# Révision de calcul

Nicolas Bouffard

# La limite

## Définition de la limite

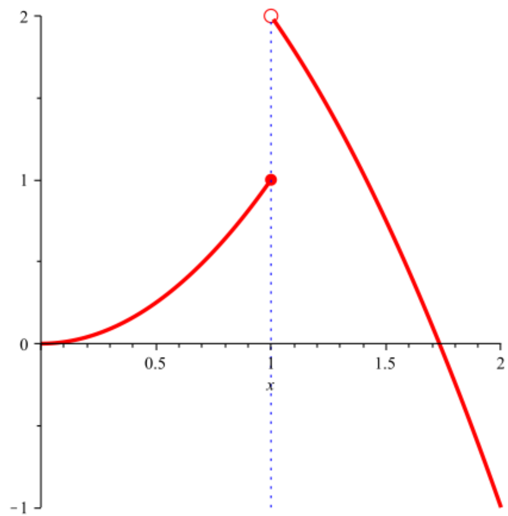
- $\lim_{x \to a^-} f(x)$ est la valeur vers laquelle s'approche la fonction lorsque $x$ s'approche de $a$ par la gauche.

- $\lim_{x \to a^+} f(x)$ est la valeur vers laquelle s'approche la fonction lorsque $x$ s'approche de $a$ par la droite.

- $\lim_{x \to a} f(x)$ est la valeur vers laquelle s'approche la fonction lorsque $x$ s'approche de $a$, à condition que cette valeur soit la même que l'on s'approche par la gauche ou par la droite.

**EXEMPLE:** Répondre aux questions suivantes :

- $f(1) =$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$



## Quelques limites importantes

**EXEMPLE:** Répondre aux questions suivantes :

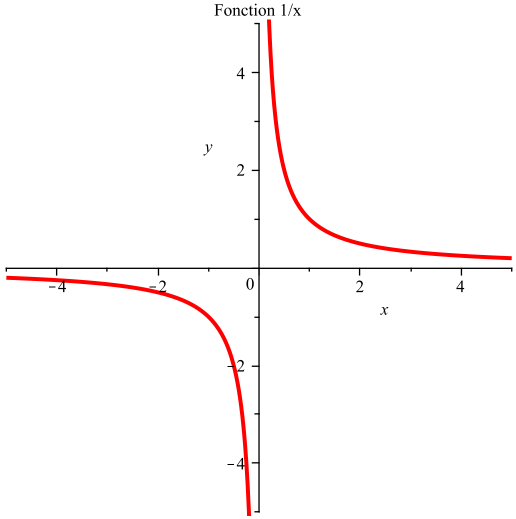
- $\dfrac{1}{0} =$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) =$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) =$

- $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x}\right) =$

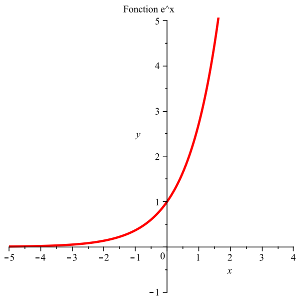
- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}\right) =$



**EXEMPLE:** Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x) =$

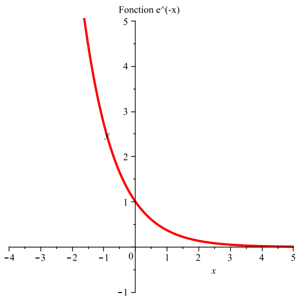
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x) =$




**EXEMPLE:** Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{-x}) =$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x}) =$



**THÉORÈME:**

$$\lim_{x\to\infty} e^{ax} = \begin{cases} 0 \text{ si } a < 0 \\ 1 \text{ si } a = 0 \\ \infty \text{ si } a > 0 \end{cases}$$

**EXEMPLE:** Calculer la limite :

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-3x} + \frac{1}{x+5}\right) = 0 + 0 = 0$$

**EXEMPLE:** Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{e^{7x}+10}\right) = \frac{5}{0+10} = \frac{1}{2}$$

## Truc 1 : Limite de fonctions continues

**THÉORÈME:** Si $f$ est une fonction continue, alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

**EXEMPLE:** Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 5} \left( \frac{x^2 + 2}{x - 3} \right) = \frac{5^2 + 2}{5 - 3} = \frac{27}{2}$$

## Truc 2 : Factoriser et simplifier

Dans le cas de fractions, il est souvent utile de factoriser le numérateur et le dénominateur, puis de simplifier.

**EXEMPLE:** Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+8x-20}{x^2+2x-8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+10)}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x\to 2} \left(\frac{x+10}{x+4}\right) = \frac{12}{6} = 2$$

## Truc 3 : Multiplier par le conjugué

Dans certain cas, lorsque le dénominateur contient des racines ou des fonctions trigonométriques, multiplier par le conjugué peut nous permettre de simplifier la limite.

**EXEMPLE:** Calculer la limite suivante :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\left(\frac{2x-10}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\right) &= \lim_{x\to 5}\left(\frac{2x-10}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right) = \lim_{x\to 5}\left(\frac{2(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5}\right)\\ &= \lim_{x\to 5}\ 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right) = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

## Truc 4 : Factoriser la plus grande puissance de $x$

Pour calculer des limites $x \to \infty$, il est souvent utile de factoriser la plus grande puissance de $x$ commune au numérateur et au dénominateur.

**EXEMPLE:** On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2+5x-7}{2x^2+3x+10}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(6+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}}=\frac{6+0-0}{2+0+0}=3$$

## Truc 5 : Échanger la limite et la fonction

Dans le cas des fonctions continues, il est possible d'échanger la fonction avec la limite.

**THÉORÈME:** Si $f$ est une fonction continue, alors :

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

**EXEMPLE:** Calculer la limite suivante :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\cos\left(\frac{x^2-7x+10}{x-5}\right) &= \cos\left(\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-5}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-5)}{x-5}\right)\\ &= \cos\left(\lim_{x\to 2}(x-2)\right) = \cos(0) = 1\end{aligned}$$

# EXERCICES

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2\right)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2^{-5x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x+3}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-x-6}{x-3}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{21x^3+5x-2}{7x^3+9x^2+5}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{4x-12}}{\sqrt{x-3}}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(\sqrt{6x+3})-\ln(\sqrt{2x-5})\right)$
8. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x^3+4x^2-31x-70}{x^2-3x-10}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^4+5x^2+3}{x^2+4x+20}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)$

## Truc 6 : Règle de l'Hospital pour les cas $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$

**THÉORÈME:** **(Règle de l'Hospital)** Si une limite est de la forme $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**EXEMPLE:** Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{R.H.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$$

**ERREUR FRÉQUENTE :** Plusieurs étudiants ont tendance à appliquer la règle de l'Hospital du moment qu'ils voient une fraction à l'intérieur d'une limite. Pourtant, la règle de l'Hospital ne fonctionne seulement qu'avec des forme $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

**IMPORTANT :** Dans plusieurs cas, il est nécessaire d'appliquer la règle de l'Hospital à plusieurs reprise avant de pouvoir évaluer la limite.

**EXEMPLE:** Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+4x+2}{x^3+2x^2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+4x+2}{x^3+2x^2} \overset{R.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+4}{3x^2+4x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+4x+2}{x^3+2x^2} \overset{R.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+4}{3x^2+4x} \overset{R.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{18x}{6x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+4x+2}{x^3+2x^2} \overset{R.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+4}{3x^2+4x} \overset{R.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{18x}{6x} \overset{R.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{18}{6} = 3$$

## Truc 7 : Les formes $0 \cdot \infty$

Pour les forment indéterminer $0 \cdot \infty$, le truc est très souvent déplacer l'un des deux facteurs au dénominateur, puis d'appliquer la règle de l'Hospital.

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

**EXEMPLE:** Calculer la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x) &= 0 \cdot (-\infty) \quad \text{F.I.} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\csc(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc(x)\cot(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2(x)}{x\cos(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x) - x\sin(x)} = \frac{0}{1-0} = 0
\end{aligned}$$

## Truc 8 : Les formes $\infty - \infty$

Pour ces formes, le truc est soit de factoriser, d'utiliser des dénominateurs communs, ou bien des identités trigonométriques.

**EXEMPLE:** Calculer la limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-5}{x+3}-2x\right) &= \infty-\infty \quad \text{F.I.} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-5-2x(x+3)}{x+3}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-5-2x^2-6x}{x+3}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-6x-5}{x+3}\right) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.} \\
&\overset{R.H.}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-6}{1} = -6
\end{aligned}$$

## Truc 9 : Les formes $0^0, \infty^0$ et $1^\infty$

Pour ces formes, le truc est de prendre le logarithme pour se ramener à une autre forme.

**EXEMPLE:** Calculer la limite suivante :

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^x$$

En prenant le logarithme :

$$\begin{aligned}
\ln(L) &= \ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^x\right) = \lim_{x\to 0^+} (\ln(x^x)) = \lim_{x\to 0^+} (x\ln(x)) = 0\cdot\infty \quad \text{F.I.} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.} \\
&\overset{R.H.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

# Récapitulatif des formes indéterminées

| Formes indéterminés | Quoi faire ? |
|---|---|
| $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ | Utiliser directement la règle de l'Hospital |
| $0\cdot(\pm\infty)$ | Transformer le produit $f(x)g(x)$ sous la forme $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ et appliquer la règle de l'Hospital |
| $\infty-\infty$ | Factoriser, utiliser des identités trigonométriques ou des dénominateurs communs pour obtenir quelque chose de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ |
| $0^0$, $\infty^0$ ou $1^{\pm\infty}$ | Utiliser les logarithmes pour obtenir quelque chose de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ |

# EXERCICES

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 9x + 14}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$

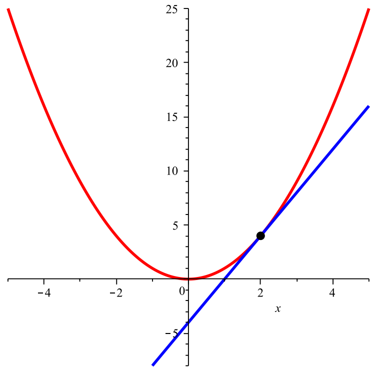
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{3x^2 + 8x}{x + 5} - 3x \right)$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left( x^2 e^{-5x} \right)$

# La dérivée

## Qu'est ce que la dérivée ?

**IDÉE GÉNÉRALE :** La dérivé d'une fonction $f(x)$ à un point $x = a$ est la pente de la tangente à $f(x)$ lorsque $x = a$.




**REMARQUE :** Il y a deux notations standard pour la dérivée qui sont équivalente :

$$f'(x) \quad \text{et} \quad \frac{df(x)}{dx}$$

Ces notations sont interchangeable.

# Définition de la dérivée

Si $f(x)$ est une fonction, alors on définit la fonction dérivé $f'(x)$ comme étant :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pour toutes valeurs de $x$ où cette dernière limite existe.

**EXEMPLE:** On veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^3 + 3x$. On a donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^3 + 3(x+h)) - (x^3+3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{((x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + (3x+3h)) - (x^3+3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 2xh + h^2 + 3\right) \\
&= 3x^2 + 3
\end{aligned}$$

## Premières règles de dérivation

**THÉORÈME:** Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions, alors

1. La dérivé d'une fonction constante est zéro
2. Si $c$ est une constante : $(cf)'(x) = cf'(x)$
3. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
4. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
5. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

**EXEMPLE:** Supposons que $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions dérivable telle que $f(2) = 15$, $g(2) = -1$, $f'(2) = 13$ et $g'(2) = 1$. Alors on a :

- $(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 13 + 1 = 14$
- $(5f)'(2) = 5f'(2) = 5(13) = 65$
- $(fg)'(2) = f(2)g'(2) + g(2)f'(2) = 15(1) + (-1)(13) = 15 - 13 = 2$

# Dérivation des polynômes

**THÉORÈME:** Si $n$ est un nombre réel, alors :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

On peut maintenant utiliser ce résultat, en combinaison avec les règles de dérivation de la section précédente, pour calculer la dérivé de n'importe quel polynôme.

**EXEMPLE:** On veut calculer les dérivées suivantes :

- $\frac{d}{dx}(3x^4 + 5x + 2) = 3\frac{d}{dx}(x^4) + 5\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2) = 12x^3 + 5$
- $\frac{d}{dx}(6x^{10} + 7x^8 - 4x^3 + 2) = 60x^9 + 56x^7 - 12x^2$
- $\frac{d}{dx}(-3x^6 + 2x^3 - 5) = -18x^5 + 6x^2$
- $\frac{d}{dx}\left[(4x^2 + 5)(x^3 + 7x)\right] = 8x(x^3 + 7x) + (3x^2 + 7)(4x^2 + 5)$

**EXEMPLE:** Trouver l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ lorsque $x = 3$. Pour ce faire, commençons par calculer la dérivée. On a donc :

$$f'(x) = 4x^3 - 6x$$

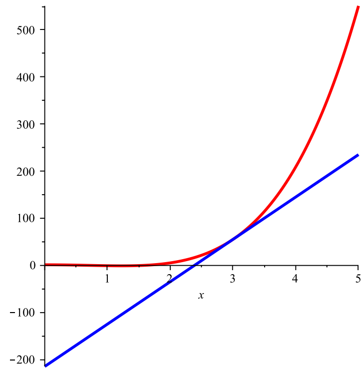
Ce qui nous permet de calculer la pente de la tangente. On a donc :

$$m = f'(3) = 4(3)^3 - 6(3) = 90$$

Donc l'équation de la tangente a la forme $g(x) = 90x + b$. Il ne nous reste donc plus qu'à trouver la valeur de $b$. Pour ce faire, remarquons que $f(3) = 55$. On a donc :

$$55 = 90(3) + b \quad \Longrightarrow \quad b = -215$$

L'équation de la tangente est donc : $g(x) = 90x - 215$. Voici un graphique illustrant la situation :



## Application : Croissance et décroissance

**THÉORÈME:** Si $f(x)$ est une fonction dérivable au point $a$, alors :

1. $f(x)$ est croissante au point $a$ si $f'(a) > 0$
2. $f(x)$ est décroissante au point $a$ si $f'(a) < 0$

**EXEMPLE:** Est-ce que la fonction $f(x) = x^7 + 5x^3 - 4x^2 + 3$ est croissante ou décroissante lorsque $x = 1$ ? Pour ce faire, commençons par calculer la dérivée de la fonction :

$$\frac{df(x)}{dx} = 7x^6 + 15x^2 - 8x$$

ce qui nous donne :

$$f'(1) = 7(1)^6 + 15(1)^2 - 8(1) = 14 > 0$$

La fonction est donc croissante lorsque $x = 1$.

**EXEMPLE:** Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x) = x^3 - 21x^2 + 135x + 18$.

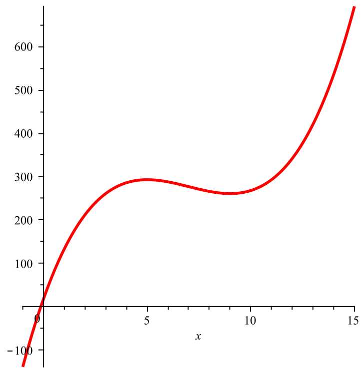
$$f'(x) = 3x^2 - 42x + 135 = 3(x^2 - 14x + 45) = 3(x-5)(x-9)$$

On obtient donc :

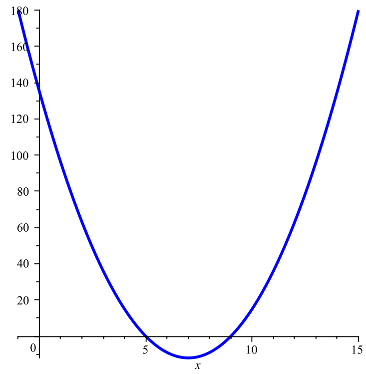
1. Intervalle de croissance : $(-\infty, 5) \cup (9, \infty)$
2. Intervalle de décroissance : $(5, 9)$

Voici le graphique représentant la fonction (à gauche) et celui représentant la dérivée (à droite).

Graphique de $f(x) = x^3 - 21x^2 + 135x + 18$




Graphique de $\dfrac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 42x + 135$



## Application : Maximum et minimum relatif

**THÉORÈME: (Test de la dérivé première)** Si $f(x)$ est une fonction dérivable dans un intervalle autour d'un point $a$, alors :

1. $a$ est un maximum relatif si $f'(a) = 0$ et la fonction passe de croissante à décroissante au point $a$.
2. $a$ est un minimum relatif si $f'(a) = 0$ et la fonction passe de décroissante à croissante au point $a$.

**THÉORÈME: (Test de la dérivé seconde)** Si $f(x)$ est une fonction dérivable deux fois dans un intervalle autour d'un point $a$, alors :

1. $a$ est un maximum relatif si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$.
2. $a$ est un minimum relatif si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$.

Remarquez que lorsque $f''(a) = 0$, le test ne nous permet pas de conclure.

**EXEMPLE:** On veut trouver les maximums et minimums relatifs de la fonction $f(x) = -x^2 + 8x - 15$. Pour ce faire, commençons par calculer la dérivé de la fonction :

$$\frac{d}{dx}(-x^2 + 8x - 15) = -2x + 8$$

Puis on trouve que le seul zéro de la dérivée est lorsque $x = 4$. Donc la seule valeurs de $x$ où il est possible d'avoir un maximum ou minimum relatif de $f(x)$ est lorsque $x = 4$. Ensuite, remarquons que la dérivée est positive si $x < 4$ et elle est négative si $x > 4$. La fonction passe donc de croissante à décroissante lorsque $x = 4$. On peut donc conclure qu'il y a un maximum relatif lorsque $x = 4$.

**EXEMPLE:** Trouver les maximums et minimums relatifs de la fonction

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 2$$

On va donc commencer par calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. On a donc :

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 6x - 18$$

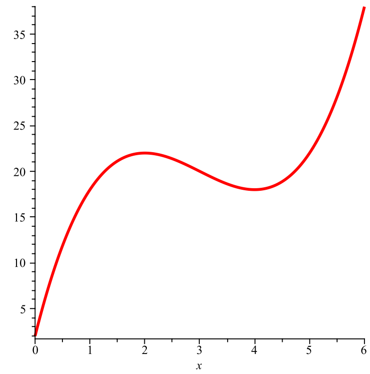
On va maintenant calculer les zéros de la fonction $f'(x)$. On a donc :

$$\frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(3)(24)}}{2(3)} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} = 2 \text{ et } 4$$

Pour trouver s'il s'agit de maximum ou minimum relatif, on utilise maintenant la dérivée seconde. On a donc :

$$f''(2) = -6 < 0 \qquad \text{et } f''(4) = 6 > 0$$

On a donc qu'il y a un maximum relatif à $x = 2$ et un minimum relatif à $x = 4$. Nous pouvons le confirmer à regardant le graphique de la fonction ci-contre :



# EXERCICES

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5$

2. $f(x) = (x^4 - 3x)(2x^5 - 3)$

3. $f(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^3 - 5)$

Trouver le maximum et le minimum de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 - 3x + 10$

2. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 5$

## La règle du quotient

**THÉORÈME:** Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions dérivable, alors la dérivée de leur quotient est donné par :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

**EXEMPLE:** Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x-2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)) &= \frac{(x^2+1)'(3x-2) - (x^2+1)(3x-2)'}{(3x-2)^2} = \frac{2x(3x+1) - (x^2+1)(3)}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{6x^2+2x-3x^2-3}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2+2x-3}{(3x-2)^2} \end{aligned}$$

**EXEMPLE:** Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x + 2}{4x^3 + 5}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2 + 5x + 2}{4x^3 + 5}\right) &= \frac{(6x+5)(4x^3+5) - (12x^2)(3x^2+5x+2)}{(4x^3+5)^2} \\ &= \frac{-12x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 30x + 25}{(4x^3+5)^2} \end{aligned}$$

**EXEMPLE:** Calculer la dérivé de $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right) = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

## Dérivation des fonctions composés

**THÉORÈME:** Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions, alors :

$$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = g'(x)f'(g(x))$$

Si on pose $y = g(x)$, on peut alors réécrire l'équation sous la forme :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

**EXEMPLE:** On veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = (x+1)^{100}$. Pour ce faire, posons $g(x) = x^{100}$ et $h(x) = x+1$. On obtient donc que $f(x) = g(h(x))$. En applicant le théorème, on obtient :

$$\frac{df(x)}{dx} = (x+1)' \cdot 100(x+1)^{99} = 100(x+1)^{99}$$

Une autre manière de regarder le problème aurait été de poser $y = x+1$, ce qui nous permet d'écrire $f(x) = y^{100}$. Dans ce cas on obtient :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (y^{100})'(x+1)' = 100y^{99} = 100(x+1)^{99}$$

**EXEMPLE:** On veut calculer la dérivé de la fonction $f(x) = (4x+2)^{10}(5x-3)^7$. On remarque donc qu'il s'agit d'un produit. On va donc commencer par calculer la dérivée de chacun des deux membres du produit, puis nous allons utiliser la règle du produit.

$$\frac{d}{dx}\left((4x+2)^{10}\right) = 40(4x+2)^9$$

$$\frac{d}{dx}\left((5x-3)^{7}\right) = 35(5x-3)^6$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\frac{df(x)}{dx} = 40(4x+2)^9(5x-3)^7 + 35(5x-3)^6(4x+2)^{10}$$

## Dérivation des fonctions inverses

**THÉORÈME:** Si $f(x)$ est une fonction inversible, alors en posant $y = f(x)$ on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

**EXEMPLE:** Calculer la dérivé de $f(x) = \sqrt{x}$. On remarque que si $y = \sqrt{x}$, alors $x = y^2$. On a donc :

$$\frac{dx}{dy} = 2y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**EXEMPLE:** Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x^2+5}}$. On peut réécrire la fonction sous la forme :

$$f(x) = (4x^2+5)^{-1/3}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{df(x)}{dx} = 8x\frac{-1}{3}(4x^2+5)^{-4/3} = \frac{-8x}{3\sqrt[3]{(4x^2+5)^4}}$$

# EXERCICES

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{(5x^3+2)^7}$

2. $f(x) = \dfrac{5x^2+4}{x^3-7x}$

3. $f(x) = (6x^2+8x)^{10}$

4. $f(x) = \left(\dfrac{6x+3}{7x-1}\right)^5$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+5}$

## Les lois des exposants

**THÉORÈME:** Si $a, m, n$ sont des entiers, alors on a les propriétés suivantes :

1. $a^0 = 1$ si $a \neq 0$
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$
3. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ si $n > 0$
4. $a^m a^n = a^{m+n}$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$

## Équivalence entre exposants, racines et logarithmes

**THÉORÈME:** Les trois expressions suivantes sont équivalentes :

$$a^b = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt[b]{c} = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_a(c) = b$$

**IMPORTANT :** $\sqrt[b]{c} = c^{1/b}$.

**EXEMPLE:** Trouver une expressions permettant de trouver $x$ :

$$x^5 = 32 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt[5]{32}$$

**EXEMPLE:** Trouver une expressions permettant de trouver $x$ :

$$3^x = 81 \qquad \Rightarrow \qquad x = \log_3(81)$$

## Les lois des logarithmes

**THÉORÈME:** Si $a, b, c$ sont des entiers supérieur à 0, alors on a les propriétés suivantes :

1. $\log_c(1) = 0$
2. $\log_c(c) = 1$
3. $\log_c(ab) = \log_c(a) + \log_c(b)$
4. $\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$
5. $\log_c(a^b) = b\log_c(a)$
6. $\log_b(a) = \dfrac{\log_c(a)}{\log_c(b)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$ si $b \neq 1$
7. $\log_c(c^a) = a$
8. $c^{\log_c(a)} = a$

De plus, en prenant $c = e$ on peut réécrire toutes les lois ci-dessus en remplaçant $\log_c$ par ln.

# Dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques

**THÉORÈME:** Nous avons les formules de dérivation suivante :

1. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln(a)$
2. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
3. $\dfrac{d}{dx}\log_a(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$
4. $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$

**EXEMPLE:** On veut calculer les dérivées suivantes :

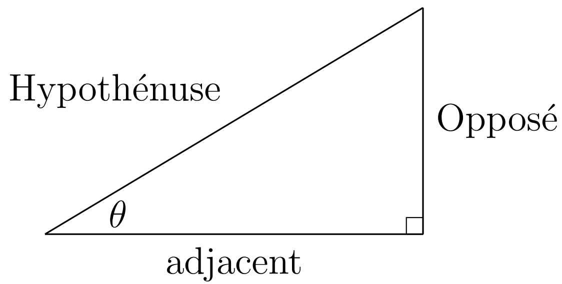
1. $\dfrac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln(2)$

2. $\dfrac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$

3. $\dfrac{d}{dx}(\ln(8x+2)) = \dfrac{8}{8x+2}$

4. $\dfrac{d}{dx}(\ln(5x^2+e^{3x})) = \dfrac{10x+3e^{3x}}{5x^2+e^{3x}}$

## Rappel sur les fonctions trigonométriques




On définit les 6 fonctions trigonométriques comme suit :

$$\sin(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypothénuse}} \qquad \csc(\theta) = \frac{\text{Hypothénuse}}{\text{Opposé}} = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypothénuse}} \qquad \sec(\theta) = \frac{\text{Hypothénuse}}{\text{Adjacent}} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \cot(\theta) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Opposé}} = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

## Quelques valeurs importantes

| Radian | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| $\tan(x)$ | 0 | $1/\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\nexists$ |

À partir de ce tableau, il est maintenant simple de calculer les valeurs correspondantes pour les trois autres fonctions trigonométriques.

## Dérivation des fonctions trigonométriques

**THÉORÈME:** Voici la dérivée des 6 fonctions trigonométriques :

1. $\dfrac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$
3. $\dfrac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$
4. $\dfrac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\tan(x)$
5. $\dfrac{d}{dx}(\csc(x)) = -\csc(x)\cot(x)$
6. $\dfrac{d}{dx}(\cot(x)) = -\csc^2(x)$

**EXEMPLE:** Calculer les dérivées suivantes :

1. $\dfrac{d}{dx}(\sin(e^x + x^2)) = (e^x + 2x)\cos(e^x + x^2)$

2. $\dfrac{d}{dx}(x^2 \tan(x)) = 2x \tan(x) + x^2 \sec^2(x)$

## Dérivation des fonctions trigonométriques inverses

**THÉORÈME:** La dérivée des fonctions trigonométriques inverses est donnée par :

1. $\dfrac{d}{dx}(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. $\dfrac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\dfrac{d}{dx}(\arccos(x)) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}(x)) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
5. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arccsc}(x)) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
6. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arccot}(x)) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

**EXEMPLE:** On veut calculer les dérivées suivantes :

1. $\dfrac{d}{dx}(\arctan(x^2)) = \dfrac{2x}{1+x^4}$

2. $\dfrac{d}{dx}(x^2 \arccos(x)) = 2x \arccos(x) - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

# EXERCICES

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{7x}$

2. $f(x) = \sin(8x^2)$

3. $f(x) = e^{4x}(x+5)^3$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 e^x}{\sin(7x)}$

5. $f(x) = \left(\sin(7x) + x^3\right)^{10}$

## Dérivation des fonctions implicites

Pour trouver la dérivée $\frac{dy}{dx}$ d'une fonction définie implicitement on doit :

1. Prendre la dérivé $\frac{d}{dx}$ de chaque côté en tenant compte que la fonction $y$ dépend de $x$.
2. Isoler la dérivée $\frac{dy}{dx}$

**ATTENTION :** $\frac{d}{dx}(x) = 1$, mais $\frac{d}{dx}(y) = y'$.

**EXEMPLE:** Calculer $\frac{dy}{dx}$ pour la fonction définie implicitement

$$x^2 + y^2 = 1$$

En prenant la dérivé de chaque côté on a :

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(1) \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0$$

Puis on isole $y'$, ce qui nous donne : $y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$.

## La dérivation logarithmique

Lorsque la variable $x$ est présente dans la base et dans l'exposant, on doit appliquer la dérivation logarithmique. La méthode consiste à :

1. Prendre le logarithme de chaque côté de l'égalité.
2. Appliquer la dérivation des fonctions implicites.
3. Remplacer les $y$ par des $x$.
4. Isoler notre dérivée.

**EXEMPLE:** Calculer la dérivée de la fonction $y = x^x$.

$$\ln(y) = \ln(x^x) = x\ln(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{d}{dx}(x\ln(x)) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \ln(x) + 1$$

$$\Rightarrow \quad y' = ((\ln(x) + 1)\, y \quad \Rightarrow \quad y' = (\ln(x) + 1)\, x^x$$

## La dérivée partielle

Dans le cas des fonctions de plusieurs variables, on appelle la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}$ la fonction que l'on obtient en dérivant la fonction par rapport à la variable $x$ en supposant que toutes les autres variables sont constantes.

**EXEMPLE:** Calculer les dérivées partielles de la fonction

$$f(x,y) = x^3 \sin(y)$$

On a donc :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 \sin(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 \cos(y)$$

**REMARQUE :** Le calcul des dérivées partielles est essentiellement identique à celui du calcul de la dérivée des fonctions d'une seule variable, à l'exception de la règle de dérivation en chaîne qui comporte plusieurs différence importante.

# EXERCICES

Dans chacun des cas, calculer $\dfrac{dy}{dx}$ :

1. $x\sin(y^2) = e^{5y}\cos(x)$

2. $y = x^{7\sin(x)}$

Dans chacun des cas, trouver $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ :

1. $f(x,y) = 7x^2y + 8xy^3$

2. $f(x,y) = 6e^y\sin(x^3)y^2$

# L'intégration

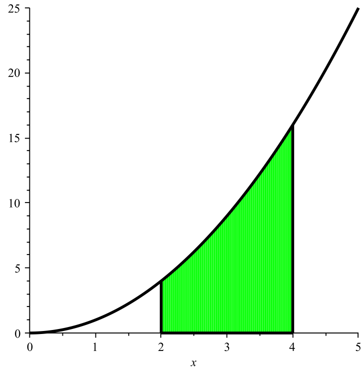
## Les deux types d'intégrales

- **L'intégrale indéfinie** $\int f(x)dx$ est l'opération inverse de la dérivée (Antidérivée).

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

- **L'intégrale définie** $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire orienté sous la fonction $f(x)$ pour $x$ entre $a$ et $b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right)$$



## Le théorème fondamental du calcul

**THÉORÈME:**

- (**Première partie :**) Si $f(x)$ est une fonction continue, alors :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

- (**Deuxième partie :**) Si $f(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions telles que $F'(x) = f(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**EXEMPLE:** Évaluer $\displaystyle\int_1^3 x^2 dx$.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \Rightarrow \qquad \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{26}{3}$$

## Connaitre nos formules de dérivation

Les formules d'intégration élémentaire sont des conséquences des formules de dérivation. Il est donc essentiel de bien les connaitre :

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\int a\ dx = ax + C & \displaystyle\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + C \\
\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1 & \displaystyle\int \csc^2(x)dx = -\cot(x) + C \\
\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C & \displaystyle\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + C \\
\displaystyle\int e^x dx = e^x + C & \displaystyle\int \csc(x)\cot(x)dx = -\csc(x) + C \\
\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C \\
\displaystyle\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C \\
\displaystyle\int \cos(x)dx = \sin(x) + C & \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcsec}(x) + C
\end{array}
$$

## Réécrire l'expression différemment

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int x^3(x^2+5)dx = \int (x^5+5x^3)dx = \frac{x^6}{6}+\frac{5x^4}{4}+C$$

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{x^4+2x+5}{x}dx = \int \left(x^3+2+\frac{5}{x}\right)dx = \frac{x^4}{4}+2x+5\ln|x|+C$$

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{x^2-5x+6}{x-3}dx = \int \frac{(x-2)(x-3)}{x-3}dx = \int (x-2)dx = \frac{x^2}{2}-2x+C$$

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{x-2}{x^3-2x^2+x-2}dx = \int \frac{x-2}{x^2(x-2)+(x-2)}dx = \int \frac{x-2}{(x-2)(x^2+1)}dx$$
$$= \int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x)+C$$

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int \tan^2(x)dx = \int (\sec^2(x)-1)dx = \int \sec^2(x)dx - \int 1dx = \tan(x)-x+C$$

## Multiplier par le conjugué

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin(x)}dx &= \int \frac{1}{1+\sin(x)} \cdot \frac{1-\sin(x)}{1-\sin(x)}dx = \int \frac{1-\sin(x)}{1-\sin^2(x)}dx \\
&= \int \frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}dx = \int \left(\sec^2(x) - \sec(x)\tan(x)\right) dx \\
&= \tan(x) - \sec(x) + C
\end{aligned}$$

## Utiliser notre intuition et essayer de deviner

**EXEMPLE:** On veut calculer l'intégrale $\int e^{5x}dx$. Pour ce faire, remarquons que notre connaissance de la dérivée nous permet de supposer que la solution est probablement de la forme $e^{5x}$, mais avec possiblement une constante. Nous allons donc supposer que la solution est $y = Ce^{5x}$ avec $C$ une constante. En dérivant, nous obtenons donc :

$$\frac{dy}{dx} = 5Ce^{5x}$$

Par définition de l'intégrale indéfinie, nous devons donc avoir $5Ce^{5x} = e^{5x}$, ce qui signifie que $C = \frac{1}{5}$. La solution du problème est donc $\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$.

# EXERCICES

Calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-15}{x+5}dx$

3. $\displaystyle\int \frac{(x^2+5)(x+7)}{x}dx$

4. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}dx$

## Les changements de variables

**THÉORÈME:** Le formule du changement de variable est :

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(x)dx$$

**EXEMPLE:** On veut calculer l'intégrale $\int e^{7x}dx$. Pour ce faire, nous posons $u = 7x$, ce qui nous permet d'obtenir $du = 7dx$ et donc $dx = \frac{1}{7}du$. On obtient donc :

$$\int e^{7x}dx = \frac{1}{7}\int e^{u}du = \frac{1}{7}e^{u} + C = \frac{1}{7}e^{7x} + C$$

**EXEMPLE:** On veut calculer l'intégrale $\int x^3 \cos(x^4)dx$. Pour ce faire, nous posons $u = x^4$, ce qui nous permet d'obtenir $du = 4x^3dx$ et donc $dx = \dfrac{1}{4x^3}du$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\int x^3 \cos(x^4)dx &= \int x^3 \cos(u)\frac{1}{4x^3}du \\
&= \frac{1}{4}\int \cos(u)du \\
&= \frac{1}{4}\sin(u) + C \\
&= \frac{1}{4}\sin(x^4) + C
\end{aligned}$$

## Réutiliser notre changement de variable

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\int x^7(x^4+2)^5 dx$. Pour ce faire, posons $u = x^4+2$, ce qui nous donne $dx = \dfrac{1}{4x^3}du$

$$\int x^7(x^4+2)^5 dx = \int x^7 u^5 \frac{1}{4x^3} du = \frac{1}{4}\int x^4 u^5 du$$

En remarquant que $x^4 = u - 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int x^7(x^4+2)^5 dx &= \frac{1}{4}\int x^4 u^5 du = \frac{1}{4}\int (u-2)u^5 du = \frac{1}{4}\int (u^6 - 2u^5) du \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{u^7}{7} - \frac{2u^6}{6}\right) + C = \frac{u^7}{28} - \frac{u^6}{12} + C = \frac{(x^4+2)^7}{28} - \frac{(x^4+2)^6}{12} + C\end{aligned}$$

# EXERCICES

Calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\int \sin(7x)dx$

2. $\int \cos(2x)\sin^5(2x)dx$

3. $\int x^3 \cos(5x^4)dx$

4. $\int x^2\sqrt{7x^3+2}dx$

5. $\int x^{14}(x^5+2)^{13}dx$

6. $\int e^x(e^x+5)^{10}dx$

## L'intégration par partie

**THÉORÈME:** La formule d'intégration par partie est donné par :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

**EXEMPLE:** On veut calculer l'intégrale $\int x\cos(3x)dx$. Pour ce faire nous allons utiliser la règle d'intégration par partie.

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos(3x)dx \\ du = dx & v = \dfrac{1}{3}\sin(3x) \end{array}$$

On obtient donc :

$$\int x\cos(x)dx = \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)dx = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$$

**EXEMPLE:** On veut calculer l'intégrale $\int \ln(x)dx$. Pour ce faire, nous appliquons la règle d'intégration par partie.

$$\begin{array}{ll} u = \ln(x) & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{array}$$

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int 1dx = x\ln(x) - x + C$$

## Combiner l'intégration par partie avec un changement de variable

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int \arctan(x)dx$. Par la règle d'intégration par partie :

$$\begin{array}{ll} u = \arctan(x) & dv = xdx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx & v = x \end{array}$$

On obtient donc :

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

On fait le changement de variable $u = 1 + x^2$, ce qui nous donne $du = 2xdx$ et donc :

$$\begin{aligned} \int \arctan(x)dx &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|u| + C = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C \end{aligned}$$

## Appliquer l'intégration par partie à plusieurs reprise

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\int x^2 e^x dx$. Par la formule d'intégration par partie :

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x dx & v = e^x \end{array}$$

On obtient donc :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

Par l'intégration par partie pour la nouvelle intégrale :

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = 1 dx & v = e^x \end{array}$$

Ce qui nous donne :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x\right) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

# Dans certain cas nous revenons à l'intégrale de départ

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\int e^x \cos(x)dx$. Par l'intégration par partie :

$$\begin{array}{ll} u = e^x & dv = \cos(x)dx \\ du = e^x dx & v = \sin(x) \end{array}$$

On obtient donc :

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)dx$$

Par l'intégration par partie à nouveau :

$$\begin{array}{ll} u = e^x & dv = \sin(x)dx \\ du = e^x dx & v = -\cos(x) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x)dx &= e^x \sin(x) - \left(-e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)dx\right) \\ &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)dx \end{aligned}$$

Remarquons que nous avons obtenu à nouveau l'intégrale de départ. En l'isolant on obtient :

$$2\int e^x\cos(x)dx = e^x\sin(x) + e^x\cos(x) + C$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x\cos(x)dx = \frac{e^x\sin(x) + e^x\cos(x)}{2} + C$$

**EXERCICE :** À partir de la solution de l'exemple précédent, utiliser votre intuition pour calculer l'intégrale suivante :

$$\int e^{2x}\sin(x)dx$$

## La méthode LIATE

Il s'agit d'une méthode qui permet souvent de déterminer quoi choisir comme $u$ et $dv$ lorsque l'on souhaite faire de l'intégration par partie. Il ne s'agit pas d'une méthode infaillible, mais elle est tout de même souvent pratique. LIATE est un acronyme signifiant :

Logarithme
Trigonométrique Inverse
Algébrique
Trigonométrique
Exponentielle

La méthode nous dit que lorsque la fonction à intégrer contient un produit de deux fonctions de type énumérer ci-dessus, le meilleur choix de $u$ consiste à prendre le type de fonction qui se trouve le plus haut dans la liste.

# EXERCICES

Calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\int x^2 e^{5x} dx$
2. $\int x\cos(x) dx$
3. $\int x\cos(x^2) dx$
4. $\int e^{2x}\cos(x) dx$
5. $\int \ln(5x+3) dx$
6. $\int \frac{e^{3x} + x\cos(4x)}{5} dx$
7. $\int x^{11}\cos(x^4) dx$
8. $\int x\sqrt{x^2+3} dx$
9. $\int e^{3x+5} dx$

## Les intégrales de la forme $\int \sin^n(ax)dx$ et $\int \cos^n(ax)dx$

- Si $n$ est impairs, on conserve une copie de $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ selon le cas, et on remplace les autres en utilisant l'identité $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
- Si $n$ est pair, on utilise plutôt les identités suivantes :

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\int \sin^3(x)dx$. Pour ce faire, on utilise l'identité $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

$$\int \sin^3(x)dx = \int \left(1 - \cos^2(x)\right)\sin(x)dx$$

En posant $u = \cos(x)$, on obtient $du = -\sin(x)dx$, ce qui nous donne :

$$\int \sin^3(x)dx = -\int (1 - u^2)du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\int \sin^4(x)dx$. Pour ce faire, on utilise l'identité $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \sin^4(x)dx &= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)dx\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'identité $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \sin^4(x)dx &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}dx \\ &= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C\end{aligned}$$

## Les intégrales de la forme $\int \sin^m(ax)\cos^n(ax)dx$

- Si $n$ est impair, on isole un $\cos(ax)$, et on remplace les autres à l'aide de l'identité trigonométrique $\sin^2(ax) + \cos^2(ax) = 1$. On peut ensuite faire le changement de variable $u = \sin(ax)$.

- Dans le cas où $m$ est impair, on isole un $\cos(ax)$, et on remplace les autres à l'aide de l'identité trigonométrique $\sin^2(ax) + \cos^2(ax) = 1$, puis on fait le changement de variable $u = \cos(ax)$.

- Dans le cas où $m$ et $n$ sont pairs, il nous faut utiliser les identités

$$\sin^2(ax) = \frac{1 - \cos(2ax)}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos^2(ax) = \frac{1 + \cos(2ax)}{2}$$

  puis de développer l'expression.

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\int \sin^3(5x)\cos^4(5x)dx$. Pour ce faire, on commence par isoler un $\sin(5x)$, puis on transforme les autres en cosinus, puis on fait le changement de variable $u = \cos(5x)$, ce qui nous donne $du = -5\sin(5x)dx$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int \sin^3(5x)\cos^4(5x)dx &= \int \sin^2(5x)\cos^4(5x)\sin(5x)dx \\
&= \int (1-\cos^2(5x))\cos^4(5x)\sin(5x)dx \\
&= \frac{-1}{5}\int (1-u^2)u^4 du \\
&= \frac{-1}{5}\int \left(u^4-u^6\right) du \\
&= \frac{-u^5}{25}+\frac{u^7}{35}+C \\
&= \frac{-\cos^5(5x)}{25}+\frac{\cos^7(5x)}{35}+C
\end{aligned}$$

**EXEMPLE:** On veut calculer l'intégrale $\int \sin^2(3x)\cos^2(3x)dx$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(3x)\cos^2(3x)dx &= \int \left(\frac{1-\cos(6x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(6x)}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2(6x)\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-\frac{1+\cos(12x)}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos(12x)\right)dx \\
&= \frac{x}{8}-\frac{\sin(12x)}{96}+C
\end{aligned}$$

## Les intégrales de la forme $\int \sin^n(ax)\cos^n(bx)dx$, $\int \sin^n(ax)\sin^n(bx)dx$ et $\int \cos^n(ax)\cos^n(bx)dx$

Dans ce cas, on utile l'une des trois identités trigonométriques suivantes :

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\Big)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\Big)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\Big)$$

**EXEMPLE:** On veut calculer l'intégrale $\int \sin(5x)\cos(8x)dx$. On a donc :

$$\int \sin(5x)\cos(8x)dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(-3x)+\sin(13x)\right)dx = \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{1}{13}\cos(13x) + C$$

# EXERCICES

Calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int \sin^5(2x)\cos^2(2x)dx$

2. $\displaystyle\int \sin(3x)\sin(5x)dx$

3. $\displaystyle\int \sin^2(3x)\cos^4(3x)dx$

4. $\displaystyle\int e^{2x}\sin(e^{2x}+3)dx$

5. $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$

## Les substitutions trigonométriques

| Forme | substitution |
|---|---|
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a\sin(\theta)$ |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ | $x = a\tan(\theta)$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a\sec(\theta)$ |
| $a^2 - b^2x^2$ | $x = \frac{a}{b}\sin(\theta)$ |
| $a^2 + b^2x^2$ | $x = \frac{a}{b}\tan(\theta)$ |
| $b^2x^2 - a^2$ | $x = \frac{a}{b}\sec(\theta)$ |
| $ax^2 + bx + c$ | complétez le carré |

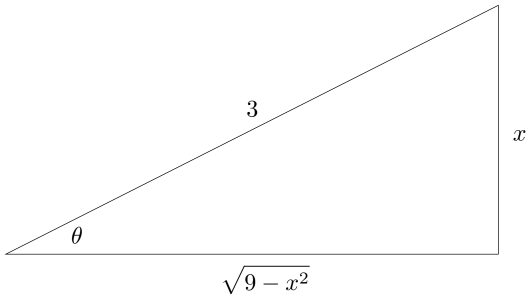
## Les intégrales contenant la forme $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\int \sqrt{9 - x^2}dx$. Pour ce faire, on pose $x = 3\sin(\theta)$, ce qui nous donne $dx = 3\cos(\theta)d\theta$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9 - x^2}dx &= \int \sqrt{9 - 9\sin^2(\theta)} \cdot 3\cos(\theta)d\theta = 9\int \cos^2(\theta)d\theta \\
&= 9\int \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right)d\theta = 9\int \frac{1}{2}d\theta + \frac{9}{2}\int \cos(2\theta)d\theta \\
&= \frac{9\theta}{2} + \frac{9\sin(2\theta)}{4} + C = \frac{9\theta}{2} + \frac{9\sin(\theta)\cos(\theta)}{2} + C
\end{aligned}$$

Maintenant, nous devons revenir à notre variable de départ.

Pour revenir à notre variable de départ, nous devons faire un triangle. D'après notre changement de variable, nous avons $\sin(\theta) = \dfrac{x}{3}$, ce qui nous donne le triangle suivant :




On obtient donc :

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \frac{9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{2} + \frac{9\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)}{2} + C = \frac{9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{2} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C$$

## La décomposition en fractions partielles

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\int \frac{11x-41}{x^2-8x+15}dx$.

$$\frac{11x-41}{x^2-8x+15} = \frac{11x-41}{(x-3)(x-5)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-3)}{(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{(A+B)x+(-5A-3B)}{(x-3)(x-5)}$$

Ce qui nous donne le système d'équations linéaires suivant :

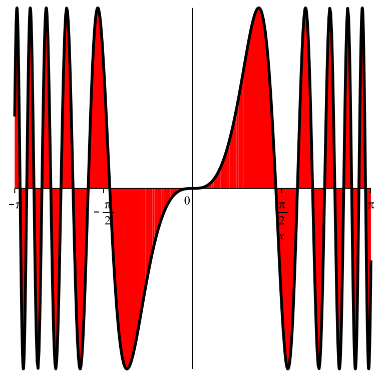
$$\begin{cases} A+B=11 \\ -5A-3B=-41 \end{cases}$$

On a donc $A=4$ et $B=7$. Notre intégrale devient donc :

$$\int \frac{11x-41}{x^2-8x+15}dx = \int \left(\frac{4}{x-3}+\frac{7}{x-5}\right)dx = 4\ln|x-3|+7\ln|x-5|+C$$

## Utilisation de la symétrie

**EXEMPLE:** Calculer l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3)dx$.



Pour ce faire, remarquons que si $f(x) = \sin(x^3)$, alors

$$f(-x) = \sin((-x)^3) = \sin(-x^3) = -\sin(x^3) = -f(x)$$

En posant $u = -x$ on obtient :

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(x^3)dx = -\int_{-\pi}^{0} \sin((-u)^3)du = -\int_{0}^{\pi} \sin(u^3)du = -\int_{0}^{\pi} \sin(x^3)dx$$

Ce qui nous donne :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3)dx = \int_{-\pi}^{0} \sin(x^3)dx + \int_{0}^{\pi} \sin(x^3)dx = -\int_{0}^{\pi} \sin(x^3)dx + \int_{0}^{\pi} \sin(x^3)dx = 0$$

# Les équations différentielles

## Les équations à variables séparables

Pour résoudre une équation différentielle à variables séparables, on doit suivre les étapes suivantes :

1. Séparer les variables.

2. Calculer l'intégrale de chaque côté de l'égalité.

3. Isoler la fonction.

4. Trouver la valeur des constantes en utilisant les valeurs initiales.

**RAPPEL :** Rappelez-vous que la solution d'une équation différentielle est une fonction qui satisfait cette équation.

**EXEMPLE:** Résoudre l'équation différentielle $y' = ky$ sachant que $k$ est une constante, $y(0) = 5$ et $y'(0) = 7$. Vous pouvez supposer la fonction $y(x)$ toujours positives.

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = kdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int kdx$$

$$\Rightarrow \quad \ln(y) = kx + C \quad \Rightarrow \quad y = Be^{kx}$$

Maintenant en utilisant les valeurs initiales on a :

$$y(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = Be^0 = B \quad \Rightarrow \quad y = 5e^{kx}$$

$$y'(0) = 7 \quad \Rightarrow \quad 7 = 5ke^0 = 5k \quad \Rightarrow \quad y = 5e^{7x/5}$$

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$y = 5e^{7x/5}$$

# Les séries de Taylor