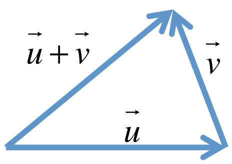
Algèbre linéaire et géométrie vectorielle

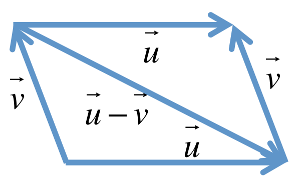
Opérations sur les vecteurs

Addition de vecteurs



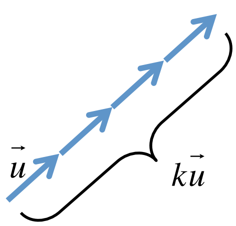
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

Soustraction de vecteurs



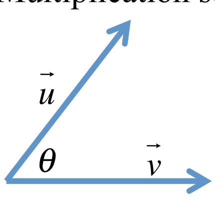
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ \vdots \\ a_n-b_n \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire



$$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

Multiplication scalaire



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \ \cos(\theta)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$$

Multiplication vectorielle

$$\vec{u}\times\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \ \sin(\theta)\ \vec{n}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3-u_3v_2 \\ u_3v_1-u_1v_3 \\ u_1v_2-u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Norme d'un vecteur

$$\left\|\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2}$$

Angle entre 2 vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors l'angle entre les deux vecteurs est donnés par: $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

Projection

La projection d'un vecteur $\vec{u}$ sur un vecteur $\vec{v}$ est donné par: $\vec{u}_{\vec{v}} = proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$

Les bases

Considérons un ensemble $B=\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ d'un sous-espace vectoriel V alors:

B est linéairement indépendant si $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\ldots+\lambda_mu_m=0$ possède exactement une solution

B est générateur de V si pour tout $y\in V$, l'équation $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\ldots+\lambda_mu_m=y$ possède au moins une solution.

B est une base, si B est un ensemble linéairement indépendant et générateur de V

Sous-espace vectoriels

Un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel si:

$\vec{u}+\vec{v} \in V$ pour tout $\vec{u},\vec{v} \in V$ et

$\lambda\vec{u}\in V$ pour tout $\vec{u}\in V$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

Opérations sur les matrices

Addition et soustraction de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplication de matrices

Le produit est définie seulement lorsque la dimension des matrice a la forme: $A_{m\times p}B_{p\times n} = C_{m\times n}$ dans ce cas, on a:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Transposé d'une matrice

Si A est une matrice, alors sa transposé (dénoté A^T) est la matrice obtenu en inversant les lignes et les colonnes de A

Méthode de Gauss

Les opérations suivantes sur les lignes d'une matrice augmenté ne change pas l'ensemble des solutions du système

$L_i + aL_j \rightarrow L_i$ si $i \neq j$

$aL_i \rightarrow L_i$ si $a \neq 0$

$L_i \leftrightarrow L_j$

$aL_i + bL_j \rightarrow L_i$ si $i \neq j$ et $a \neq 0$

Propriétés du déterminant

Si A et B sont des matrices carrés de même dimension, alors

$\det(\mathrm{AB}) = \det(A)\det(B)$

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Normalisation de vecteurs

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Matrice inverse

Si A est une matrice carré, alors on appelle matrice inverse (dénoté A^{-1}) une matrice tel que

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Si A est une matrice carré, alors la matrice adjointe dénoté $adj(A)$ est la matrice formé des cofacteurs C_{ij} sous forme de matrice.

Si A est une matrice carré tel que $det(A) \neq 0$, alors

$A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}[adj(A)]^T$ dans le cas d'une matrice 2×2 on obtient: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Théorème du rang

Si A est une matrice $m \times n$, alors:

$\mathrm{rang(A)} + \mathrm{nullité(A)} = n$

Base de span, Im et Ker

Une base de span est obtenu en applicant la méthode de Gauss au vecteur placé horizontalement

Une base de ker est obtenu en résolvant le système d'équation $Ax = b$

Un base de Im est obtenu en applicant la méthode de Gauss à la matrice tranposé

Calcul du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Si A est une matrice carré, alors on appelle mineur de A pour à la position i,j (dénoté M_{ij}) le déterminant de la matrice obtenu en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne.

Si A est une matrice carré, alors on appelle cofacteur de A pour la position i,j la valeur $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Si A est une matrice carré de dimension $n \times n$ avec $n \geq 3$, alors on définit le déterminant comme étant:

$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}$ en utilisant la i^e ligne

$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$ en utilisant la j^e colonne

Théorème de la matrice inverse

Si A est une matrice de dimension $n \times n$, alors les énoncés suivant sont équivalent:

(a) La matrice A est inversible

(b) $\det(A) \neq 0$

(c) $\ker(A) = \{0\}$

(d) $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$

(e) $\mathrm{rang}(A) = n$

(f) $\mathrm{nullité}(A) = 0$

(g) Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$

(h) $Ax = b$ a une unique solution

Opérations sur le déterminant

$L_i + cL_j \rightarrow L_i$ avec $i \neq j$ ne change pas la valeur du déterminant

$L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$ change le signe du déterminant

$cL_i \rightarrow L_i$ multiplie le déterminant par c

Équations d'une droite en 2 dimensions

Équation fonctionnelle: $y = mx + b$ avec $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ est la pente et b la valeur initiale

Équation normale: $ax + by + c = 0$ avec (a,b) un vecteur normale à la droite

Équation vectoriel: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\vec{v} + P$ avec $\vec{v}$ un vecteur directeur et P un point de la droite

Équation paramétrique: $\begin{cases} x = v_1 t + p_1 \\ y = v_2 t + p_2 \end{cases}$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur et $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ un point de la droite.

Équation symétrique: $\dfrac{x - p_1}{a} = \dfrac{y - p_2}{b}$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur directeur et $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

Distance entre un point et une droite en deux dimensions

Si $ax + by + c = 0$ est une droite et $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ est un point, alors la plus courte distance entre la droite et le point est: $\dfrac{ap + bq + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Droites en 3 dimensions

Équation vectorielle: $\vec{x} = t\vec{v} + P, \quad t \in \mathbb{R}$

Équation paramétrique: $\begin{cases} x = tv_1 + p_1 \\ y = tv_2 + p_2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = tv_3 + p_3 \end{cases}$

Équation symétrique: $\frac{x - p_1}{v_1} + \frac{y - p_2}{v_2} + \frac{z - p_3}{v_3}$

avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur, et

$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ est un point de la droite.

Distance entre un point et une droite en 3 dimensions

Si P est un point de la droite, u un vecteur directeur de la droite, et Q un point quelconque alors la plus courte distance entre Q et la droite est donné par:

$\left\| \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ}_{\vec{u}} \right\|$

Distance entre 2 droites

Pour trouver la distance entre deux droites parallèles, on trouve la plus courte distance entre un point de la première droite et le deuxième droite. Si les deux droites ne sont pas parallèle, alors on utilise la formule:

$\frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v} \right) \right\|}{\left\| \vec{u} \times \vec{v} \right\|}$ où P est un point de la première droite, Q est un point de la deuxième droite, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la première droite, et $\vec{v}$ un vecteur directeur de la deuxième droite.

Plans en 3 dimensions

Équation vectorielle: $\vec{x} = t\vec{u} + k\vec{v}, \quad t, k \in \mathbb{R}$

Équation paramétrique: $\begin{cases} x = tu_1 + kv_1 + p_1 \\ y = tu_2 + kv_2 + p_2, \quad t, k \in \mathbb{R} \\ z = tu_3 + kv_3 + p_3 \end{cases}$

Équation normale: $ax + by + cz + d = 0$

avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal et

$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ est un point de la droite.

Distance entre un point et un plan

Si $ax + by + cz + d = 0$ est un plan et $P = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ est un point de la droite, alors la plus courte distance entre le plan et le point est donné par:

$\frac{ap + bq + cr + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Quelques propriétés de l'inverse et transposé

$(A^T)^T = A$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$