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle (a,b), et que $f'(x)$ est soit toujours positive ou toujours négative dans l'intervalle (a,b), alors il existe exactement un nombre $c \in (a,b)$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple 4.2.7. Nous allons maintenant reprendre l'exemple précédent avec la fonction $f(x) = 30x^3 - 109x^2 + 103x - 28$ et démontrer qu'il y a exactement un zéro dans l'intervalle $(2,3)$. Comme nous avons déjà démontré qu'il y a au moins un zéro, il ne nous reste plus qu'à démontrer qu'il n'y en a pas d'autre. Pour ce faire, trouvons les zéros de la dérivée :

$$f'(x) = 90x^2 - 218x + 103 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{218 \pm \sqrt{10444}}{2(90)}$$

Les zéros sont donc approximativement $1,78$ et $0,64$. En étudiant le signe de la dérivé (on peut faire un tableau de signe par exemple), on remarque que la dérivé est toujours positive dans l'intervalle $(2,3)$. On peut donc conclure que la fonction est toujours croissante dans l'intervalle $(2,3)$, ce qui signifit qu'il ne peut pas y avoir plus que un zéro. La fonction $f(x)$ a donc exactement un zéro dans l'intervalle $(2,3)$.

4.3 Asymptote et la règle de l'Hospital

Nous avons vu au chapitre 2 que la limite peut nous permettre de trouver les asymptotes horizontales et verticales d'une fonction. La problème est que la limite est souvent difficiles à calculer. Nous allons donc voir dans cette section, deux méthodes pouvant nous simplifier le calcul des limites.

Théorème 4.3.1. **(Théorème sandwich)** Supposons que $f(x), g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions tel que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur un intervalle (b,c). Si $a \in (b,c)$ et

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

Alors on peut conclure que

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

Ce théorème fonctionne aussi lorsque $a = \pm\infty$ à condition de remplacer l'intervalle (b,c) par un intervalle de la forme $(-\infty, c)$ ou (b,∞) selon le cas.

Exemple 4.3.1. On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

Comme la fonction $\sin(x)$ est toujours comprise entre -1 et 1, on a donc :

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

De plus, comme :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

On peut donc conclure que :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

Exemple 4.3.2. On veut calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour ce faire, remarquons que :

$$-x^2 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

De plus, nous avons que

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

On peut donc conclure par le théorème sandwich que :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Nous allons maintenant voir que la dérivée peut nous servir à calculer la limite d'une fonction dans le cas des formes indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$ et $\frac{\pm\infty}{\infty}$.

Théorème 4.3.2. **(Règle de l'Hospital)** Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions dérivable dans un intervalle contenant un point $a \in \mathbb{R}$ et que la limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, alors on a :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

De plus, le théorème fonctionne même si $a = \pm\infty$ et la fonction est dérivable sur un intervalle de la forme (b, ∞) pour $b \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.3.3. On veut calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$. Comme cette limite est de la forme $\frac{0}{0}$, nous pouvons appliquer la règle de l'Hospital. On a donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Exemple 4.3.4. On veut calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + x^2}{x}$. Comme cette limite est de la forme $\frac{0}{0}$, nous pouvons appliquer la règle de l'Hospital, ce qui nous donne :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) + 2x}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Exemple 4.3.5. On veut calculer la limite $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 3x + 1}{x^2 + 6x - 5}$. Comme cette limite est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, nous pouvons appliquer la règle de l'Hospital, ce qui nous donne :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 3x + 1}{x^2 + 6x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{10x + 3}{2x + 6}$$

Comme cette limite est encore une fois de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, nous pouvons appliquer encore une fois la règle de l'Hospital, ce qui nous donne finalement :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x+1}{x^2+6x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{10x+3}{2x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{10}{2} = 5$$

Par contre, même si la règle de l'Hospital peut sembler magique, elle ne nous permet pas de calculer n'importe quel limite. Il est donc nécessaire d'avoir une bonne connaissance des fonctions élémentaires pour pouvoir résoudre certain problème. Par exemple, les limites ci-dessous sont particulièrement facile si vous savez à quoi ressemble le graphique de ces fonctions.

Exemple 4.3.6. On veut calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$
2. $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Nous somme maintenant prêt à trouver les asymptotes horizontal et vertical de fonction plus compliqué que celle du chapitre 2.

Exemple 4.3.7. On veut trouver les asymptotes verticales de la fonction

$$f(x) = \frac{e^x - x - 1}{xe^x - x}$$

Pour ce faire, commençons par trouver le domaine de la fonction. Nous devons donc vérifier pour quelles valeurs de x il y a une division par zéro.

$$xe^x - x = x(e^x - 1) = 0$$

Donc le domaine de la fonction est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. On va donc vérifier s'il s'agit d'un asymptote vertical :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{xe^x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

Il n'y a donc pas d'asymptotes verticales.

Exemple 4.3.8. On veut trouver les asymptotes horizontales et verticales de la fonction

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

Premièrement, on remarque que le domaine de la fonction est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. On va donc devoir vérifier s'il y a un asymptote vertical lorsque $x = 0$. On a donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{1} = 0$$

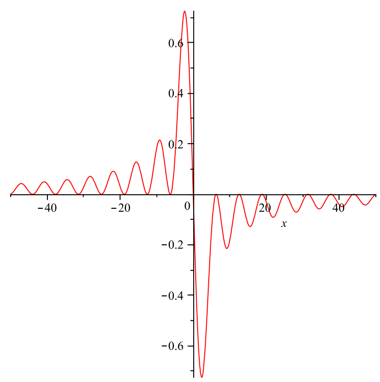
La fonction n'a donc pas d'asymptote verticale. On va maintenant vérifier si cette même fonction possède des asymptotes horizontales. Comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, alors

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x) - 1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{0}{x} = 0$$

On peut donc conclure que :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

La même méthode fonctionnant aussi pour $x \to -\infty$, on a donc que la fonction possède $y = 0$ comme asymptotes horizontales à gauche et à droite de son graphique. Pour illustrer le problème, voici le graphique de la fonction $f(x)$:



Exemple 4.3.9. On veut trouver les asymptotes horizontales et verticales de la fonction

$$f(x) = e^x \sin(2\pi x)$$

Pour ce faire, remarquons premièrement que la fonction est définie pour n'importe quelle valeur de x, il ne peut donc pas y avoir d'asymptote vertical. On va donc regarder ce qui se passe à $\pm\infty$ pour savoir s'il y a des asymptotes horizontales. Premièrement, pour la limite quand $x \to -\infty$, on remarque que $-1 \leq \sin(2\pi x) \leq 1$, ce qui signifit que

$$\lim_{x\to-\infty} -e^x \leq \lim_{x\to-\infty} e^x \sin(2\pi x) \leq \lim_{x\to-\infty} e^x$$

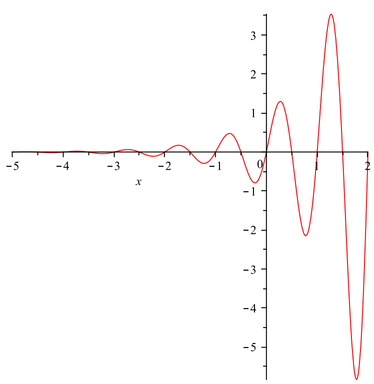
Comme les limites de gauche et de droite sont toutes deux zéros, on peut donc conclure que :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \sin(2\pi x) = 0$$

Pour ce qui est de la limite quand $x \to \infty$, on remarque que la limite ne peut pas exister car pour chaque x de la forme $\frac{4k+1}{4}$ avec k entier, on obtient que $\sin(2\pi x) = 1$, et donc $e^x \sin(2\pi x) = e^x$ devient de plus en plus grand (tend vers ∞) quand $k \to \infty$. De la même manière, si x est de la forme $\frac{4k+3}{4}$ avec k entier, on obtient que $\sin(2\pi x) = -1$, et donc $e^x \sin(2\pi x) = -e^x$ devient de plus en plus petit (tend vers $-\infty$) quand $k \to \infty$. On peut donc conclure que :

$$\lim_{x\to\infty} e^x \sin(2\pi x) = \text{n'existe pas}$$

On a donc que la fonction $f(x)$ contient un seul asymptote horizontal, $y = 0$, sur la gauche de son graphique. Pour vous aider à visualiser le problème, voici un graphique illustrant la fonction :



4.4 Point d'inflection et concavité

Nous avons déjà vu au chapitre précédent qu'on peut trouver les maximums et minimums d'une fonction en utilisant sa dérivée. Ceci nous permet dans plusieurs cas d'obtenir une bonne idée à quoi ressemble le graphique de notre fonction. Nous avons aussi utiliser la dérivé seconde pour décider si un point pour lequel $f'(x) = 0$ est un maximum ou un minimum de notre fonction. Nous allons maintenant voir dans cette section que la dérivée seconde nous donne en fait beaucoup plus d'information que cela.

Definition 4.4.1. Une fonction est dites concave vers le haut autour d'un point $a \in \mathbb{R}$ si son graphique ressemble à une partie du graphique de la fonction $f(x) = x^2$ autour du point $x = a$. On dit qu'elle est concave vers le bas autour d'un point $a \in \mathbb{R}$ si son graphique ressemble à une partie du graphique de la fonction $f(x) = -x^2$ autour du point $x = a$. Finalement, on dit que le point $a \in \mathbb{R}$ est un point d'inflection si la concavité de la fonction change lorsque $x = a$.

Théorème 4.4.1. Si $f(x)$ est une fonction dérivable deux fois autour du point $a \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. La fonction est concave vers le haut au point $x = a$ si $f''(a) > 0$
2. La fonction est concave vers le bas au point $x = a$ si $f''(a) < 0$
3. La fonction a un point d'inflection au point $x = a$ si $f''(a) = 0$, et la dérivé seconde change de signe à ce point.

Exemple 4.4.1. On veut trouver les intervalles de concavité vers le haut, de concavité vers le bas, et les points d'inflection de la fonction $f(x) = x^3 + 6x^2 - 9x$. Pour ce faire, commençons par calculer la dérivé seconde de la fonction :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 9x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2 + 12x - 9 \qquad \Rightarrow \qquad f''(x) = 6x + 12$$

Puis on cherche les zéros de la dérivée seconde. On a donc :

$$6x + 12 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 6x = -12 \qquad \Rightarrow \qquad x = -2$$

Nous allons maintenant faire un tableau pour étudier le signe de la dérivée seconde :

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	P.I.	$\cup$

On peut donc conclure que la fonction est concave vers le haut dans l'intervalle $(-2, \infty)$ et concave vers le bas dans l'intervalle $(-\infty, -2)$. De plus, il y a un point d'inflection au point $(-2, f(-2)) = (-2, 34)$.

Exemple 4.4.2. Obtenez un graphique approximatif de la fonction

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 105x + 10$$

en étudiant les maximums/minimum de la fonction, ses intervalles de croissance et de décroissance, sa concavité, ainsi que ses points d'inflection. Pour ce faire, commençons par calculer les zéros de la dérivée et de sa dérivée seconde.

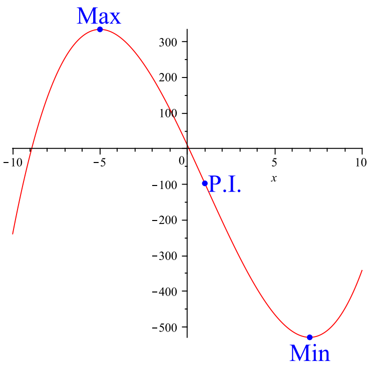
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 105 = 3(x^2 - 2x - 35) = 3(x - 7)(x + 5)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

Nous allons donc devoir nous intéressé au valeur de $x = 7$ et $x = -5$ qui sont les zéros de la dérivée, et au point $x = 1$ qui est le zéro de la dérivée seconde. En faisant un tableau, on obtient donc :

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 1)$	1	$(1, 7)$	7	$(7, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		335		-97		-529	
Graph	↷	Max	⤵	P.I.	↳	Min	⤴

Ce qui nous permet d'obtenir le graphique suivant :



4.5 Retour sur les maximums et minimum

Dans le chapitre 3, nous avons vu que si $f(x)$ est une fonction dérivable, alors ses maximum et minimum relatif se trouve lorsque $f'(x) = 0$. Cependant, qu'arrive-t-il si la fonction n'est pas dérivable partout ? Par example, la fonction $f(x) = |x|$ possède un minimum relatif lorsque $x = 0$, mais $f'(x) \neq 0$ pour tout x.

Definition 4.5.1. Si $f(x)$ est une fonction, alors on dit que $a \in Dom(f)$ est un point critique de la fonction si $f'(a) = 0$ ou si la fonction n'est pas dérivable lorsque $x = a$.

Dans le cas de notre exemple avec la valeur absolue, on remarque que le minimum relatif de la fonction se trouve lorsque la fonction n'est pas dérivable.

Théorème 4.5.1. Si $f(x)$ est une fonction ayant un minimum ou maximum relatif lorsque $x = a$, alors a est un point critique de la fonction.

Notez cependant que ce n'est pas tout les points critiques qui sont des maximums ou minimums relatif d'une fonction.

Definition 4.5.2. On dit que qu'un fonction $f(x)$ possède un maximum absolue lorsque $x = a$ si $f(a) \geq f(x)$ pour tout x dans le domaine de la fonction. Dans ce cas, on appelle $f(a)$ la valeur maximale de la fonction. De la même manière, on dit qu'une fonction $f(x)$ possède un minimum absolue lorsque $x = a$ si $f(a) \leq f(x)$ pour tout x dans le domaine de la fonction. Dans ce cas, $f(a)$ est appellé valeur minimale de la fonction.

Remarquez qu'une fonction ne peut avoir qu'une seule valeur maximale et une seule valeur minimale.

4.6 Analyse complète d'une fonction

Comme nous l'avons mentionné au début du chapitre, l'analyse complète d'une fonction consiste à effectuer toutes les étapes suivantes :

A. Trouver le domaine de la fonction

B. Trouver les zéros de la fonction

C. Trouver la valeur initiale (ou ordonné à l'origine)

D. Trouver les maximums et minimums

E. Trouver les intervalles de croissance et de décroissance

F. Trouver les points d'inflection

G. Étudier la concavité

H. Vérifier s'il existe des asymptotes horizontales

I. Vérifier s'il existe des asymptotes verticales

J. Dessiner le graphique

Pour plusieurs de ces étapes, faire un tableau peut grandement simplifier le travail, et c'est ce que nous feront habituellement. Il est aussi possible de combiner certaines de ces étapes en une seul dépendant du contexte.

Exemple 4.6.1. On veut faire l'analyse complète de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$. En suivant les étapes énoncés précédemment, on obtient :

A. Pour trouver le domaine de la fonction, on doit vérifier pour quelle valeur de x on a une division par zéro. On a donc :

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$$

On obtient donc : $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$

B. Comme on a une fraction, trouver les zéros de la fonction revient à trouver les zéros du numérateur. On a donc :

$$2x^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

$x = 0$ est donc le seul zéro de la fonction.

C. Pour trouver la valeur initiale, il suffit de calculer $f(0)$. On a donc :

$$f(0) = \frac{2(0)^2}{(0)^2 - 1} = 0$$

D. Pour trouver les maximums et minimums de la fonction, on doit trouver les points critiques de la fonction. On commence donc par trouver la dérivée :

$$f'(x) = \frac{(2x^2)'(x^2-1) - (x^2-1)'(2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{4x(x^2-1) - 2x(2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Comme le domaine de la dérivée est $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, la fonction $f(x)$ est dérivable partout sur son domaine. De plus, comme le seul zéro de la dérivé est $x = 0$, la fonction possède un seul point critique. Il ne nous reste plus qu'à vérifier s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum (ou possiblement aucun des deux). Pour ce faire, remarquons que la dérivé est positive si $x < 0$ et négative si $x > 0$. On peut donc conclure qu'il y a un maximum relatif au point $(0,0)$.

E. Nous avons déjà répondu à une partie de cette question dans l'item précédent, mais pour compléter le tout, et résumer ce que nous savons jusqu'à présent, nous allons construire un tableau contenant toutes l'information que nous avons jusqu'à présent :

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

On obtient donc que la fonction est croissante sur l'intervalle $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$ et décroissante sur l'intervalle $(0,1) \cup (1,\infty)$

F. Nous allons maintenant chercher les points d'inflection. Pour ce faire, nous devons calculer la dérivée seconde de la fonction :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-4x)'(x^2-1)^2 - ((x^2-1)^2)'(-4x)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-4(x^2-1)^2 - 4x(x^2-1)(-4x)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-4(x^2-1) - 4x(-4x)}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

Comme la fonction $12x^2+4>0$, on obtient donc que la dérivée seconde n'est jamais égale à zéro. Il ne peut donc pas y avoir de point d'inflection.

G. Pour étudier la concavité de la fonction, remarquons que le signe de la dérivée seconde n'est pas toujours positif et dépend du dénominateur de $f''(x)$. Nous allons donc revenir au tableau que nous avons fait précédemment en ajoutant l'information concernant la dérivée seconde. On obtient donc :

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f''(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$		$\nexists$		0		$\nexists$	
Graph	⤴		↷	Max	⤵		↳

La fonction est donc concave vers le haut sur l'intervalle $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ et concave vers le bas sur l'intervalle $(-1,0)\cup(0,1)$

H. Nous allons maintenant chercher les asymptotes horizontales de la fonction :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} \stackrel{R.H.}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{2x} = \lim_{x\to-\infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} \stackrel{R.H.}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

Il y a donc un asymptote horizontal à $y=2$ à gauche et à droite de la fonction.

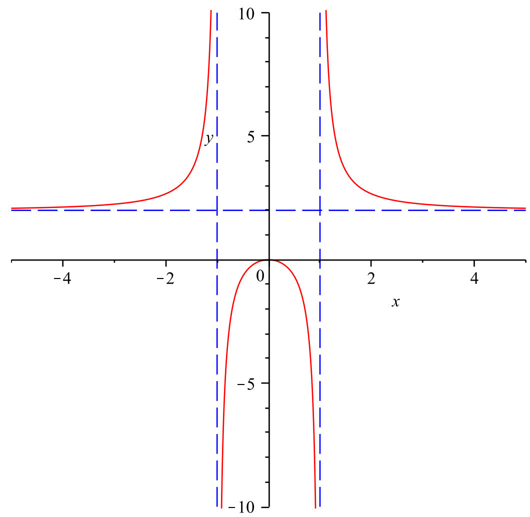
I. Nous allons maintenant chercher les asymptotes verticales de la fonction. Comme le domaine de la fonction exclut les valeurs $x=1$ et $x=-1$, c'est là que nous allons chercher.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = \infty \qquad \lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+}\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

Il y a donc des asymptotes verticales à $x=-1$ et à $x=1$.

J. Nous somme maintenant prêt à dessiner le graphique de la fonction. En combinant toutes les informations que nous avons recueillis, on obtient le graphique suivant :



10
5
y
−4
−2
0
2
4
x
−5
−10

Chapitre 5

Applications de la dérivée

5.1 Problèmes d'optimisation

Exemple 5.1.1. Une compagnie souhaite produire une boite de conserve cylindrique pouvant contenir un volume de 500ml. Supposons que les feuilles d'aluminum nécessaire à la production coute $0,001\$$ le cm^2, quel seront les dimensions (rayon et hauteur) qui minimiseront le cout de production et quel sera le cout minimum de production de ces boites de conserve ?

Comme le volume du cylindre est donné par $V = \pi r^2 H$, où r est le rayon, et H est la hauteur, on obtient relation suivante :

$$500 = \pi r^2 H \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{500}{\pi r^2}$$

De plus, l'aire du cylindre est donné par :

$$A(r) = \underbrace{\pi r^2}_{dessous} + \underbrace{\pi r^2}_{dessus} + \underbrace{2\pi r H}_{tour} = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

On va donc chercher la minimum de cette fonction. Pour ce faire, calculons la dérivée :

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$$

Puis on cherche les zéros :

$$4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4\pi r = \frac{1000}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \pi r^3 = 250 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4,3\text{cm}$$

On doit maintenant vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum. Pour ce faire, calculons la dérivé seconde :

$$A''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3}$$

En remplaçant avec le r que nous avons trouvé, on peut donc conclure qu'il s'agit bien d'un minimum. On va maintenant chercher la hauteur de la boite de conserve :

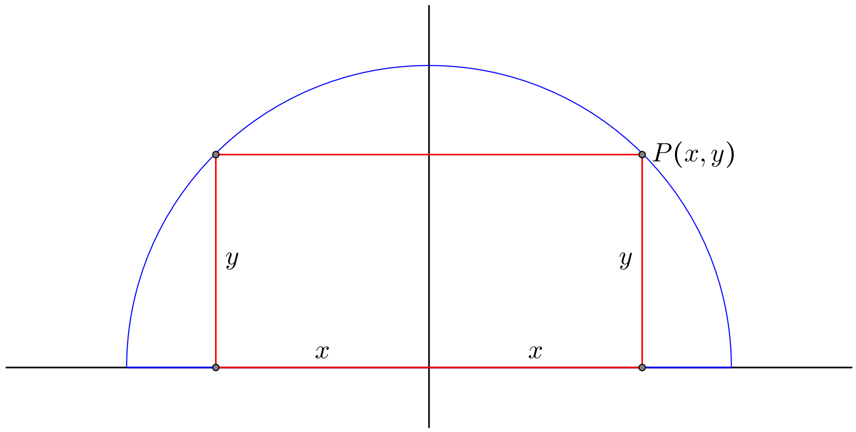
$$H = \frac{500}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right)^2} \approx 8,6\text{cm}$$

Ce qui nous donne que chaque boite de conserve coutera :

$$\text{Cout } = 0.001\left(2\pi r^2 + \frac{1000}{r}\right) = 0.001\left(2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right)^2 + \frac{1000}{\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}}\right) = 0,31\$$$

Il coute donc au minimum environ 31 cents par boite de conserve.

Exemple 5.1.2. Quelle est l'aire maximale d'un rectangle inscrit dans un demi-cercle de rayon 2 ? Pour répondre à la question, commençons par faire un schéma.



Comme le point $P(x,y)$ ce trouve sur un demi-cercle de rayon 2, on a la relation suivante :

$$x^2 + y^2 = 4$$

De plus, comme y doit être positif d'après le contexte, on peut écrire $y = \sqrt{4-x^2}$. Maintenant, nous allons écrire une fonction pour l'aire du rectangle :

$$A = (2x)y = 2xy = 2x\sqrt{4-x^2}$$

Comme nous voulons trouver quelle est l'aire maximale, nous allons chercher quel sont les zéros de la dérivée :

$$A'(x) = (2x)'(\sqrt{4-x^2}) + (2x)(\sqrt{4-x^2})' = 2\sqrt{4-x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 2\sqrt{4-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

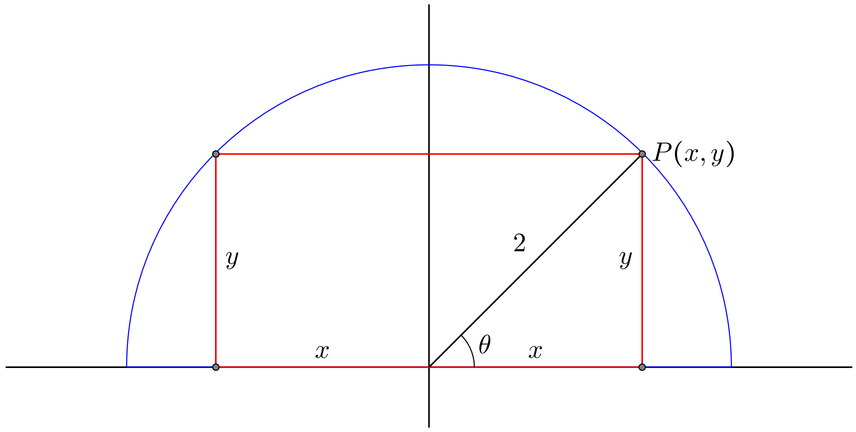
Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
2\sqrt{4-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= 0 \\
2\sqrt{4-x^2} &= \frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\
2(4-x^2) &= 2x^2 \\
8-2x^2 &= 2x^2 \\
8 &= 4x^2 \\
2 &= x^2 \\
x &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Remarquez que nous avons considérez seulement des valeurs de x positive. Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum, nous pouvons faire un tableau de signe, ce qui est laissé en exercice. On obtient donc que l'aire maximum du rectangle est :

$$A(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})\sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$$

Exemple 5.1.3. On veut refaire le problème précédent en essayant de simplifier notre solution. L'idée est d'utiliser l'angle au centre du cercle pour trouver notre fonction d'aire plutôt que d'utiliser les coordonnées (x,y) de notre point. Commençons par faire un schéma :



On peut donc écrire x et y en fonction de l'angle θ. Comme le rayon du cercle est fixe, on obtient donc les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = 2\sin(\theta) \end{cases}$$

Ce qui nous donne que l'aire est :

$$A = 2xy = 2(2\cos(\theta))(2\sin(\theta)) = 8\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Pour simplifier encore plus notre fonction d'aire, on doit se rappeler l'identité trigonométrique suivante :

$$\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

Ce qui nous permet d'obtenir pour la fonction d'aire :

$$A = 4\sin(2\theta)$$

Nous allons maintenant calculer la dérivée dans le but de trouver le maximum de la fonction :

$$A' = 8\cos(2\theta)$$

Puis on trouve le zéro :

$$8\cos(2\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Remarquez que nous avons considérez seulement des valeurs de θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ceci était donné par le contexte du problème. Pour vérifier qu'il s'agit bien du maximum, nous pouvons faire un tableau de signe, ou calculer la dérivée seconde, ce qui est probablement plus facile. Ceci est laissé en exercice. Nous allons maintenant calculer l'aire maximale :

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

On remarque donc qu'il s'agit bien de la même réponse que nous avions obtenu précédemment.

5.2 Dérivation des fonctions implicites

Au chapitre 3, nous avons vu comment calculer la dérivée de la plupart des fonctions usuelles. Le problème étant que pour plusieurs problèmes pratiques, les fonctions en question ne sont pas des fonctions proprement dites. Supposons par exemple que nous souhaitons trouver l'équations de la tangente à un cercle de rayon 1. L'équation d'un cercle est donné par :

$$x^2 + y^2 = 1$$

On peut réécrire cet équation sous la forme de deux fonctions différentes :

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad\qquad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

Le problème étant que chacune des deux fonctions décrivent une partie différente du cercle. Dépendant du point choisi, on devra utiliser soit la première ou la seconde des deux fonctions pour trouver la pente de la tangente. Dans cette section, nous allons voir qu'il est aussi possible de travailler directement avec l'équation du cercle pour trouver la dérivée. C'est ce que nous appelons la dérivation des fonctions implicite.

Revenons au problème de départ. On veut trouver la dérivée de la fonction définie implicitement $x^2+y^2 = 1$. Pour ce faire, nous allons considérez y comme étant une fonction de x, mais nous n'allons pas chercher à l'isoler. Nous allons donc dérivée la partie gauche de l'égalité par rapport à x, et la partie droite de l'égalité par rapport à x. On a donc :

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 1 \\
\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) &= \frac{d}{dx}(1) \\
\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= 0 \\
2x + \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}(y^2) &= 0 \\
2x + \frac{dy}{dx}(2y) &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-2x}{2y} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-x}{y}
\end{aligned}$$

Donc la dérivée que nous avons obtenu dépend à la fois de la valeur de x et de la valeur de y. Par exemple, si nous souhaitons trouver l'équation de la tangente au point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, on aura :

$$m = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = -1$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
g(x) &= -x + b \\
\frac{\sqrt{2}}{2} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + b \\
b &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

L'équation de la tangente est donc :

$$g(x) = -x + \sqrt{2}$$

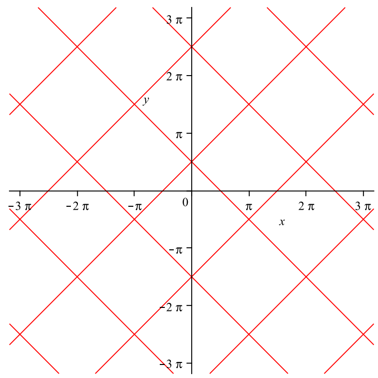
Exemple 5.2.1. On veut calculer la dérivée de la fonction définie implicitement suivante :

$$\sin(y) = \cos(x)$$

Pour ce faire, nous allons calculer la dérivée de chaque côté, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin(y)) &= \frac{d}{dx}(\cos(x)) \\
\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}(\sin(y)) &= -\sin(x) \\
\frac{dy}{dx}\cos(y) &= -\sin(x) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-\sin(x)}{\cos(y)}
\end{aligned}$$

De plus, on note que cette fonction définie implicitement est dérivable en autant que $\cos(y) \neq 0$, c'est à dire si $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Notez que cette fonction est particulièrement curieuse. Voici à quoi elle ressemble :

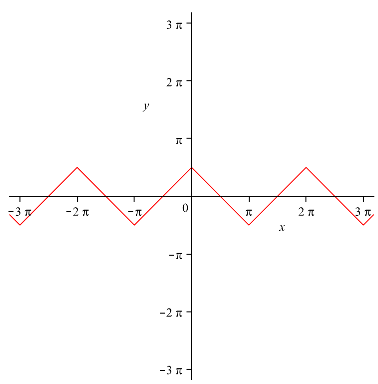


On remarque que les points où la fonction n'est pas dérivable correspondent aux intersections du quadrillé du graphique.

Remarquez qu'il aurait possible, du moins en théorie, d'isoler le y dans l'exemple précédent pour obtenir une vrai fonction, ce qui nous aurait donné :

$$y = \arcsin(\cos(x))$$

Par contre, en procédant de la sorte, nous aurions perdu une bonne partie de l'information. On peut le voir en regardant le graphique de cette dernière fonction :



Nous pouvons maintenant utilisé le concept de dérivation des fonctions implicites pour calculer la dérivée de fonction qu'il nous était pratiquement impossible de dériver avant. Cette technique s'appelle la dérivation logarithmique.

Exemple 5.2.2. On veut calculer la dérivée de la fonction $y = x^x$ en supposant que $x > 0$. Remarquez qu'aucune des règles de dérivation que nous avons vu jusqu'à présent nous permet de dériver une telle fonction. L'idée est la suivante. Pour simplifier le problème, nous allons prendre le logarithme de chaque côté. On obtient donc :

$$\ln(y) = x \ln(x)$$

Puis nous allons calculer la dérivé de chaque côté :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ln(y)) &= \frac{d}{dx}(x\ln(x)) \\
\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}(\ln(y)) &= (x)'\ln(x) + (\ln(x))'x \\
\frac{dy}{dx}\frac{1}{y} &= \ln(x) + 1 \\
\frac{dy}{dx} &= (\ln(x) + 1)y \\
\frac{dy}{dx} &= (\ln(x) + 1)x^x
\end{aligned}$$

Cette technique peut aussi être utile lorsque la fonction à dériver contient plusieurs produit ou quotient, comme dans l'exemple suivant :

Exemple 5.2.3. On veut calculer la dérivée de la fonction $y = x^5\sin(x)e^x$ pour des valeurs de x dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Comme la fonction et chacun des facteurs sont positifs dans cette intervalle, nous pouvons prendre le logarithme de chaque côté, ce qui nous donne :

$$\ln(y) = \ln(x^5\sin(x)e^x) = \ln(x^5) + \ln(\sin(x)) + \ln(e^x) = 5\ln(x) + \ln(\sin(x)) + x$$

Puis on calcul la dérivé de chaque côté :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ln(y)) &= \frac{d}{dx}\left(5\ln(x) + \ln(\sin(x)) + x\right) \\
\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}(\ln(y)) &= \frac{5}{x} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + 1 \\
\frac{dy}{dx}\frac{1}{y} &= \frac{5}{x} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{5}{x} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + 1\right)y \\
\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{5}{x} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + 1\right)x^5\sin(x)e^x
\end{aligned}$$

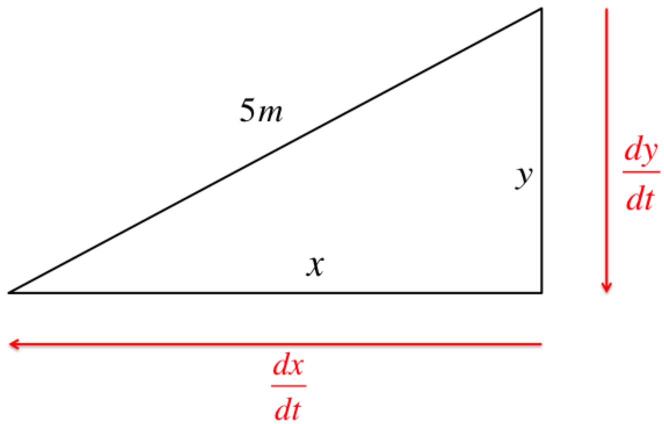
Il vous est maintenant laissé en exercice de vérifier que la réponse que nous venons d'obtenir est identique à ce que vous auriez obtenu en effectuant à deux reprise la règle du produit sur la fonction originale.

Avec seulement deux produits, la méthode illustré précédemment n'est pas vraiment plus efficace que calculer la dérivée directement avec la règle du produit. Par contre, plus nous aurons de produit dans notre fonction, plus cette dernière méthode deviendra efficace.

5.3 Taux de variation lié

Dans plusieurs problème appliquer, le contexte nous donne une relation entre deux variables, disons x et y, mais ces deux variables dépendent d'une troisième, souvent le temps t qui n'est pas explicitement mentionné. Pourtant nous somme tout de même amener à considérez la dérivée par rapport à cette troisième variable. Dans le cas du temps, ceci nous amènerait à considérez des vitesses. Ce type de problème est ce que nous appelons un taux de variation lié.

Exemple 5.3.1. Supposons qu'un échelle de 5 mètre est appuyer contre un mur. Si elle glisse à une vitesse constante de 0,1 mètre par seconde par rapport au sol, à quelle vitesse glisse tel par rapport au mur lorsque la base de l'échelle se trouve à 4 mètre du mur ?



Le théorème de Pythagore nous donne :

$$x^2 + y^2 = 25$$

En dérivant de chaque côté par rapport à t on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x^2+y^2) &= \frac{d}{dt}(25) \\
\frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2) &= 0 \\
\frac{dx}{dt}\left(\frac{d}{dx}(x^2)\right) + \frac{dy}{dt}\left(\frac{d}{dy}(y^2)\right) &= 0 \\
\frac{dx}{dt}(2x) + \frac{dy}{dt}(2y) &= 0
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant à nouveau le théorème de Pythagore, on remarque que si le bas de l'échelle est à une distance de 4m du mur, alors le haut de l'échelle est à une hauteur de 3m du sol. De plus, comme le bas de l'échelle s'éloigne du mur à une vitesse de $0,1$ m/s, alors on a :

$$\frac{dx}{dt} = 0,1$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}(2x) + \frac{dy}{dt}(2y) &= 0 \\
\frac{dy}{dt} &= -\frac{dx}{dt}\frac{x}{y} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{-0,1 \cdot 4}{3} \\
\frac{dy}{dt} &= -0,133
\end{aligned}$$

Donc le haut de l'échelle glisse vers le bas à une vitesse de 0,133 m/s

Exemple 5.3.2. On utilise une pompe électrique pour gonfler un ballon sphérique à un taux constant de $10cm^3/s$. À quelle vitesse le rayon varie lorsque ce dernier est de $15cm$? Pour répondre à la question, on commence par se rappeler que le volume d'une sphère est donnée par la formule :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

où V représente le volume et r le rayon. En dérivant des deux côtés de l'équation par rapport à t on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(V) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \\
\frac{dV}{dt} &= \frac{dr}{dt}\left(\frac{d}{dr}\frac{4}{3}\pi r^3\right) \\
\frac{dV}{dt} &= \frac{dr}{dt}\left(4\pi r^2\right) \\
\frac{dr}{dt} &= \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}
\end{aligned}$$

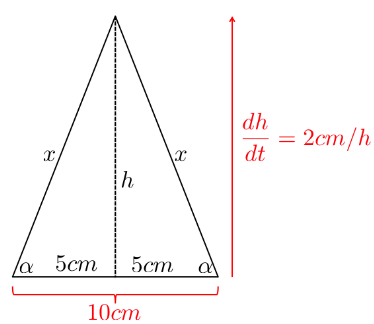
En remplaçant les valeurs de r et $\frac{dV}{dt}$, on obtient donc finalement :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(15)^2}(10) = \frac{1}{90\pi} \approx 0,0035cm/s$$

Exemple 5.3.3. On fait varier la hauteur d'un triangle isocèle ayant une base fixe de $10cm$. Si La hauteur augmenter au rythme de $2cm/h$

1. À quelle vitesse l'aire du triangle augmente lorsque la hauteur est de $20cm$?
2. À quelle vitesse l'angle α augmente lorsque la hauteur est de $20cm$?
3. À quelle vitesse la longueur de chacun des deux côtés congrus augmente lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$?

La première étape consiste normalement à se représenter la figure, ce que nous feront dès maintenant :



1. Pour trouver à quelle vitesse l'aire varie, nous devont trouver un lien entre la hauteur (h) et l'aire (A) :

$$A = \frac{10h}{2} = 5h$$

Puis on calcul la dérivé par rapport à t de chacun des deux côtés :

$$\frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(5h)$$

$$\frac{dA}{dt} = 5\frac{dh}{dt}$$

Puis on remplace la vitesse à laquelle la hauteur varie :

$$\frac{dA}{dt} = 5(2) = 10cm^2/h$$

Donc la hauteur varie à une vitesse de $10cm^2/h$.

2. Pour trouver à quelle vitesse l'angle α varie, on doit trouver un lien entre la hauteur et l'angle α. Pour ce faire, comme nous avons des triangles rectangle, nous allons utiliser la fonction tangente :

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{5}$$

Puis on calcul à nouveau la dérivée par rapport à t de chaque côté :

$$\frac{d}{dt}(\tan(\alpha)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{5}\right)$$

$$\frac{d\alpha}{dt}\frac{d}{d\alpha}(\tan(\alpha)) = \frac{dh}{dt}\frac{d}{dh}\left(\frac{h}{5}\right)$$

$$\frac{d\alpha}{dt}\sec^2(\alpha) = \frac{dh}{dt}\frac{1}{5}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\cos^2(\alpha)}{5}\frac{dh}{dt}$$

On remplace maintenant les valeurs qui nous sont connu, ce qui nous donne : Maintenant, on doit trouver la valeur de $\cos(\alpha)$ lorsque $h = 20cm$. Pour ce faire, nous allons devoir utiliser le théorème de Pythagore. On a donc :

$$\cos(\alpha) = \frac{5}{x} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + h^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 + 400}} = \frac{5}{\sqrt{425}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\cos^2(\alpha)}{5}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{17 \cdot 5}(2) = \frac{2}{85} rad/h$$

3. Nous allons commencer par trouver un lien entre la longueur de x et la hauteur :

$$x^2 = 25 + h^2$$

Puis on dérive de chaque côté par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}(x^2) = \frac{d}{dt}(25 + h^2)$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 2h\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h}{x}\frac{dh}{dt}$$

Maintenant, on doit trouver la valeur de h et de x lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$. On a donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{x} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5}{\sqrt{2}/2} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{h}{5} \quad \Longrightarrow \quad h = 5$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h}{x}\frac{dh}{dt} = \frac{5}{5\sqrt{2}}(2) = \frac{2}{\sqrt{2}} cm/h$$

5.4 Position, vitesse et accélération

Nous allons conclure ce chapitre avec un application de la dérivée (et de l'intégrale) à un problème de la physique, qui nous a d'ailleurs servi de motivation pour introduire la dérivée au chapitre 3. Nous allons donc nous intéresser au lien qui existe entre la position, la vitesse et l'accélération, et nous allons regarder ce qui se passe lorsque l'accélération est dû à la gravité.

Dans ce chapitre :

— x et y vont dénoter la position (soit à l'horizontal ou la vertical)

— v va dénoter la vitesse

— a va dénoter l'accélération

Par définition de la vitesse et de l'accélération, on aura donc les liens suivant :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Dans le cas ou on travaille à la vertical (comme pour la gravité) on remplace le x par un y. Remarquez que dans le cas où la vitesse ou l'accélération sont connu, nous pouvons revenir en arrière en utilisant l'intégrale :

$$x(t) = \int v dt \qquad v(t) = \int a dt$$

Mais dans ce cas, il sera nécessaire de trouver la valeur de la constante d'intégration (i.e. le C), ce que nous faisons habituellement à l'aire de la position et/ou de la vitesse initiale.

Exemple 5.4.1. Supposons que la position (en km) d'une voiture en fonction du temps (en heure) est donné par la fonction suivante :

$$x(t) = \frac{-100}{3}t^3 + 100t^2$$

1. À quelle vitesse roulait la voiture au temps $t = 0,5$?
2. Quel était sont accélération au temps $t = 0,5$?

Pour répondre à ces questions, nous allons donc calculer la dérivée et la dérivé seconde :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -100t^2 + 200t \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = -200t + 200$$

Puis on évalue ces deux fonctions lorsque $t = 0,5$, ce qui nous donne :

$$v(0,5) = -100(0,5)^2 + 200(0,5) = 75km/h$$

$$a(0,5) = -200(0,5) + 200 = 100km/h^2$$

Nous pouvons aussi étudier le problème inverse :

Exemple 5.4.2. Supposons que qu'une voiture est arrêté au temps $t = 0$ et commence à avancer à une accélération constante de $20km/h^2$. À quelle distance se trouvera-t-elle après 5h ? Pour ce faire, remarquons que comme la voiture était arrêté à $t = 0$, sa position et sa vitesse initiale peuvent être supposé 0. On va donc utiliser l'intégrale pour trouver la vitesse en fonction du temps, puis l'intégrale à nouveau pour trouver la position en fonction du temps.

$$v(t) = \int a dt = \int 20 dt = 20t + C$$

Pour trouver la constante C, on utilise le fait que $v(0) = 0$, ce qui nous donne $C = 0$. On a donc :

$$v(t) = 20t$$

On utilise à nouveau l'intégration, ce qui nous donne :

$$x(t) = \int v(t) dt = \int 20t dt = 10t^2 + C$$

Pour trouver la valeur de la constante C, on utilise la position initiale $x(0) = 0$, ce qui nous donne $C = 0$. On obtient donc :

$$x(t) = 10t^2$$

Donc après $5h$, la voiture roulera à une vitesse de :

$$x(t) = 10(5)^2 = 250km/h$$

Remarquez que l'exemple précédent n'est pas très réaliste. Il est peu probable qu'un voiture est un accélération constante de $20km/h$ pendant un total de 5h. Dans les problèmes de la vie courante, il serait plus raisonnable de faire varié l'accélération en fonction du temps.

Un ensemble important d'application de ce type de problème est celui des objets qui tombe sous l'effet de la gravité. Dans ce cas, des données expérimentales nous donne que l'accélération d'un objet en chute libre est une constante. Cette dernière vaut $9,8m/s^2$, et l'accélération se fait vers le bas.

Chapitre 6

L'intégrale

6.1 Retour sur l'intégrale indéfinie

L'intégrale définie est l'inverse de l'opération de dérivation. C'est ce que nous avons appelé l'antidérivée au chapitre 3. Si $f(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions tel que

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Alors on écrira

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

où C est une constante. Nous allons maintenant voir dans cette section quelques règles nous permettant de calculer l'intégrale indéfinie. Il s'agit essentiellement de réécrire à l'envers les diverses règles de dérivation que nous avons vu jusqu'à présent.

$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$	$\int \Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
$\frac{d}{dx}(af(x)) = a\frac{d}{dx}f(x) = a\frac{d}{dx}(f(x))$	$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
$\frac{d}{dx}(a) = 0$	$\int 0dx = C$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$	$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln(a)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{d}{dx}\sin(ax) = a\cos(ax)$	$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$
$\frac{d}{dx}\cos(ax) = -a\sin(ax)$	$\int \sin(ax)dx = \frac{-1}{a}\cos(ax) + C$
$\frac{d}{dx}\tan(ax) = a\sec^2(ax)$	$\int \sec^2(ax) = \frac{1}{a}\tan(ax) + C$

$\dfrac{d}{dx}\cot(ax) = -a\csc^2(ax)$	$\displaystyle\int \csc^2(ax) = \frac{-1}{a}\cot(ax) + C$
$\dfrac{d}{dx}\sec(ax) = a\sec(ax)\tan(ax)$	$\displaystyle\int \sec(ax)\tan(ax)dx = \frac{1}{a}\sec(ax) + C$
$\dfrac{d}{dx}\csc(ax) = -a\csc(ax)\cot(ax)$	$\displaystyle\int \csc(ax)\cot(ax)dx = \frac{-1}{a}\csc(ax) + C$
$\dfrac{d}{dx}(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$
$\dfrac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$
$\dfrac{d}{dx}(\arccos(x)) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + C$
$\dfrac{d}{dx}(\text{arcsec}(x)) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \text{arcsec}(x) + C$
$\dfrac{d}{dx}(\text{arccsc}(x)) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\displaystyle\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \text{arccsc}(x) + C$
$\dfrac{d}{dx}(\text{arccot}(x)) = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$\displaystyle\int \frac{-1}{1+x^2}dx = \text{arccot}(x) + C$

Il y a quelques points qui sont cependant important de remarquer. Dans le tableau ci-dessus, il n'y a absolument aucune mention de la règle du produit, de la règle du quotient et de la règle des fonctions composer. La raison est relativement simple. Il n'existe aucun équivalent de ces formules pour le calcul de l'intégrale. Ces ce qui rend le calcul de l'intégrale beaucoup plus difficile que celui de la dérivée. Si on essaie de réécrire la règle du produit de la dérivée sous forme d'un intégrale, on obtient la règle d'intégration par partie (voir le cours de calcul II). Si on essaie de réécrire la règle de dérivation des fonctions composé sous forme d'intégrale, on obtient la règle du changement de variable (voir le cours de calcul II). C'est deux technique d'intégration sont très différente de leur équivalent pour la dérivé, et ne seront pas étudier dans ce cours.

Remarquez que les formules ci-dessus ne vous permettrons pas de calculer toutes les intégrales que vous devrez être capable de calculer d'ici la fin du cours. Dans plusieurs cas, vous devrez utiliser votre intuition pour essayer de deviner quelle devrait être la réponse, puis en calculer la dérivée pour confirmer votre hypothèse. Ceci est du au fait qu'il n'existe aucune formule d'intégration correspondant aux produits, divisions et compositions de fonctions.

Exemple 6.1.1. On veut calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int (5x^4 + 3x^2 - 6)dx = x^5 + x^3 - 6x + C$
2. $\displaystyle\int \left((5e^{3x} + \cos(2x) + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{5e^{3x}}{3} + \frac{\sin(2x)}{2} + \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 8x^2 + 8x - 35}{x^2 + 3x - 7}dx.$
   Pour ce faire, commençons par effectuer la division. Si nous somme chanceux, l'intégrale deviendra alors très facile à calculer.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & x & +5 \\ \cline{2-5}
x^2+3x-7 \big) & x^3 & +8x^2 & +8x & -35 \\
 & -x^3 & -3x^2 & +7x & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^2 & +15x & -35 \\
 & & -5x^2 & -15x & +35 \\ \cline{3-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

On obtient donc : $\displaystyle\int \frac{x^3+8x^2+8x-35}{x^2+3x-7}dx = \int (x+5)dx = \frac{x^2}{2} + 5x + C$

4. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{5}{1+x^2}\right) dx = \int x^{1/2}dx + 5\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + 5\arctan(x) + C$
   $\displaystyle = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 5\arctan(x) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3-7}{\sqrt{x}}dx = \int (x^3-7)x^{-1/2}dx = \int (x^{5/2} - 7x^{-1/2})dx = \frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{7x^{1/2}}{1/2} + C$
   $\displaystyle = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} - 14\sqrt{x} + C$

6. $\displaystyle\int x\cos(x^2+5)dx$
   Cette intégrale est plus difficile à calculer, et aucune des formules que nous avons vu au début de la section ne peut nous donner la réponse directement. Par contre, comme il y a un cosinus dans l'intégrale, l'antidérivée contiendrait très probablement une fonction sinus. En essayant de dérivée différente fonction contenant sinus, on finit par remarquer que :

   $$\frac{d}{dx}(\sin(x^2+5)) = 2x\cos(x^2+5)$$

   Ce qui est proche de la fonction que nous cherchons à intégrer. Seul le facteur 2 nous crée toujours problème. En divisaient des deux côtés par 2, on obtient donc :

   $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin(x^2+5)\right) = x\cos(x^2+5)$$

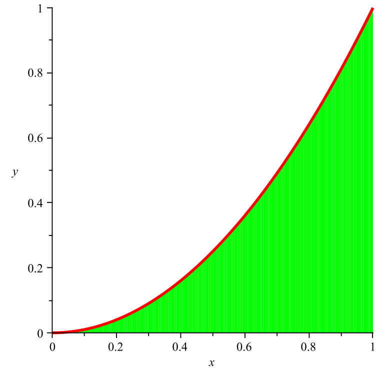
   Ce qui est maintenant exactement ce que nous cherchons. On peut donc conclure que :

   $$\int x\cos(x^2+5)dx = \frac{1}{2}\sin(x^2+5)$$

6.2 Approximation d'aire

La principale application de l'intégrale est dans le calcul des aires. C'est ce que nous verrons dans la prochaine section. Mais avant, nous allons voir dans cette section comment nous pouvons calculer approximativement l'aire sous une courbe à l'aide de rectangle (inscrit ou circonscrit). Nous allons donc expliquer l'idée à l'aide d'un exemple.

Supposons que nous voulons calculer approximativement l'aire de la région qui se trouve entre la fonction $f(x) = x^2$ et l'axe des x, pour des valeurs de x comprise entre 0 et 1. Ces à dire, la région colorié en vert ci-dessous :

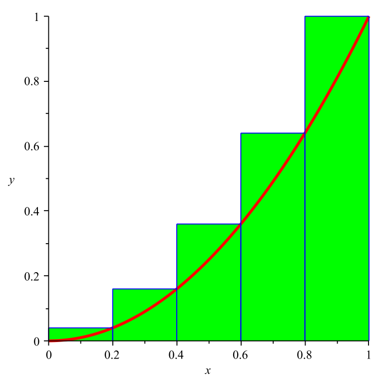


Pour ce faire, nous allons découper l'intervalle $[0,1]$ en plusieurs sous intervalles. Plus le nombre d'intervalle sera grand, plus notre calcul sera précis. Pour cette exemple, nous allons découper l'intervalle en 5 morceaux. On aura donc les intervalles :

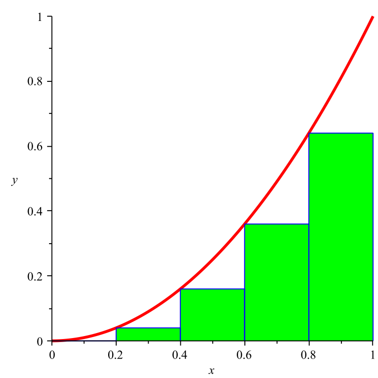
$$\left[0,\frac{1}{5}\right],\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right],\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right],\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right],\left[\frac{4}{5},1\right]$$

Puis nous allons construire un rectangle pour chacun des intervalles qui sont le plus proche possible de couvrir la région en verte. Ici nous pouvons procéder de plusieurs manières, mais nous allons nous concentrer sur deux méthodes en particulier. Nous pouvons donc prendre des rectangles qui sont circonscrit (donc plus grand que la région) ou des rectangles qui sont inscrit (donc plus petit que la région). Les figures ci-dessous illustre ces deux façons de procéder.

Approximation avec 5 rectangles circonscrit



Approximation avec 5 rectangles inscrit



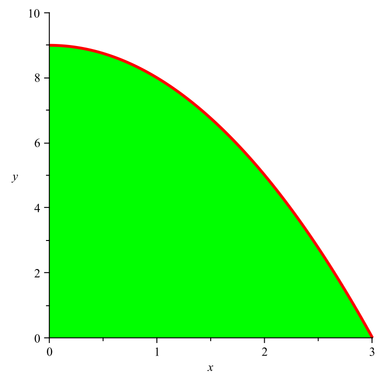
En calculant l'aire des régions couvertes par nos rectangles, on obtiendra donc une sur-approximation pour les rectangles circonscrit et une sous-approximation pour les rectangles inscrits. Avec 5 rectangles, on obtiendra donc les deux approximations suivantes :

$$\text{Sur-approximation : } 0.2f(0.2)+0.2f(0.4)+0.2f(0.6)+0.2f(0.8)+0.2f(1)=0,44 \text{ unité}^2$$

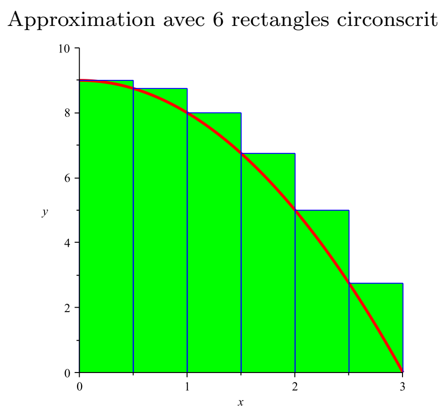
$$\text{Sous-approximation : } 0.2f(0)+0.2f(0.2)+0.2f(0.4)+0.2f(0.6)+0.2f(0.8)=0,24 \text{ unité}^2$$

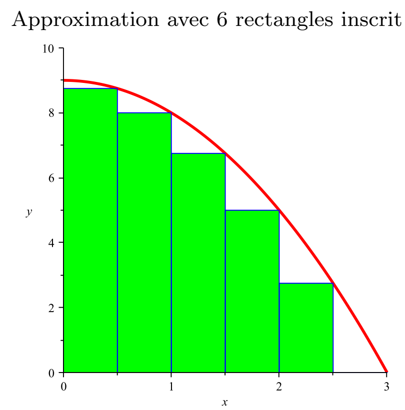
On peut donc conclure que l'aire exacte (que nous ne connaissons pas encore) doit se trouver entre $0,24$ et $0,44$. Remarquez qu'il est essentiel de faire un schéma pour pouvoir bien répondre à la question. De plus, bien que ca ne soit pas essentiel, pour simplifier les calculs nous allons considérer dans cette section seulement des fonctions qui sont monotones sur l'intervalles considéré. C'est à dire qu'elles sont soit toujours croissantes ou toujours décroissantes sur l'intervalle.

Exemple 6.2.1. On veut approximer l'aire entre la fonction $f(x)=9-x^2$ et l'axe des x pour des valeurs de x entre 0 et 3 à l'aide de 6 rectangles. Pour ce faire, commençons par représenter la région :



Puis en découpant l'intervalle $[0,3]$ en 6 morceaux, on obtient les graphiques avec les rectangles inscrit et circonscrit suivant :





On obtient donc les approximations suivantes :

$$\text{Sur-approximation : } 0.5f(0) + 0.5f(0.5) + 0.5f(1) + 0.5f(1.5) + 0.5f(2) + 0.5f(2.5) = 20,125 \text{ unité}^2$$

$$\text{Sous-approximation : } 0.5f(0.5) + 0.5f(1) + 0.5f(1.5) + 0.5f(2) + 0.5f(2.5) + 0.5f(3) = 15,625 \text{ unité}^2$$

On peut donc conclure que l'aire exacte de la région est entre $15,625$ et $20,125$.

Ce qui est important de réaliser c'est que plus qu'il y aura de rectangles, meilleurs seront nos approximations. Ces à dire que la différence entre notre sur-approximation et notre sous-approximation deviendra de plus en plus petite. En particulier, si nous souhaitons obtenir l'aire exacte de la région, nous devront calculer la limite lorsque le nombre de rectangles tend vers l'infinie. Ceci, nous amène à faire la définition suivantes :

Definition 6.2.1. Si $f(x)$ est une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$, alors l'intégrale définie est donnée par :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right)$$

Cette définition signifie essentiellement que l'intégrale définie représente l'aire de la région qui se trouve entre la fonction $f(x)$ et l'axe des x, pour des valeurs de x entre a et b. Nous n'utiliserons pas directement cette définition dans ce cours, il vous faudra attendre de faire le deuxième cours de calcul pour apprendre comment l'utiliser directement. Il y a cependant un point important à noter. L'intégrale définie représente un aire orienté. C'est à dire qu'elle sera positive si la fonction est au dessus de l'axe des x, et négative si la fonction se trouve en dessous de l'axe des x.

6.3 Théorème fondamental du calcul

Il est maintenant temps de voir comme l'intégrale indéfinie (ou antidérivé) peut nous être utile pour faire des calculs d'aire. C'est à dire quel est le lien entre l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie. Ceci nous est donné par un théorème particulièrement important en mathématiques qui porte le nom de théorème fondamental du calcul.

Théorème 6.3.1. **(Théorème fondamental du calcul)**

1. Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur un intervalle (a, b), alors on a :
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$
2. Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, alors on a :
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Essentiellement, le théorème fondamental du calcul nous dit que la dérivée et l'intégrale sont deux opérations qui sont l'inverse l'une de l'autre, mais le théorème va aussi un peu plus loin que ce que nous savions déjà. Le théorème fondamental du calcul considère des intégrales définies plutôt que des intégrales indéfinies. De plus, il nous donne une façon de calculer l'intégrale définie (et donc calculer un aire) à partir de l'intégrale indéfinie que nous savons déjà calculer. C'est la première partie du théorème qui nous sera vraiment utile dans ce cours. Nous allons regarder comment l'utiliser à l'aide d'un exemple.

Exemple 6.3.1. On veut calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 x^2 dx$$

pour ce faire, nous devons commencer par calculer l'intégrale indéfinie. On a donc :

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

pour pouvoir utiliser le théorème fondamental du calcul, nous avons besoin d'une seule fonction $f(x)$ tel que $f'(x) = x^2$. En prenant $C = 0$, on peut donc choisir la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3}$. On peut maintenant appliquer le théorème, ce qui nous donne :

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

Exemple 6.3.2. On veut calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^5 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{625-16}{4} = \frac{609}{4}$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/6} = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

6.4 Calcul d'aire

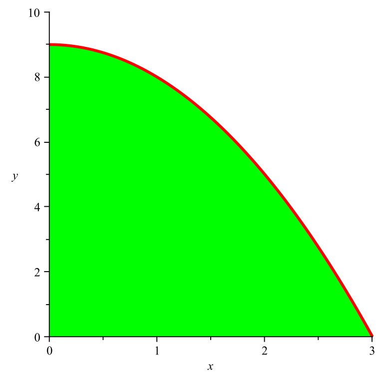
Nous sommes maintenant prêt à utiliser nos connaissance pour calculer l'aire de certaine région. Pour ce faire, nous aurons besoin du théorème ci-dessus qui est essentiellement une réécriture de ce que nous avons vu dans les sections précédentes.

Théorème 6.4.1. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions définies sur un intervalles $[a,b]$ et pour lesquels $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors l'aire de la région comprise entre ces deux courbes pour des valeurs de x entre a et b est donné par :

$$\text{Aire } = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big) dx$$

En particulier, si on cherche l'aire entre une fonction et l'axe des x, on peut remplacer $f(x)$ ou $g(x)$ par 0 dépendant si la fonction est au dessus, ou en dessous de l'axe des x.

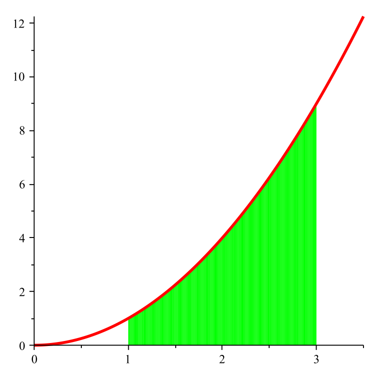
Exemple 6.4.1. Comme premier exemple, on va calculer l'aire exacte de la région de l'exemple 6.2.1. C'est à dire on veut trouver l'aire de la région entre la fonction $f(x) = 9 - x^2$ et l'axe des x pour des valeurs de x dans l'intervalle $[0,3]$.



Comme la région se trouve entre $f(x)$ et 0 et que $f(x) \geq 0$, on peut donc utiliser le théorème ce qui nous donne :

$$\text{Aire } = \int_0^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left(9(3) - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9(0) - \frac{0^3}{3}\right) = 27 - \frac{27}{3} = 27 - 9 = 18\text{unité}^2$$

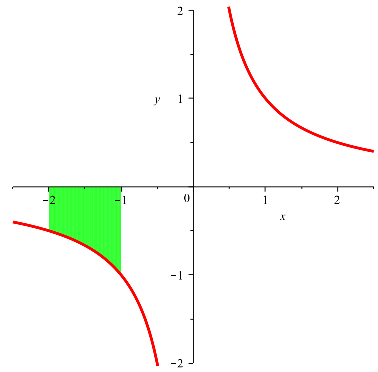
Exemple 6.4.2. On veut calculer l'aire de la région entre la fonction $f(x) = x^2$ et l'axe des x, pour des valeurs de x dans l'intervalle $[1,3]$. Commençons par représenter la région. On a donc :



On remarque donc que $f(x) \geq 0$ dans l'intervalle $[1,3]$ ce qui nous permet de trouver :

$$\text{Aire } = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}\text{unité}^2$$

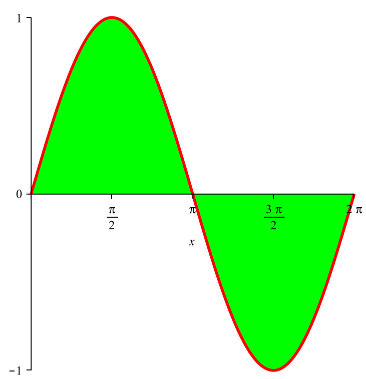
Exemple 6.4.3. On veut calculer l'aire de la région entre la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et l'axe des x, pour des valeurs de x dans l'intervalle $[-2,-1]$. Commençons par représenter la région :



Pour ce faire, on remarque que la région se trouve cette fois sous l'axe des x, il va donc falloir faire attention en applicant le théorème. On a donc :

$$\text{Aire} = \int_{-2}^{-1}\left(0-\frac{1}{x}\right)dx = [-\ln|x|]_{-2}^{-1} = -\ln|-1|+\ln|-2| = \ln(2)-\ln(1) = \ln(2)\text{unité}^2$$

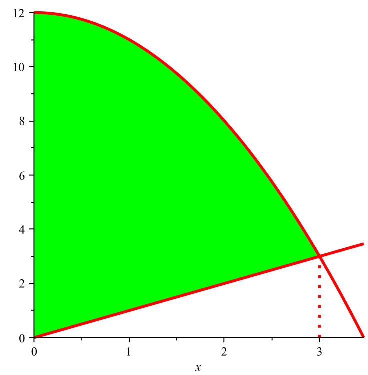
Exemple 6.4.4. On veut calculer l'aire de la région entre la fonction $f(x) = \sin(x)$ et l'axe des x, pour des valeurs de x dans l'intervalle $[0,2\pi]$. Pour ce faire, commençons par tracer le graphique :



Ici le problème est un peu plus compliqué. Dans l'intervalle $[0,\pi]$, on remarque que la fonction $f(x)$ est au dessus de l'axe des x. Par contre, dans l'intervalle $[\pi,2\pi]$, la fonction $f(x)$ se trouver en dessous de l'axe des x. On va donc devoir calculer l'aire en deux parties :

$$\begin{aligned}
\text{Aire} &= \int_0^{\pi}\sin(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-\sin(x))dx \\
&= \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos(x)\Big]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \Big(-\cos(\pi)+\cos(0)\Big) + \Big(\cos(2\pi)-\cos(\pi)\Big) \\
&= \Big(1+1\Big) + \Big(1+1\Big) \\
&= 4\text{unité}^2
\end{aligned}$$

Exemple 6.4.5. On veut trouver l'aire de la région entre les fonctions $f(x) = 12-x^2$ et $g(x) = x$ pour des valeurs de x dans l'intervalle $[0,3]$. Pour ce faire, commençons par représenter la région :



On remarque donc que sur l'intervalle considèré la fonction $f(x)$ est toujours supérieur à la fonction $g(x)$. En applicant le théorème, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\text{Aire} &= \int_0^3 \Big(f(x) - g(x)\Big)dx = \int_0^3 (12 - x^2 - x)dx = \left[12x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 \\
&= \left(12(3) - \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2}\right) - \left(12(0) - \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2}\right) = 36 - 9 - \frac{9}{2} = \frac{45}{2}\text{unité}^2
\end{aligned}$$